Culegere
DE PROBLEME DE MECANICĂ

VOLUMUL II

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ – BUCUREŞTI, 1963

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CATEDRA DE MECANICĂ

Siveţchi Odarca
Chimie Industrială I

1964

Culegere DE PROBLEME DE MECANICĂ

VOLUMUL II

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI–1963

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea a fost întocmită de un colectiv al catedrei de mecanică din Institutul politehnic Bucureşti, compus din conferenţiar ing. D. D. Boiangiu, *prof.* R. Voinea, *şef. de lucrări* D. Voiculescu, *responsabilul lucrării fiind ing.* D. D., Boiangiu *sub îndrumarea prof.* M. Sarian, *şeful catedrei.*

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme este rezultatul activității cadrelor didactice din catedrele de mecanică din Institutul politehnic București.

Începută în anul 1956, culegerea a fost prelucrată și adusă în forma de astăzi de colectivul de redactare finală care a primit această sarcină din partea colectivului.

La apariția acestei culegeri ne permitem a ne îndrepta gîndul către prof. N. Vraca, care a decedat în cursul anului trecut și astfel a fost lipsit de bucuria de a vedea adusă la îndemîna studenților această lucrare de care s-a ocupat și interesat îndeaproape. Deși în ultimul timp a fost grav bolnav, prima citire și corectură a manuscrisului au fost făcute totuși de prof. N. Vraca.

Această culegere de probleme este redactată cu scopul precis de a îndruma studenții de la institutele tehnice superioare, de la cursurile de zi și serale, în însușirea materiei și mai ales de a le ușura studiul individual.

Gîndul celor care au redactat această culegere a fost de a înlesni studentului să pătrundă în taina rezolvării problemelor de mecanică, cît mai ușor, înlăturînd, pe cît a fost posibil, problemele cu dificultăți matematice exagerate, totodată încercînd de a explicita la maximum raționamentele folosite. Nădăjduim ca intenția noastră să se fi realizat în măsura corespunzătoare situației actuale din învățămîntul nostru superior.

Această culegere a fost redactată și cu intenția de a fi folosită de inginerii și tehnicienii superiori care lucrează în proiectare și în exploatare.

Autorii nădăjduiesc ca această culegere să servească și la formarea tinerelor cadre didactice, preparatori și asistenți, care o pot folosi ca un ajutor la pregătirea seminariilor.

Colectivul de redactare consideră că este de datoria sa să exprime mulțumiri tovarășilor prof. D. Mangeron, prof. ing. A. Pîrvu și

Scanned with OKEN Scanner

prof. R. Voinaroski, care au făcut controlul ştiinţific al lucrării şi, cu această ocazie, prin observaţiile şi îndrumările lor au contribuit în mod substanţial la îmbunătăţirea şi ridicarea calităţii culegerii.

Desigur că este posibil ca să mai existe totuşi unele deficienţe în cadrul acestei lucrări. Colectivul de redactare va rămîne foarte îndatorat colegilor şi tuturor persoanelor care vor binevoi să semnaleze astfel de scăpări, pentru a putea fi eliminate la o eventuală reeditare.

Este de datoria noastră să ne exprimăm cele mai calde mulţumiri redacţiei de manuale pentru învăţămîntul superior, care totdeauna a dovedit un elan deosebit în activitatea sa şi care ne-a dat un sprijin preţios pentru ca această lucrare să vadă lumina tiparului într-un timp destul de scurt şi în condiţii tehnice deosebite.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

DINAMICA

Capitolul XX

PRINCIPIILE DINAMICII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Principiile dinamicii enunțate de Newton sînt:

Principiul inerției. Dacă un punct material se află în repaus și dacă asupra lui nu acționează nici o forță, el continuă să rămînă timp nelimitat în repaus. Dacă un punct material se află în stare de mișcare și asupra lui nu acționează nici o forță, punctul material se mișcă rectiliniu și uniform.

Principiul proporționalității forțelor cu accelerațiile. Dacă asupra unui punct material de masă m acționează o forță $\bar{F}$, punctul capătă o mișcare cu accelerația $\bar{a}$, aceste mărimi satisfăcînd ecuația:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{20.1}$$

denumită *ecuația fundamentală a dinamicii.*

Principiul acțiunii și al reacțiunii. Într-un sistem de puncte materiale, forțele interioare sînt două cîte două egale și direct opuse.

Se numește *unitate de măsură* o anumită mărime aleasă în mod convențional care servește la măsurarea mărimilor de aceeași natură cu ea. Numărul care indică de cîte ori unitatea de măsură se cuprinde în mărimea de măsurat se numește *măsură* a acelei mărimi.

Mărimile pot fi *fundamentale*, cînd au unități proprii de măsură, sau *derivate* — cînd au unități de măsură care se deduc din unitățile de măsură ale mărimilor fundamentale.

Sistemele pe unități *fizice* au ca mărimi fundamentale lungimea L, masa M și timpul T. Cele mai folosite sisteme fizice sînt CGS (centimetru, gram, secundă) și MKS (metru, kilogram, secundă).

Sistemele de unități *tehnice* au ca mărimi fundamentale lungimea L, forța F și timpul T. Sistemul tehnic cel mai folosit este MKfS (metru, kilogramforță, secundă).

În tabela 20.1 sînt reproduse unitățile de măsură ale mărimilor mecanice în principalele sisteme de unități și relațiile de transformare dintre ele (conform STAS 737-59, STAS 738-60 și STAS 739-58).

Alte unități cu denumiri speciale, temporar tolerate în mecanică, sînt amintite în tabela 20.2.

Tabela 20.1

Unitățile de măsură ale principalelor mărimi mecanice în sistemele generale de unități CGS, MKS și MKfS

Nr.	Denumirea mărimii	Simbol	Ecuația dimensională		Sistemul CGS		Sistemul MKS		Sistemul MKfS		Relații de transformare
			Sisteme fizice	Sisteme tehnice	Denumirea unității	Simbol	Denumirea unității	Simbol	Denumirea unității	Simbol	
1	Lungime	l	L	L	centimetru	cm	metru	m	metru	m	1 m = 10^2 cm
2	Timp	t	T	T	secundă	s	secundă	s	secundă	s	—
3	Viteză	v	LT^{-1}	LT^{-1}	centimetru pe secundă	cm/s	metru pe secundă	m/s	metru pe secundă	m/s	1 m/s = 10^2 cm/s
4	Accelerație	a	LT^{-2}	LT^{-2}	centimetru pe secundă la pătrat	cm/s^2	metru pe secundă la pătrat	m/s^2	metru pe secundă la pătrat	m/s^2	1 m/s^2 = 10^2 cm/s^2
5	Viteză unghiulară	ω	T^{-1}	T^{-1}	radian pe secundă	1/s	radian pe secundă	1/s	radian pe secundă	1/s	—
6	Accelerație unghiulară	$\dot{\omega}$ ε	T^{-2}	T^{-2}	radian pe secundă la pătrat	1/s 2	radian pe secundă la pătrat	1/s^2	radian pe secundă la pătrat	1/s^2	—
7	Masă	m	M	$L^{-1}FT^2$	gram	g	kilogram	kg	kilogram-forță-secundă la pătrat pe metru	kgf·s^2/m	1kg = 10^3g; 1 kgf s^2/m = = 9,81kg = 9 810g
8	Forță	F	LMT^{-2}	F	dynă	dyn (g·cm/s^2)	Newton	N (kg·m/s^2)	kilogram-forță	kgf	1 N = 10^5 dyn; 1 kgf = 9,81; N = 9,81·10^5 dyn
9	Masă specifică (densit.)	ρ	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	gram pe centimetru cub	g/cm^3	kilogram pe metru cub	kg/m^3	—	—	1 kg/m^3=10^{-3} g/cm^3

Scanned with OKEN Scanner

10	Greutate specifică	γ	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	dynă pe centimetru cub	dyn/cm³ g/cm²·s²	Newton pe metru cub	N/m³ (kg/m²·s²)	kilogram-forţă pe metru cub	kgf/m³	1N/m³ = =10⁻¹dyn/cm³; 1 kgf/m³ = = 9,81 N/m³
11	Presiune	p	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	dynă pe centimetru pătrat sau barye	dyn/cm² (g/cm·s²)	Newton pe metru pătrat	N/m² (kg/m·s²)	kilogram-forţă pe metru pătrat	kgf/m²	1 N/m² = = 10 dyn//cm²; 1kgf/m²=9,81 N/m²
12	Energie Lucru mecanic	E £	L^2MT^{-2}	LF	erg	erg (g·cm²/s²)	joule	J (kg·m²/s²)	kilogram-forţă-metru	kgf.m (kgf·m)	1 J = 10⁷ erg; 1 kgfm = = 9,81 J = = 9,81·10⁷ erg
13	Putere	P	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	erg pe secundă	erg/s (g·cm²/s³)	watt	W (kg·m²/s³)	kilogram-forţă-metru pe secundă	kgf·m/s (kgf·m/s)	1 W = 10⁷ erg/s; 1 kgfm/s = = 9,81 W = = 9,81·10⁷ erg/s
14	Momentul unei forţe (cuplu)	$\mathfrak{M}$	L^2MT^{-2}	LF	dynă-centimetru	dyn·cm (g·cm²/s²)	Newton-metru	N·m (kg·m²/s²)	kilogram-forţă-metru	kgf·m	1 N·m = =10⁷dyn·cm; 1 kgf.m=9,81 N·m
15	Moment de inerţie	J	L^2M	LFT^2	gram-centimetru pătrat	g·cm²	kilogram-metru pătrat	kg·m²	kilogram-forţă-metru-secundă la pătrat	kgf·m·s²	1 kg m²= = 10⁷g·cm²; 1 kgf· ·m·s² = 9,81 kg·m²
16	Impuls Percuţie	H P	LMT^{-1}	FT	gram-centimetru pe secundă sau dynă-secundă	g·cm·s dyn·s	kilogram-metru pe secundă sau Newton-sec.	kg·m/s N·s	kilogram-forţă-secundă	kgf·s	1N·s=10⁵dyn·s; 1 kgf·s = = 9,81 N·s
17	Moment cinetic	K	L^2MT^{-1}	LFT	gram-centimetru la pătrat pe secundă	g·cm²/s	kilogrammetru la pătrat pe secundă	kgm²/s	kilogram-forţă-metru-secundă	kgf·m·s	1 kg·m²/s = 10⁷g·cm²/s; =1 kgf·m·s = = 9,81 kg·m³/s

Observaţii. Pentru mărimile mecanice care nu depind de masa M se foloseşte aceeaşi unitate în sistemele MKS şi MKfS. Pentru mărimile mecanice în a căror ecuaţie dimensională masa M este la puterea întîi 1 unitate MKfS = 9,81 unităţi MKS (s-a luat valoarea acceleraţiei gravitaţiei $g = 9{,}81$ m/s² în loc de $g = 9{,}80665$ indicată în STAS 1295-57 aproximaţie permisă de calculele uzuale în tehnică).

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 20.2

Unităţile mecanice cu denumiri speciale (după STAS 739–49)

Nr.	Denumirea mărimii	Simbol	Unitatea de măsură		Relaţiile cu unităţile sistemelor generale	Observaţii
			Denumire	Simbol		
1	Timp	t	Minut	min	1 min = 60 s	Se foloseşte în tehnică
			Oră	h	1 h = 60 min = 3 600 s	
2	Viteză unghiulară	ω	Rotaţie pe minut	rot/min	1 rot/min = $\frac{2\pi}{60}$ rad/s	Se foloseşte în tehnică
3	Masă	m	Tonă	t	1 t = 1 000 kg	
4	Forţă	F	Tonă-forţă	tf	1 tf = 1 000 kgf	Tolerată
			Stenă	sn	1 sn = 10^8 dyn = 10^3 N	Se va evita folosirea acestei unităţi
5	Energie	E	Kilowatt-oră	kWh	1 kWh = 3 600 000 J	Se folosesc în tehnică
	Lucru mecanic	L	Watt-oră	Wh	1 Wh = 3 600 J	
6	Putere	P	Cal-putere	CP	1 CP = 75 kgm/s	Se va evita folosirea acestei unităţi
7	Presiune	p	Bar	bar	1 bar = 10^6 barye	Se folosesc: în fizică şi meteorologie
			Milibar	mbar	1 mbar = 10^{-3} bar	
			Microbar	μ bar	1 μbar = 10^{-6} bar = 1 barye	
			Atmosferă fizică	At	1 At = 1,03322 kgf/cm^3 = 760 mm col Hg	în fizică şi meteorologie
			Atmosferă tehnică	at	1 at = 1 kgf/cm^2	în tehnică
			Torr	torr	1 torr = 1 mm col. Hg	în fizică şi meteorologie

Scanned with OKEN Scanner

În aceste tabele este indicată și *ecuația dimensională* a mărimii mecanice respective, adică relația care există între acea mărime [m] și mărimile fundamentale de care depinde. În sistemele fizice ea este de forma:

$$[m] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, \tag{20.2}$$

iar în sistemele tehnice, de forma:

$$[m] = L^{\alpha} F^{\beta} T^{\gamma}.$$

O formulă este omogenă dacă toți termenii au aceeași ecuație dimensională. Principiul omogenității ne permite să găsim eventualele greșeli de calcul. În cazul cînd o formulă este neomogenă, ea este sigur greșită; însă cînd este omogenă, nu putem afirma că ea este exactă.

B. PROBLEME REZOLVATE

20.1. Un bloc de piatră omogen are greutatea $G = 1$ tf și greutatea specifică $\gamma = 2$ tf/m³. Să se exprime greutatea G, greutatea specifică γ, volumul V, masa m și densitatea ρ în unități ale sistemelor MKfS, MKS și CGS.

Rezolvare. În sistemul MKfS:

$$G = 1 \text{ tf} = 1\,000 \text{ kgf (v. tabela 20.2, nr. 4)}$$

$$\gamma = 2 \text{ tf/m}^3 = 2\,000 \text{ kgf/m}^3.$$

Cum:

$$\gamma = \frac{G}{V}$$

rezultă:

$$V = \frac{G}{\gamma} \frac{1\,000}{2\,000} \frac{\text{kgf}}{\text{kgf/m}^3} = 0{,}5 \text{ m}^3.$$

Cum greutatea G este forța cu care este atras un corp de masă m la suprafața pămîntului și care imprimă corpului accelerația greutății g din relația (20.1) avem:

$$G = mg,$$

deci:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{1\,000}{9{,}81} \frac{\text{kgf}}{\text{m/s}^2} = 102 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \text{ (unități tehnice de masă).}$$

Densitatea:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{G}{Vg} = \frac{\gamma}{g} = \frac{2\,000}{9{,}81} \frac{\text{kgf/m}^3}{\text{m/s}^2} = 204 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sistemul MKS. Folosind relațiile de transformare din tabela 20.1 avem:

$$G = 1\,000 \times 9{,}81\,N = 9\,810\,N$$

$$\gamma = 2\,000 \times 9{,}81\,\frac{N}{m^3} = 19\,620\ N/m^3$$

$$V = 0{,}5\ m^3$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{9\,810}{9{,}81}\,\frac{N}{m/s^2} = 1\,000\,\frac{kgm/s^2}{m/s^2} = 1\,000\ kg$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{19\,620\ N/m^3}{9{,}81\ m/s^2} = 2\,000\,\frac{kg/s^2 \cdot m^2}{m/s^2} = 2\,000\ kg/m^3.$$

În sistemul CGS. Din tabela 20.1 rezultă:

$$G = 1\,000 \times 9{,}81 \times 10^5\ dyn = 9{,}81 \times 10^8\ dyn$$

$$\gamma = 19\,620\ N/m^3 = 19\,620 \times 10^{-1}\ dyn/cm^3 = 1\,962\ dyn/cm^3$$

$$V = 0{,}5\ m^3 = 0{,}5 \times (100)^3\ cm^3 = 5 \times 10^5\ cm^3$$

$$m = \frac{G}{g} = \frac{9{,}81 \times 10^8}{981}\,\frac{dyn}{cm/s^2} = 10^6\,\frac{g \cdot cm/s^2}{cm/s^2} = 10^6\ g$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1\,962}{981}\,\frac{dyn/cm^3}{cm/s^2} = 2\,\frac{g/cm^2 \cdot s^2}{cm/s^2} = 2g/cm^2.$$

Observații. Măsura greutății unui corp, exprimată în unități ale sistemului MKfS (kilograme-forță), și măsura masei acelui corp, exprimată în unități ale sistemului MKS (kilograme), sînt identice:

$$m = \frac{G\ [kgf]}{9{,}81\ [m/s^2]} = \frac{9{,}81\ G}{9{,}81}\left[\frac{N}{m/s^2}\right] G\ [kg].$$

De asemenea măsura greutății specifice a unui corp exprimată în unități MKfS [kgf/m³] și măsura masei specifice a aceluiași corp exprimată în unități MKS [kg/m³] sînt identice.

20.2. O forță $F = 1\,500$ dyn imprimă unui punct material liber în repaus o accelerație $a = 0{,}5\ m/s^2$. Să se exprime masa m și greutatea G a punctului și forța F în unități ale sistemelor CGS, MKS și MKfS.

Rezolvare. Traiectoria este o dreaptă, pe care proiectăm ecuația (20.1) și obținem:

$$F = ma;$$

deci masa punctului:

$$m = \frac{F}{a}.$$

Greutatea punctului este:

$$G = mg = \frac{g}{a}F.$$

Făcînd înlocuirile numerice, în sistemul CGS, $a = 50$ cm/s², deci:

$$m = \frac{1\,500}{50}\frac{\text{dyn}}{\text{cm/s}^2} = 30 \text{ g}$$

$$G = \frac{981}{50}\,1\,500\,\frac{\text{cm/s}^2\cdot\text{dyn}}{\text{cm/s}^2} = 29\,430 \text{ dyn}.$$

Folosind relațiile de transformare din tabela 20.1 pentru sistemul MKS rezultă:

$$m = 30 \times 10^{-3} \text{ kg} = 0{,}03 \text{ kg}$$

$$G = 29\,430 \times 10^{-5} \text{ N} = 0{,}2943 \text{ N}$$

$$F = 1\,500 \times 10^{-5} \text{ dyn} = 0{,}015 \text{ N},$$

iar pentru sistemul MKfS:

$$m = \frac{0{,}03}{9{,}81}\frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}} = 0{,}00306\,\frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}$$

$$G = \frac{0{,}2943}{9{,}81}\text{kgf} = 0{,}03 \text{ kgf}$$

$$F = \frac{0{,}015}{9{,}81}\text{kgf} = 0{,}00153 \text{ kgf}.$$

20.3. Să se determine și să se exprime în unități MKfS, MKS și CGS greutatea G_1 a unui om dacă s-ar găsi pe suprafața lunii, știind că greutatea lui pe suprafața pămîntului este $G = 80$ kgf. Expresia forței de atracție universală este $F = f\frac{m\,M}{r^2}$, unde f este constanta atracției universale, m și masele punctelor care se atrag, iar r — distanța dintre aceste puncte. Masa M lunii este $M_1 = \frac{1}{80}\,M$, unde M este masa pămîntului, raza medie a lunii este $R_1 = 1\,740$ km, iar raza medie a pămîntului $R = 6\,370$ km. Să se determine, de asemenea, accelerația g_1 de cădere liberă a unui corp la suprafața lunii.

Rezolvare. Greutatea omului pe suprafața pămîntului fiind forța de atracție dintre om și pămînt:

$$G = f\frac{m\,M}{R^2}, \tag{1}$$

unde m este masa lui, iar greutatea lui pe suprafața lunii este:

$$G_1 = f\frac{m\,M_1}{R_1^2}. \tag{2}$$

Împărțind relațiile (1) și (2) și notînd prin λ raportul greutăților, rezultă:

$$\lambda = \frac{G}{G_1} = \frac{M\,R_1^2}{M_1\,R^2}. \tag{3}$$

Accelerația de cădere la suprafața lunii este conform ecuației (20.1): $g_1 = \frac{G_1}{m}$ și cum accelerația greutății $g = \frac{G}{m}$,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{G}{G_1} = \lambda. \tag{4}$$

Făcînd înlocuirile numerice în relația (3) rezultă:

$$\lambda = 80 \left(\frac{1{,}74 \times 10^6}{6{,}37 \times 10^6}\right)^2 = 5{,}97,$$

deci:

$$G_1 = \frac{G}{\lambda} = \frac{80}{5{,}97}\ \text{kgf} = 13{,}4\ \text{kgf} = 13{,}4 \times 9{,}81\ \text{N} = 132\ \text{N} = 132 \times 10^5\ \text{dyn};$$

$$g_1 = \frac{g}{\lambda} = \frac{9{,}81}{5{,}97}\ \text{m/s}^2 = 1{,}64\ \text{m/s}^2 = 164\ \text{cm/s}^2.$$

20.4. Știind că în sistemul CGS constanta de atracție universală $f = 6{,}67 \times 10^{-8}$, să se exprime f în sistemele MKS și MKfS. Care este ecuația dimensională a lui $[f]$?

Rezolvare. Expresia forței de atracție universală fiind:

$$F = f \frac{m\,M}{r^2}$$

(v. problema 20.3), ecuația dimensională în sistemele fizice a constantei de atracție universală va fi:

$$[f] = \frac{[F]\ [r^2]}{[m]\ [M]} = \frac{MLT^{-2} \cdot L^2}{M \cdot M} = L^3 M^{-1} T^{-2},$$

deci în sistemul CGS:

$$f = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2.$$

În sistemul MKS:

$$f = 6{,}67 \times 10^{-8}\ \frac{(0{,}01)^3}{0{,}001}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2.$$

Ecuația dimensională a constantei de atracție universală în sistemul tehnic este:

$$[f] = \frac{[F]\ [r^2]}{[m]\ [M]} = \frac{FL^2}{(L^{-1}FT^2)^2} = L^4 F^{-1} T^{-4},$$

deci în sistemul MKfS:

$$f = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{1}{9{,}81}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot \text{s}^2} = 6{,}8 \times 10^{-12}\ \text{m}^4/\text{kgf} \cdot \text{s}^4.$$

Scanned with OKEN Scanner

20.5. Să se exprime presiunea atmosferică corespunzătoare la 780 torr în atmosfere fizice, atmosfere tehnice, barye, bar, milibar, N/m² și kgf/m². Greutatea specifică mercurului $\gamma = 13{,}6$ gf/cm³.

Rezolvare. Din tabela 20.2 (nr. 7) rezultă:

$$p = 780 \text{ torr} = 780 \text{ mm col. Hg} = \frac{780}{760} \text{ At} = 1{,}026 \text{ At},$$

presiunea atmosferică fiind egală cu greutatea unei coloane mercur având baza egală cu unitatea de arie și înălțimea $h = 780$ mm.
În atmosfere tehnice:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{\gamma V}{A} = \frac{\gamma Ah}{A} = \gamma h = 13{,}6 \times 10^{-3} \times 7{,}8 \text{ kgf/cm}^3 = 1{,}061 \text{ at}.$$

În kgf/m²:

$$p = 1{,}061 \text{ kgf/cm}^2 = 1{,}061 \times \frac{1}{(0{,}01)^2} = 10\,610 \text{ kgf/m}^2.$$

Ținînd seamă de relațiile de transformare din tabelele 20.1 (nr. 11) și 20.2 (nr. 7) rezultă:

$$p = 9{,}81 \times 10\,610 \text{ N/m}^2 = 1{,}041 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1{,}041 \times 10^6 \text{ barye} = \\ = 1{,}041 \text{ bar} = 1\,041 \text{ mbar}.$$

20.6. Un ascensor ridică o greutate de masă $m = 1\,800$ kg la înălțimea $h = 15$ m cu viteza $v = 1{,}5$ m/s. Se cere:
a) Lucrul mecanic efectuat și energia cinetică a greutății exprimate în unități ale sistemelor CGS, MKS, MKfS și în watt-oră.
b) Puterea utilă a motorului ascensorului exprimată în unități ale sistemelor CGS, MKS, MKfS și în cai-putere.

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat la ridicarea unei greutăți G la înălțimea h este conform (24.21):

$$\mathfrak{L} = Gh = mgh.$$

În sistemul MKS și CGS:

$$\mathfrak{L} = 1\,800 \times 9{,}81 \times 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot m = 264\,870 \text{ J} = 2{,}6487 \times 10^{12} \text{ erg}.$$

În sistemul MKfS, $G = 1\,800$ kgf (v. observația de la problema 20.1), deci:

$$\mathfrak{L} = 1\,800 \times 15 \text{ kgf} \cdot m = 27\,000 \text{ kgfm}.$$

Energia cinetică a greutății este conform (24.13):

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 1\,800 \times (1{,}5)^2 \text{ kg (m/s)}^2 = 2\,025 \text{ J} = 2{,}025 \times 10^{10} \text{ erg} = \\ = \frac{2\,025}{9{,}81} \text{kgfm} = 206 \text{ kgfm}.$$

Din tabela 20.2 (nr. 5) avem: 1 Wh = 3 600 J, deci:

$$\mathfrak{L} = \frac{264\ 870}{3\ 600}\ \text{Wh} = 73{,}6\ \text{Wh}$$

$$E = \frac{2\ 025}{3\ 600}\ \text{Wh} = 0{,}5625\ \text{Wh}.$$

Puterea fiind lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp în sistemele MKS și CGS:

$$P = \frac{\mathfrak{L}}{t} = \frac{mgh}{t} = mgv = 1\ 800 \times 9{,}81 \times 1{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2\cdot\text{m/s} =$$

$$= 26\ 487\ \text{W} = 2{,}6487 \times 10^{11}\ \text{erg/s} = 26{,}487\ \text{kW},$$

iar în sistemul MKfS și în cai-putere:

$$P = Gv = 1\ 800 \times 1{,}5\ \text{kgf}\cdot\text{m/s} = 2\ 700\ \text{kgfm/s} = \frac{2\ 700}{75}\ \text{CP} = 36\ \text{CP}.$$

20.7. Să se exprime, în kilowați și în cai-putere, puterea dezvoltată de o locomotivă care trage un tren cu o forță de tracțiune $F = 6$ tf și înaintează cu viteza $v = 72$ km/h. Să se exprime forța de tracțiune și lucrul mecanic dezvoltat de locomotivă în timpul $t = 10$ min, în unități ale sistemelor CGS, MKS, MKfS.

Rezolvare. Puterea fiind lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp, iar lucrul mecanic elementar al forței F fiind:

$$d\mathfrak{L} = F\,ds$$

(deplasarea ds a punctului de aplicație al forței se face pe direcția forței) rezultă:

$$P = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = F\frac{ds}{ds} = F\,v.$$

Făcînd înlocuiri numerice:

$$F = 6\ \text{tf} = 6\ 000\ \text{kgf} = 6\ 000 \times 9{,}81\ \text{N} = 58\ 860\ \text{N} = 5{,}886 \times 10^9\ \text{dyn}$$

$$v = 72\ \text{km/h} = \frac{72 \times 1\ 000}{3\ 600}\ \frac{m}{\text{s}} = 20\ \text{m/s} = 2\ 000\ \text{cm/s}$$

$$P = 6\ 000 \times 20\ \text{kgf m/s} = 120\ 000\ \text{kgfm/s} = \frac{120\ 000}{75}\ \text{CP} = 1\ 600\ \text{CP}$$

$$P = 58\ 860 \times 20\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\ 177\ 200\ \text{W} = 1\ 177{,}2\ \text{kW}.$$

Forța de tracțiune fiind constantă, lucrul mecanic dezvoltat de locomotivă este:

$$\mathfrak{L} = \int d\mathfrak{L} = \int F\,ds = F\,s = F\,vt,$$

deoarece locomotiva are o mișcare uniformă ($s = vt$). Rezultă:

$$\mathfrak{L} = 5{,}886 \times 10^9 \times 2\,000 \times 600 \frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \text{s} = 7{,}0632 \times 10^{15}\ \text{erg} \quad \text{(CGS)}$$

$$\mathfrak{L} = 58\,860 \times 20 \times 600 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = 7{,}0632 \times 10^8\ \text{J} \quad \text{(MKS)}$$

$$\mathfrak{L} = 6\,000 \times 20 \times 600\ \text{kgf} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\ \text{s} = 72 \times 10^6\ \text{kgfm}. \quad \text{(MKfS)}$$

Lucrul mecanic exprimat în kilowatt-oră este conform relației de transformare din tabela 20.2 (nr. 5):

$$\mathfrak{L} = \frac{7{,}0632 \times 10^8}{3\,600\,000}\ \text{kWh} = 196{,}2\ \text{kWh}.$$

Observație. Cunoscînd valoarea puterii în cai-putere, valoarea în kilowați putea fi obținută și prin transformare directă cu relația de transformare:

$$1\ \text{CP} = 75\ \text{kgfm/s} = 9{,}81 \times 75\ \text{W} \approx 736\ \text{W} = 0{,}736\ \text{kW}$$

$$1\ \text{kW} = \frac{1}{0{,}736}\ \text{CP} \approx 1{,}36\ \text{CP}.$$

20.8. Un arbore avînd o turație $n = 600$ rot/min este antrenat printr-o curea de transmisie, roata curelei avînd diametrul $d = 400$ mm, iar forțele de tracțiune din curea de o parte și alta a roții fiind $T_1 = 500$ kgf și $T_2 = 250$ kgf. Să se exprime puterea transmisă în unități din sistemele CGS, MKS și MKfS, precum și în cai-putere și kilowați.

Rezolvare. Lucrul mecanic elementar al forțelor aplicate unui solid avînd o mișcare de rotație este:

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{M}\, d\theta,$$

unde $\mathfrak{M}$ este momentul forțelor în raport cu axa de rotație. Puterea va fi

$$P = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}\frac{d\theta}{dt} = \mathfrak{M}\omega. \qquad (1)$$

Dacă $\mathfrak{M}$ este exprimat în kgf·m, iar $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ rad/s, puterea exprimată în CP va fi:

$$P_{(CP)} = \frac{1}{75}\frac{\mathfrak{M}2\pi n}{60} = \frac{\mathfrak{M}_{(\text{kgf}\cdot\text{m})}\, n_{(\text{rot/min})}}{716{,}2}. \qquad (2)$$

În problema noastră:

$$\mathfrak{M} = \frac{d}{2}(T_1 - T_2) = \frac{0{,}4}{2}(500 - 250) = 50\ \text{kgf}\cdot\text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \cdot \frac{2 \times 3{,}14 \times 600}{60} = 62{,}8\ \text{rad/s},$$

deci în sistemul MKfS:

$$P = \mathfrak{M} \cdot \omega = 50 \times 62{,}8 = 3\,140 \text{ kgfm/s}.$$

Folosind relațiile de transformare din tabela 20.1 (nr. 13) rezultă:

$$P = 3\,140 \times 9{,}81 \text{ W} = 30\,803{,}4 \text{ W} = 3{,}08034 \times 10^{11} \text{ erg/s} = 30{,}8034 \text{ kW}.$$

Conform relației (2), puterea exprimată în CP este:

$$P = \frac{50 \times 600}{716{,}2} = 41{,}88 \text{ CP}.$$

20.9. Un volant avînd greutatea $G = 800$ kgf și raza $r = 50$ cm are o turație $n = 850$ rot/min. Știind că volantul este un disc omogen și că expresiile momentului de inerție J_z, al energiei cinetice E și al momentului cinetic K_z, în raport cu axa de rotație, sînt:

$$J_z = \frac{1}{2} Mr^2 \quad ; \quad E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad ; \quad K_z = J_z \omega,$$

să se calculeze aceste mărimi în unități ale sistemelor CGS, MKS și MKfS.

Rezolvare. Masa și viteza unghiulară a volantului fiind:

$$M = \frac{G}{g} = \frac{800}{9{,}81} \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = 800 \text{ kg} \qquad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 850}{60} \approx 89 \text{ rad/s},$$

în sistemul MKS rezultă:

$$J_z = \frac{1}{2} Mr^2 = \frac{1}{2} \times 800 \times 0{,}5^2 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 89^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \frac{1}{\text{s}^2} = 396\,050 \text{ J}$$

$$K_z = J_z \omega = 100 \times 89 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{\text{s}} = 8\,900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Folosind relațiile de transformare din tabela 20.1 (nr. 15, 12 și 17) în sistemul MKfS rezultă:

$$J_z = \frac{100}{9{,}81} \cdot \text{kgfm} \approx 10{,}2 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2; \quad E = \frac{396\,050}{9{,}81} \text{kgfm} = 40\,370 \text{ kgfm} ;$$

$$K_z = \frac{8\,900}{9{,}81} \text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \approx 907 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s},$$

iar în sistemul CGS:

$$J_z = 100 \times 10^7 = 10^9 \text{ g} \cdot \text{cm}^2; \quad E = 396\,050 \times 10^7 = 3{,}9605 \times 10^{12} \text{ erg};$$

$$K_z = 8\,900 \times 10^7 = 8{,}9 \times 10^{10} \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

20.10. Să se verifice care dintre relațiile următoare sînt omogene și care sînt neomogene, deci greșite:

a) $m\,\bar{v}_2 = m\,\bar{v}_1 = \int \bar{F}\cdot dt$;

b) $E = \frac{G\,r^3}{2\,g}\,\omega^2$ (E = energia cinetică a unui disc de greutate G și rază r a cărui viteză unghiulară este ω);

c) $\frac{d}{dt}[(G_1 + G_2)\,vr + J\omega] = G_1 - G_2\,r$ (relație obținută la studierea problemei mașinii lui Atwood, J, ω și r momentul de inerție, viteza unghiulară și raza scripetelui, G_1, G_2 și v greutățile petrecute cu un fir peste scripete și viteza lor);

d) $-\varepsilon J_{xz} + \omega^2\,J_{yz} = \mathfrak{M}_x - h\,R'_y$ (relație folosită la calculul reacțiunilor $\bar{R}$ și $\bar{R}'$ ale unui solid cu o axă fixă Oz, articulată în punctele O și O', $OO' = h$. Viteza și accelerația unghiulară a solidului sînt ω și ε, iar $J_{xz} = \sum mxz$, $J_{yz} = \sum myz$ sînt momentele de inerție centrifuge);

e) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Gl\,(1 - \cos\theta t)$ (m și G fiind masa, respectiv greutatea pendulului simplu de lungime l; v = viteza lui, cînd unghiul dintre pendul și verticală este θ);

f) $H = \frac{2\,E}{r\,\omega}$ (H și E impulsul respectiv energia cinetică a unui disc omogen de rază, r, care se rotește în jurul unei axe trecînd prin centrul de greutate cu viteza unghiulară ω).

Rezolvare. În sistemele fizice ecuațiile dimensionale vor fi (v. tabela 20.1):

a) $[m\bar{v}] = [m]\,[\bar{v}] = M\cdot LT^{-1} = LMT^{-1}$

$$\left[\int \bar{F}\,dt\right] = [F]\,[t] = LMT^{-2}\cdot T = LMT^{-1}.$$

Toți termenii avînd aceeași ecuație dimensională, formula este omogenă, ea este forma integrală a teoremei impulsului.

b) $[E] = L^2MT^{-2}$

$$\left[\frac{G\,r^3}{2g}\,\omega^2\right] = \frac{[G]\,[r]^3\,[\omega]^2}{[g]} = \frac{LMT^{-2}\cdot L^3\cdot[T^{-1}]^2}{LT^{-2}} = L^3\,MT^{-2}$$

formula este neomogenă, deci sigur greșită. În realitate:

$$E = \frac{Gr^2}{2g}\,\omega^2.$$

c) Expresia $(G_1 + G_2)\,vr + J\omega$ este neomogenă, deoarece:

$$[Gvr] = [G]\,[v]\,[r] = LMT^{-2}\cdot LT^{-1}\cdot L = L^3\,MT^{-3},$$

iar:

$$[J\omega] = [J]\,[\omega] = L^2\,M\cdot T^{-1},$$

deci formula este greșită.

Formula corectă:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G_1 + G_2}{g} vr + J\omega\right) = (G_1 - G_2)\, r$$

este însă omogenă. Într-adevăr:

$$\left[\frac{Gvr}{g}\right] = \frac{[G]\,[v]\,[r]}{[g]} = \frac{LMT^{-2} \cdot LT^{-1} \cdot L}{LT^2} = L^2\, MT^{-1},$$

deci:

$$\left[\frac{G_1 + G_2}{g} vr + J\omega\right] = L^2\, MT^{-1}$$

și:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{G_1 + G_2}{g} vr + J\omega\right)\right] = \frac{\left[\frac{G_1 + G_2}{g} vr + J\omega\right]}{[t]} = \frac{L^2 MT^{-1}}{T} = L^2 MT^{-2},$$

iar:

$$[(G_1 - G_2)\ r] = [G]\ [r] = LMT^{-2} \cdot L = L^2\, MT^{-2}.$$

d) Ecuația dimensională a momentelor de inerție centrifuge este:

$$[J_{xz}] = \left[\sum mxz\right] = [m]\,[x]\,[z] = M \cdot L \cdot L = L^2 M \quad [J_{yz}] = L^2\, M,$$

deci:

$$[\varepsilon J_{xz}] = [\varepsilon]\ [J_{xz}] = T^{-2} \cdot L^2 M = L^2 MT^{-2} \quad [\omega^2\, J_{yz}] = [\omega^2]\ [J_{yz}] =$$

$$= (T^{-1})^2 \cdot L^2 M = L^2\, MT^{-2}$$

$$[\mathfrak{M}_x] = L^2\, MT^{-2} \quad [h\, R'_y] = [h]\ [R'_y] = L \cdot LMT^{-2} = L^2\, MT^2.$$

Toți termenii au aceeași ecuație dimensională, relația care reprezintă proiecția teoremei momentului cinetic pe axa Ox este omogenă.

e) $$\left[\frac{1}{2} mv^2\right] = [m]\ [v]^2 = M\ (LT^{-1})^2 = L^2\, MT^{-2}$$

$$[Gl] = [G]\ [l] = LMT^{-2} \cdot L = L^2\, MT^{-2}.$$

Însă dimensiunea argumentului cosinusului nu este nulă, deoarece:

$$[\theta t] = [\theta]\ [t] = T.$$

Deci relația nu are sens. În realitate, folosind teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic în cazul pendulului simplu se obține:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = Gl\ (1 - \cos\theta),$$

relație omogenă;

f) $$[H] = LMT^{-1}\left[\frac{2E}{r\omega}\right] = \frac{[E]}{[r]\,[\omega]} = \frac{L^2\, MT^{-2}}{L \cdot T^{-1}} = LMT^1.$$

Relația este omogenă. Ea însă nu este corectă, deoarece, după cum se va vedea în capitolul XXVII, impulsul discului este nul, și:

$$\frac{2E}{r\omega} = 2 \cdot \frac{\frac{Mr^2}{2}\omega^2}{r\omega} = Mr\omega \neq 0 \quad (M \text{ — masa discului}).$$

Deci omogenitatea este o condiție necesară, dar nu și suficientă, pentru ca o formulă să fie corectă.

20.11. Știind că perioada oscilațiilor proprii ale unui resort de care este suspendat un corp este de forma:

$$T = cm^{\alpha} k^{\beta} g^{\gamma},$$

unde c este o constantă adimensională, m — masa corpului, k — constanta elastică a resortului (raportul dintre tensiunea F și alungirea lui Δl), g — accelerația gravitației, să se determine expresia lui $T = T\ (m, k, g)$. Aplicație numerică: $m = 10$ g, $k = 16\frac{N}{m}$, $g = 9{,}81$ m/s^2.

Rezolvare. În sistemele fizice ecuațiile dimensionale vor fi (v. tabela 20.1):

$$[T] = T$$

$$[cm^{\alpha}k^{\beta}g^{\gamma}] = [m]^{\alpha} \cdot [k]^{\beta} \cdot [g]^{\gamma} = M^{\alpha}\ (MT^{-2})^{\beta}\ (LT^{-2})^{\gamma} = L^{\gamma} M^{\alpha+\beta} T^{-2\beta-2\gamma}$$

deoarece:

$$[k] = \left[\frac{F}{\Delta l}\right] = \frac{[F]}{[\Delta l]} = \frac{LMT^{-2}}{L} = MT^{-2}.$$

Relația trebuind să fie omogenă, trebuie ca:

$$T \equiv L^{\gamma} M^{\alpha+\beta} T^{-2\beta+2\gamma},$$

adică exponenții mărimilor fundamentale din membrul întîi și din membrul al doilea ai relației trebuie să fie egali. Deci:

$$\gamma = 0 \qquad \alpha + \beta = 0 \qquad -2\beta + 2\gamma = 1$$

sau:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = -\frac{1}{2} \qquad \gamma = 0.$$

Expresia perioadei este deci:

$$T = cm^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

După cum se va vedea în capitolul XXIII, $c = 2\pi$, deci:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Făcînd înlocuirile numerice în sistemul CGS rezultă:

$$k = 16\,\frac{N}{m} = \frac{16 \times 10^5}{10^2}\,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}} = 16\,000\,\frac{\text{g}\cdot\text{cm/s}^2}{\text{cm}} = 16\,000\ \text{g/s}^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{10}{16\,000}\left(\frac{g}{\text{g/s}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{20}\,s \approx 0{,}157\ \text{s}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

20.12. Să se exprime în unități ale sistemelor CGS, MKS și MKfS masa m, greutatea G și greutatea specifică γ a unui bloc paralelipipedic omogen de beton avînd dimensiunile $a = 100$ cm, $b = 160$ cm, $c = 75$ cm, masa specifică a betonului fiind $\rho = 2{,}2$ kg/dm^3.

Răspuns: $m = V\rho = abc\rho = 2\,640\,000$ g $= 2\,640$ kg $= 269{,}1\,\frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}$

$$G = \text{mg} = 2\,589\,840\,000\ \text{dyn} = 25\,898{,}4\ N = 2\,640\ \text{kgf}$$

$$\gamma = \rho g = 2\,158{,}2\,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^3} = 21\,582\,\frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 2\,200\,\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}.$$

20.13. Să se exprime unități din sistemele CGS, MKS și MKfS precum și în kWh, respectiv kW și CP, lucrul mecanic $\mathfrak{L}$ și puterea P dezvoltate de un tractor care înaintează timp de 3 h cu viteza $v = 9$ km/h antrenînd un plug cu o forță de tracțiune $F = 0{,}48$ tf.

Răspuns: $\mathfrak{L} = Fs = Fvt = 1{,}271\,376 \times 10^{15}$ erg $= 1{,}271376 \times 10^8$ J $=$

$$= 12{,}96 \times 10^6\ \text{kgfm} = 35{,}316\ \text{kWh}$$

$P = Fv = 1{,}1772 \times 10^{11}$ erg/s $= 11\,772$ W $= 11{,}772$ kW $= 1\,200$ kgfm/s $=$

$$= 16\ \text{CP}.$$

20.14. Să se determine momentul cuplului motor $\mathfrak{M}$ transmis unui arbore de un motor avînd o putere $P = 60$ CP, turația arborelui fiind $n = 1\,500$ rot/min.

Răspuns: $\mathfrak{M} = \frac{P}{\omega} = \frac{716{,}2\ P_{(CP)}}{n\ (rot\ min)} = 28{,}628$ kgf·m.

20.15. Știind că perioada micilor oscilații ale unui pendul fizic este de forma:

$$T = kJ^\alpha G^\beta l^\gamma,$$

unde k este o constantă adimensională, G și J — greutatea respectiv momentul de inerție al pendulului în raport cu axa de suspensie, iar l — distanța de la această axă la centrul de greutate al pendulului, să se determine expresia lui T.

Răspuns: Punînd condiția ca relația dată să fie omogenă, se obține:

$$\alpha = \frac{1}{2},\quad \beta = \gamma = -\frac{1}{2},\quad \text{deci } T = k\sqrt{\frac{J}{Gl}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXI

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Cunoscînd forțele care acționează asupra unui punct material liber se poate determina mișcarea lui (problema directă a dinamicii), și invers cunoscînd mișcarea unui punct material se poate determina rezultanta forțelor care acționează asupra lui (problema inversă a dinamicii).

Ambele tipuri de probleme pot fi rezolvate cu ajutorul ecuației fundamentale a dinamicii:

$$m\bar{a} = \bar{F} \tag{21.1}$$

sau:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}, \tag{21.2}$$

unde m este masa punctului, $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$ — accelerația lui, iar $\bar{F}$ — rezultanta forțelor care acționează asupra punctului.

Proiectînd ecuația (21.2) pe axele unui triedru de referință fix $Oxyz$ obținem un sistem de trei ecuații diferențiale:

$$m\ddot{x} = X, \qquad m\ddot{y} = Y, \qquad m\ddot{z} = Z, \tag{21.3}$$

unde X, Y și Z sînt proiecțiile forței $\bar{F}$ pe axele triedrului fix.

Pentru rezolvarea problemei directe a dinamicii se calculează integrala generală a sistemului (21.3):

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ y &= y\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ z &= z\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

care depinde de șase constante arbitrare care se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = v_{ox}, \quad \dot{y} = v_{oy}, \quad \dot{z} = v_{oz} \tag{21.5}$$

x_0, y_0, z_0 fiind coordonatele punctului și $\bar{v}_0 = v_{ox}\,\bar{i} + v_{oy}\,\bar{j} + v_{oz}\,\bar{k}$ — viteza lui în momentul inițial $t = 0$. Relațiile (21.5) trebuie să verifice ecuațiile (21.4), precum și ecuațiile care se obțin prin derivarea ecuațiilor (21.4) în raport cu timpul, adică:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) & v_{ox} &= \dot{x}\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ y_0 &= y\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) & v_{oy} &= \dot{y}\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ z_0 &= z\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) & v_{oz} &= \dot{z}\,(0; C_1, C_2, \ldots, C_6) \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

Din rezolvarea sistemului (21.6) rezultă constantele de integrare $C_1, C_2, \ldots, C_6$ care se înlocuiesc în ecuațiile (21.4) obținîndu-se ecuațiile de mișcare ale punctului $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (21.2) se poate proiecta pe axele triedrului lui Frenet obținîndu-se sistemul de ecuații diferențiale:

$$m\ddot{s} = F_\tau, \qquad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu, \quad O = F_\beta, \tag{21.7}$$

unde F_τ, F_ν și F_β sînt proiecțiile forței $\bar{F}$ pe tangenta, normala principală și binormala la traiectorie.

Proiectînd ecuația (21.2) pe direcția razei polare Or, a normalei On la raza polară din planul xOy și pe axa Oz (coordonate cilindrice, v. fig. 21, *a*) rezultă:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r; \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_n; \quad m\ddot{z} = F_z. \tag{21.8}$$

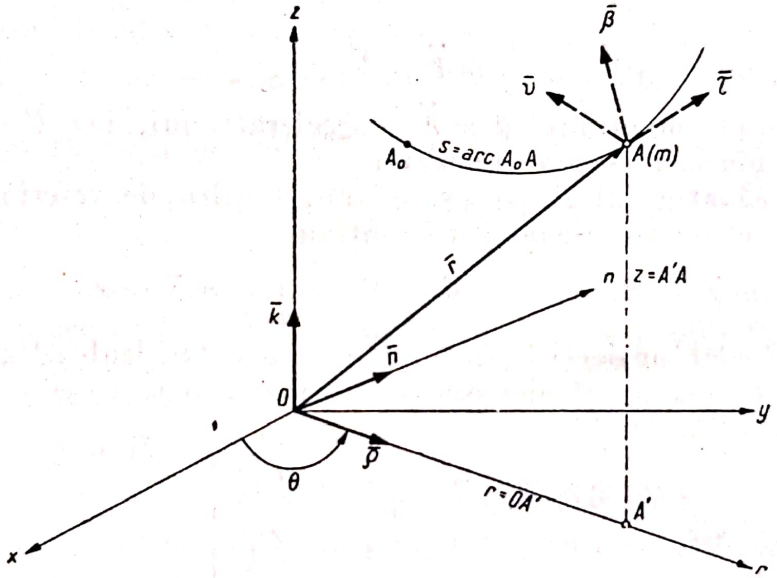


Fig. 21,*a*

Dacă rezultanta forțelor $\bar{F}$ și viteza inițială $\bar{v}_0$ a punctului se găsesc pe o aceeași dreaptă fixă sau pe un același plan fix, atunci mișcarea se face pe acea dreaptă sau pe acel plan (v. problema 21.1).

B. PROBLEME REZOLVATE

21.1. Să se arate că dacă rezultanta forțelor $\bar{F}$ și viteza inițială $\bar{v}_0$ a punctului material se găsesc în același plan fix sau pe aceeași dreaptă fixă, mișcarea se face în acel plan, respectiv pe acea dreaptă.

Rezolvare. Fără a particulariza problema putem considera planul fix determinat de v_0 și direcția lui F, și trecînd prin poziția inițială O drept plan xOy, deci:

$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j}; \qquad Z = 0;$$

$$\bar{v}_0 = v_{ox}\,\bar{i} + v_{oy}\,\bar{j}; \qquad v_{oz} = 0.$$

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) pe axa Oz rezultă:

$$m\ddot{z} = 0,$$

de unde, prin integrare, rezultă:

$$\dot{z} = C_1; \qquad z = C_1 t + C_2. \tag{1}$$

Punînd condițiile inițiale (21.5):

$$t = 0, \quad x = y = z = 0, \quad \dot{x} = v_{0x}, \quad \dot{y} = v_{0y}, \quad \dot{z} = 0,$$

în ecuațiile (1), rezultă:

$$0 = C_1; \qquad 0 = C_2,$$

deci:

$$z = 0,$$

adică mișcarea are loc în planul xOy.

În cazul cînd $\bar{F}$ și $\bar{v}_0$ sînt coliniare alegem drept axă Ox suportul lor comun, deci:

$$\bar{F} = X\bar{i} \qquad Y = Z = 0$$

$$\bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} \qquad v_{0y} = v_{0z} = 0.$$

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe axele Oy și Oz este:

$$m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} = 0,$$

de unde prin integrare rezultă:

$$\dot{y} = C_1 \qquad y = C_1 t + C_2$$

$$\dot{z} = C_3 \qquad z = C_3 t + C_4. \tag{2}$$

În momentul inițial, punctul găsindu-se pe axa Ox, condițiile inițiale (21.5) sînt:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = z = 0, \quad \dot{x} = v_{0x}, \quad \dot{y} = \dot{z} = 0$$

și înlocuindu-le în ecuațiile (2) determinăm constantele:

$$0 = C_1 \qquad 0 = C_2$$

$$0 = C_3 \qquad 0 = C_4,$$

deci tot timpul mișcării

$$y = 0, \qquad z = 0,$$

adică punctul se găsește pe axa Ox.

21.2. Un ascensor de greutate G are o mișcare uniform variată cu accelerația a. Să se determine tensiunea T din cablul ascensorului. Aplicație numerică: $G = 500$ kgf, ascensorul coboară și este frînat cu accelerația $a = 4{,}9$ m/s^2.

Rezolvare. Presupunem accelerația $\bar{a}$ dirijată în sus (ascensorul pornește și are o mișcare uniform accelerată în sus, sau coboară și este frînat). Forțele care acționează asupra ascensorului sînt greutatea $\bar{G}$ și tensiunea $\bar{T}$. Aplicînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.1):

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{T}$$

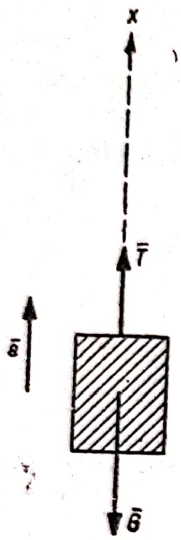


Fig. 21.2

, și proiectînd-o pe axa Ox (fig. 21.2) rezultă:

$$\frac{G}{g}a = -G + T$$

$\left(m = \frac{G}{g}\right)$, deci:

$$T = G\left(1 + \frac{a}{g}\right). \qquad (1)$$

Dacă accelerația $\bar{a}$ este dirijată în jos (la pornirea ascensorului în jos sau la frînarea lui cînd urcă) rezultă:

$$T = G\left(1 - \frac{a}{g}\right). \qquad (2)$$

Făcînd înlocuirile numerice în formula (1), cum $g \approx 9{,}8$ m/s^2, rezultă:

$$T = 500\left(1 + \frac{4{,}9}{9{,}8}\right) = 750 \text{ kgf}.$$

21.3. Un punct greu de masă m cade în aer pe verticală după legea:

$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right), \qquad (1)$$

unde g este accelerația gravitației, iar k — o constantă (axa x este îndreptată pe verticală în jos). Să se determine expresia forței de rezistență a aerului, $\bar{R}$.

Rezolvare. Asupra punctului A acționează greutatea sa $m\bar{g}$ și rezistența aerului $\bar{R}$ (fig. 21.3). Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) pe axa Ox rezultă:

$$m\ddot{x} = mg - R,$$

de unde:

$$R = m(g - \ddot{x}). \qquad (2)$$

Fig. 21.3

Prin derivarea ecuației (1) în raport cu timpul se obține viteza:

$$v = \dot{x} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \qquad (3)$$

și accelerația punctului:

$$x = ge^{-kt}. \qquad (4)$$

Înlocuind în ecuația (2) și ținînd seamă de (3) rezultă:

$$R = mg(1 - e^{-kt}) = mkv.$$

Condițiile inițiale ale problemei sînt $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$ [s-a înlocuit valoarea $t = 0$ în ecuațiile (1) și (3)]; deci legea de mișcare dată de ecuația (1) din enunț reprezintă mișcarea unui punct greu care este lăsat să cadă liber, rezistența aerului fiind proporțională cu viteza punctului.

21.4. Un punct de masă m se mișcă sub acțiunea unei forțe $\bar{F}$ constante. Știind că viteza inițială $\bar{v}_0$ a punctului este coliniară cu $\bar{F}$ să se determine timpul și drumul parcurs de punct în momentul cînd are viteza v. Aplicație numerică: greutatea punctului $G = 4$ kgf, $F = 10$ N, $v_0 = 3$ m/s, $v = 7$ m/s.

Rezolvare. Pe baza proprietății demonstrate în problema (21.1) mișcarea este rectilinie. Alegem drept axă Ox, suportul comun al lui $\bar{F}$, și $\bar{v}_0$, originea O în poziția inițială a punctului, deci condițiile inițiale (21.5) ale problemei vor fi:

$$t = 0, \qquad x = 0, \qquad \dot{x} = v_0. \tag{1}$$

Proiectînd ecuația fundamentală (21.3) pe axa Ox rezultă:

$$m\ddot{x} = F, \tag{2}$$

de unde:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}, \quad v = \dot{x} = \frac{F}{m}t + C_1, \quad x = \frac{F}{2m}t^2 + C_1 t + C_2. \tag{3}$$

Relațiile (1) verificînd ecuațiile (3) dau:

$$v_0 = C_1, \qquad O = C_2,$$

deci:

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t, \tag{4}$$

$$v = \dot{x} = \frac{F}{m}t + v_0, \tag{5}$$

mișcarea punctului fiind uniform variată (uniform accelerată dacă F și v_0 au același sens și uniform întîrziată dacă sensurile sînt opuse).

Timpul căutat rezultă din ecuația (5):

$$t = \frac{m}{F}(v - v_0), \tag{6}$$

iar drumul parcurs x se obține înlocuind (6) în (4):

$$x = \frac{m}{2F}(v - v_0)^2 + \frac{m}{F}v_0\,(v - v_0) = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2F}, \tag{7}$$

rezultat care se putea obține direct prin aplicarea teoremei energiei cinetice și a lucrului mecanic (24.14).

În cazul aplicației numerice, făcînd înlocuirile în sistemul MKS, se obține:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{4 \times 9{,}81}{9{,}81}\frac{N}{m/s^2} = 4 \text{ kg}$$

$$t = \frac{4}{10}(7 - 3) = 1{,}6 \text{ s} \qquad x = \frac{4\,(7^2 - 3^2)}{2 \times 10} = 8 \text{ m}.$$

21.5. Un punct fix O atrage punctul A de masă m cu o forță $F = kx^n$, unde $x = OA$, iar k — un coeficient constant. În momentul inițial $OA = x_0$,

Scanned with OKEN Scanner

iar punctul are viteza nulă. Să se studieze mișcarea punctului de la A_0 pînă la O determinîndu-se timpul și viteza cu care ajunge mobilul în punctul O. Cazuri particulare: $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, $n = -3$.

Rezolvare. Alegînd drept axă Ox, dreapta OA_0 pe care are loc mișcarea (fig. 21.5, *a*) și proiectînd pe ea ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) rezultă:

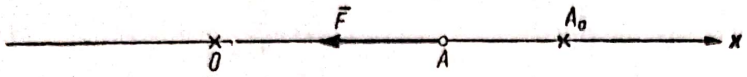


Fig. 21.5,*a*

$$m\ddot{x} = -F = -kx^n. \qquad (1)$$

Însă:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

și înlocuind în ecuația (1) rezultă ecuația diferențială de ordinul I:

$$mv\frac{dv}{dx} = -kx^n$$

avînd variabilele v și x separabile, adică:

$$\frac{m}{k}v\,dv = -x^n\,dx. \qquad (2)$$

Integrînd ecuația (2) rezultă:

$$\frac{mv^2}{2k} = -\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

constanta de integrare determinîndu-se din condițiile inițiale:

$$t = 0, \qquad x = x_0, \qquad v = 0, \qquad (3)$$

deci:

$$C = \frac{x_0^{n+1}}{n+1},$$

și:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{(n+1)\,m}\left(x_0^{n+1} - x^{n+1}\right)} \quad (n \neq -1) \qquad (4)$$

semnul minus fiind luat deoarece punctul se mișcă de la A_0 spre O.

Pentru a găsi legea de mișcare $x = x(t)$ se separă variabilele x și t în ecuația diferențială (4):

$$dt = -\sqrt{\frac{(n+1)\,m}{2k}}\frac{1}{\sqrt{x_0^{n+1} - x^{n+1}}}\,dx$$

și prin integrare, ținînd seamă și de condițiile inițiale (3), rezultă:

$$t = -\sqrt{\frac{(n+1)\,m}{2k}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_0^{n+1} - x^{n+1}}} \quad (n \neq -1). \qquad (5)$$

Pentru a exprima timpul t prin funcții elementare ar trebui ca $|n+1|$ să fie un număr întreg cel mult egal cu 2, adică $n = +1$, $n = 0$, $n = -2$, $n = -3$.

Viteza și timpul după care ajunge mobilul în punctul O $(x = 0)$ sînt:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2\,k\,x_0^{n+1}}{(n+1)\,m}} \quad (n > -1)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{(n+1)\,m}{2\,k}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^{n+1} - x^{n+1}}} \quad (n \neq -1) \tag{6}$$

$$v_1 = \lim_{x \to 0} v = \infty \qquad (n < -1).$$

Pentru $n = -1$ ecuația (2) devine:

$$\frac{m}{k}\, v\, dv = -\frac{dx}{x},$$

deci:

$$\frac{m\,v^2}{2\,k} = -\ln x + C = \ln \frac{x_0}{x},$$

deoarece din condițiile inițiale (3) rezultă $C = \ln x_0$:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\,k}{m} \ln \frac{x_0}{x}} \tag{4'}$$

și prin separarea variabilelor x și t și prin integrare:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2\,k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{x_0}{x}}},$$

integrală care nu poate fi exprimată prin funcții elementare. Viteza și timpul după care mobilul ajunge în punctul O sînt:

$$v_1 = \lim_{x \to 0} v = \infty; \quad t_1 = \sqrt{\frac{m}{2\,k}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{x_0}{x}}} = x_0 \sqrt{\frac{\pi\, m}{2\,k}}, \tag{6'}$$

integrala definită putîndu-se efectua prin metoda reziduurilor.

În celelalte cazuri particulare, pentru $n = 1$:

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,(x_0 - x); \quad t = -\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \frac{x}{x_0};$$

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,$$

rezultat care se putea obține și direct prin integrarea ecuației diferențiale liniare cu coeficienți constanți (1)

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_0 \quad ; \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Şi cazul $n = 0$ se studiază mai simplu direct. Ecuaţia diferenţială (1) în acest caz devine $m\ddot{x} = -k$, de unde rezultă:

$$x = -\frac{k}{2m}t^2 + x_0; \qquad v = \frac{-k}{2m}t = -\sqrt{\frac{k}{2m}(x_0 - x)}$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{k x_0}{2m}}; \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2m x_0}{k}}.$$

Pentru $n = -2$:

$$v = -\sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)} \quad t = -\sqrt{\frac{m x_0}{2k}}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{x}{x_0 - x}}\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{m x_0}{2k}}\left[\sqrt{x(x_0 - x)} + \frac{x_0}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2x - x_0}{x_0}\right)\right] \qquad (7)$$

$$v_1 = \infty; \qquad t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m x_0^3}{2k}}.$$

Pentru $n = -3$:

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right)} \quad t = -\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x}\frac{x_0\,x\,dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \left|\sqrt{\frac{m}{k}}\,x_0\right|\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

$$v_1 = \infty; \qquad t_1 = \sqrt{\frac{m}{k}}\,x_0^2.$$

Nu putem studia mişcarea punctului dincolo de punctul O pentru cazurile în care $v_1 = \infty$ $(n \leqslant -1)$, deoarece în natură nu sînt posibile mişcări cu viteze care tind spre infinit. Pentru viteze foarte mari legile mecanicii newtoniene nu mai sînt valabile, un studiu corect al problemei fiind posibil numai în cadrul teoriei relativităţii. Pentru $n > -1$ expresia forţei atractive care acţionează asupra punctului va fi:

$$F = k\,|x|^n = k\,(-x)^n$$

(v. fig. 21.5, *b*), deci va trebui integrată ecuaţia diferenţială:

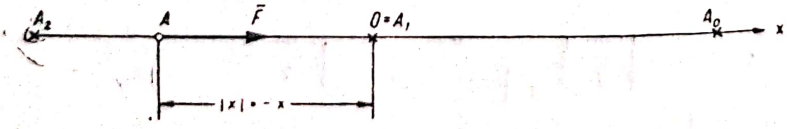


Fig.21.5,*b*

$$m\ddot{x} = k\,(-x)^n. \qquad (8)$$

Pentru n întreg impar ecuaţia (8) este identică ca formă cu ecuaţia (1) care a mai fost integrată, deci relaţiile stabilite pentru $x > 0$ sînt valabile şi pentru $x < 0$. Astfel viteza (4) se va anula pentru $x = -x_0$ în punctul A_2 simetricul lui A_0 faţă de O, iar timpul în care ajunge mobilul în A_2, $t_2 = 2t_1$. Din A_2 punctul se întoarce spre O mişcarea avînd un caracter oscilatoriu cu perioada $T = 4\,t_1$.

Lăsăm pe seama cititorului să stabilească aceste rezultate şi pentru cazul general $n > -1$.

21.6. Un corp este lansat de la suprafața pământului cu viteza inițială v_0 pe verticală în sus. Ținînd seamă de forța de atracție newtoniană a pământului și neglijînd rezistența aerului, să se studieze mișcarea corpului.

Rezolvare. Alegînd drept axă Ox verticala punctului A_0 de lansare și drept origine centrul O al pământului, forța de atracție universală (newtoniană) va fi de forma:

$$\bar{F} = -f\frac{m\,M}{x^2}\bar{i},$$

unde f este constanta de atracție universală, m — masa corpului, A, M — masa pământului, iar x — distanța de la centrul pământului la corpul A. Cum la suprafața pământului $x = R$, iar forța este egală cu greutatea punctului $|F| = mg$ rezultă:

$$\frac{f\,m\,M}{R^2} = mg, \qquad fM = gR^2,$$

deci:

$$\bar{F} = -\frac{m\,g\,R^2}{x^2}\bar{i}. \tag{1}$$

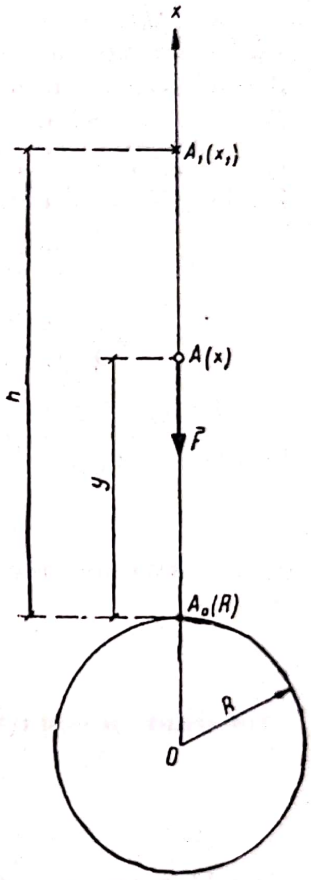


Fig. 21.6

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) pe axa Ox se obține:

$$m\ddot{x} = -\frac{m\,g\,R^2}{x^2} \tag{2}$$

și cum:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

din ecuația (2) rezultă:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g\,R^2}{x^2},$$

ecuație diferențială de ordinul I cu variabilele v și x separabile, a cărei integrală generală este:

$$v^2 = \frac{2\,g\,R^2}{x} + C, \tag{3}$$

constanta C determinîndu-se prin condițiile inițiale. În mișcarea ascendentă:

$$t = 0, \qquad x = R, \qquad v = v_0, \tag{4}$$

și înlocuind în (3):

$$v_0^2 = \frac{2\,g\,R^2}{R} + C, \qquad C = v_0^2 - 2gR,$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,R\left(\frac{R}{x} - 1\right)} \tag{5}$$

(se alege semnul plus în fața radicalului, deoarece mișcarea este ascendentă).

Ecuația diferențială (5) are variabilele x și t separabile:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right)}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{(v_0^2 - 2gR)\,x^2 + 2gR^2\,x}}. \tag{6}$$

sînt de examinat două cazuri:

a) $v_0^2 > 2gR$. În acest caz, din expresia (5) a vitezei rezultă că pentru nici o valoare a abscisei $x > 0$ viteza corpului nu se anulează, deci corpul se depărtează de pămînt devenind o rachetă cosmică. Făcînd înlocuirile numerice: $g = 9{,}81$ m/s², $R = 6\,370\,000$ m rezultă că acest caz are loc pentru $v_0 > \sqrt{2gR} \approx 11{,}18$ km/s. Integrînd ecuația (6) și ținînd seamă de condițiile inițiale (4) se obține:

$$t = \frac{1}{v_0^2 - 2gR}\left[\sqrt{(v_0^2 - 2gR)\,x^2 + 2gR^2\,x} - Rv_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{gR^2}{\sqrt{v_0^2 - g^2Rg}}\left(\operatorname{arg\,ch}\frac{(v_0^2 - 2gR)\,x + gR^2}{gR^2} - \operatorname{arg\,ch}\frac{v_0^2 - gR}{gR}\right)\right].$$

b) $v_0^2 < 2gR \approx 11{,}18$ km/s. În acest caz, viteza (5) se anulează în punctul A_1 avînd abscisa:

$$x = x_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}, \tag{7}$$

deci înălțimea maximă atinsă de mobil este:

$$h = x_1 - R = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}. \tag{8}$$

Înlocuind în ecuația (6) pe $2gR - v_0^2 = \frac{2gR^2}{x_1}$, ea se poate pune sub forma:

$$dt = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{x_1}{2g}}\frac{x\,dx}{\sqrt{xx_1 - x^2}}$$

și prin integrare, ținînd seamă și de condițiile inițiale (4), rezultă:

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{x_1}{2g}}\left[\sqrt{R(x_1 - R)} - \sqrt{x(x - x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_1}{2}\left(\arcsin\frac{2x - x_1}{x_1} - \arcsin\frac{2R - x_1}{x_1}\right)\right]. \tag{9}$$

Timpul t_1 în care corpul ajunge în punctul A_1 de înălțime maximă se obține făcînd $x = x_1$ în relația (9):

$$t_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{x_1}{2g}}\left[\sqrt{R(x_1 - R)} + \frac{x_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2R - x_1}{x_1}\right)\right]. \tag{10}$$

Pentru mișcarea descendentă a punctului, condițiile inițiale vor fi cele din punctul A_1, $x = x_1$, $v = 0$. Forța de atracție fiind invers proporțională cu pătratul distanței x la centrul pămîntului, sîntem tocmai în condițiile problemei 21.5, în care:

$$k = mgR^2, \qquad n = -2, \qquad x_0 = x_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2},$$

deci conform relațiilor (7) din problema (21.5) rezultă:

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gR\left(\frac{R}{x} - 1\right)} \tag{5'}$$

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{x_1}{2g}}\left[\sqrt{x(x_1 - x)} + \frac{x_1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2x - x_1}{x_1}\right)\right]. \tag{9'}$$

Timpul de coborîre t_2 se obține făcînd în relația (9') $x = R$ și este egal cu timpul de urcare t_1 dat de relația (10):

$$t_2 = t_1.$$

În cazul cînd viteza de lansare este mică, $v_0^2 \ll 2gR$ din formula (8), înălțimea la care se ridică corpul este:

$$h \approx \frac{v^2}{2g}.$$

Viteza

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2gR\left(\frac{R}{R+y} - 1\right)} = \pm\sqrt{v_0^2 - \frac{2gR}{R+y}y} \approx \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy},$$

unde $x = R + y$, y fiind înălțimea la care se găsește punctul față de suprafața pămîntului (v. fig. 21.6), deoarece $y \ll R$, $\frac{R}{R+y} \approx 1$. Aceste relații se pot stabili și direct presupunînd forța de atracție a pămîntului constantă $F \approx mg$.

21.7. Să se studieze mișcarea unei bărci știind că vîslașul nu vîslește. Masa bărcii este m, viteza inițială a ei este v_0, iar rezistența apei $R = hv^n$, unde h este un coeficient constant, iar $n \geqslant 0$. Să se determine timpul și drumul parcurs pînă ce viteza bărcii se înjumătățește și timpul și drumul parcurs pînă la oprire. Cazuri particulare: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$.

Rezolvare. Forțele care acționează asupra bărcii sînt greutatea $\bar{G} = m\bar{g}$, rezultanta presiunilor exercitate pe suprafața de contact cu apa, $\bar{N}$ dirijată

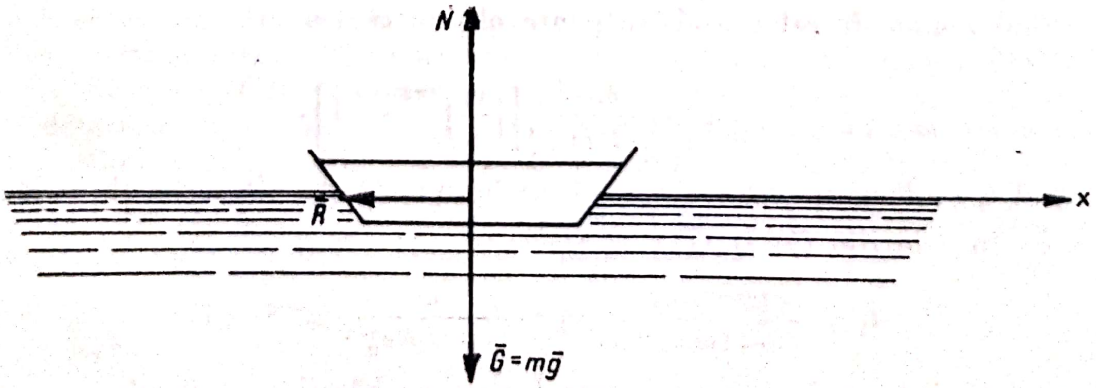


Fig. 21.7

pe verticală în sus și egală cu volumul de apă dezlocuit și rezistența $\bar{R}$ a apei (fig. 21.7). Ecuația fundamentală a dinamicii (21.1) este:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{R}$$

și proiectînd-o pe axa Ox se obține:

$$m\frac{dv}{dt} = -R = -hv^n, \tag{1}$$

deoarece $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$. Separînd variabilele v și t:

$$-\frac{dv}{v^n} = \frac{h}{m}\,dt \tag{2}$$

și integrînd ecuația (2) pentru $n \neq 1$ rezultă:

$$\frac{1}{(n-1)v^{n-1}} = \frac{h}{m}\,t + C.$$

Din condițiile inițiale:

$$t = 0, \qquad x = 0, \qquad v = v_0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{(n-1)v_0^{n-1}} = C,$$

deci:

$$t = \frac{m}{(n-1)\,h}\left(\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{v_0^{n-1}}\right) \tag{4}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\left[(n-1)\frac{h}{m}v_0^{n-1}\,t + 1\right]^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{5}$$

Separînd variabilele x și t și integrînd ecuația (5) pentru $n \neq 1$, $n \neq 2$ și ținînd seamă de condițiile inițiale (3) se obține legea de mișcare $x = x(t)$:

$$x = \frac{m}{(n-2)h\,v_0^{-2}}\left[\left[(n-1)\,\frac{h}{m}v_0^{n-1}\,t + 1\right]^{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right] = 0 \tag{6}$$

și ținînd seamă de relația (4) se poate obține și drumul parcurs ca funcție de viteza $x = x(v)$

$$x = \frac{m}{(n-2)\,hv_0^{n-2}}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-2} - 1\right]. \tag{7}$$

Timpul t_1 și drumul parcurs x_1 pînă se înjumătățește viteza se obțin făcînd $v = \frac{v_0}{2}$ în relațiile (4) și (7):

$$t_1 = \frac{m\,(2^{n-1}-1)}{(n-1)h\,v_0^{n-1}}; \quad x_1 = \frac{m}{(n-2)h\,v_0^{n-2}}\,(2^{n-2}-1). \tag{8}$$

Timpul t_2 și drumul parcurs x_2 pînă la oprirea bărcii ($v = 0$) sînt:

$$t_2 = \frac{m\,v_0^{1-n}}{(1-n)\,h}\,(n<1); \quad x_2 = \frac{m\,v_0^{2-n}}{(2-n)\,h}\,(n<2;\ n\neq 1) \tag{9}$$

$$t_2 = \lim_{v\to 0} t = \infty\ (n>1)\ ;\ x_2 = \lim_{v\to 0} x = \infty\ (n>2).$$

Au rămas de examinat cazurile particulare. Pentru $n = 0$, $R = h$ rezistența este constantă (ca în cazul frecării uscate, coulombiene). Relațiile (5)—(9) devin:

$$v = -\frac{h}{m}t + v_0; \quad x = -\frac{h}{2m}t^2 + v_0 t = \frac{m}{2h}[v_0^2 - v^2]$$

$$t_1 = \frac{m v_0}{2h}; \quad x_1 = \frac{3}{m}\frac{m v_0}{h}; \quad t_2 = \frac{m v_0}{h}; \quad x_2 = \frac{m v_0}{2h}.$$

Ele se puteau obține mai simplu prin integrarea directă a ecuației (1).

Pentru $n = 1$ (rezistența proporțională cu viteza) din ecuația (2) se obține prin integrare și ținînd seamă de condițiile inițiale (3):

$$t = \frac{m}{h} ln \frac{v_0}{v}; \quad v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{h}{m}t}; \quad x = \frac{m}{h} v_0 \left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) = \frac{m}{h}(v_0 - v)$$

$$t_1 = \frac{m}{h} ln\, 2; \quad x_1 = \frac{m v_0}{2}$$

$$t_2 = \lim_{v \to 0} t = \infty; \quad x_2 = \frac{m v_0}{h}. \tag{10}$$

Pentru $n = 2$ (rezistență proporțională cu pătratul vitezei) făcînd $n = 2$ în ecuațiile (4) și (5) și integrînd ecuația (5) rezultă:

$$t = \frac{m}{h}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right]; \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\frac{h}{m} v_0 t + 1}; \quad x = \frac{m}{h} ln \left[\frac{h v_0 t}{m} + 1\right] = \frac{m}{h} ln \frac{v_0}{v}$$

$$t_1 = \frac{m}{h v_0}; \quad x_1 = \frac{m}{h} ln\, 2; \quad t_2 = \lim_{v \to 0} t = \infty; \quad x_2 = \lim_{v \to 0} x = \infty. \tag{11}$$

Din relațiile (9), (10) și (11) rezultă că timpul de oprire t_1 este finit numai pentru $n < 1$, drumul parcurs pînă la oprire fiind finit numai dacă $n < 2$.

21.8. O minge este aruncată cu viteza v_0 sub un unghi α față de orizontală. Să se studieze mișcarea mingii neglijînd efectul rezistenței aerului. Se vor determina ecuațiile parametrice de mișcare, traiectoria, înălțimea maximă, bătaia $= OB$, viteza v_B și unghiul de cădere β. Aplicație numerică: Să se determine α cunoscînd $v_0 = 20$ m/s, $OB = 20$ m, mingea trece peste o plasă avînd înălțimea $DE = 3$ m, $OD = DB$ (v. fig. 21.8, *b*), $g \approx 10$ m/s^2.

Rezolvare. Asupra punctului A acționează numai greutatea sa $\bar{G} = m\bar{g}$, deci ecuația fundamentală a dinamicii (21.2) devine:

$$m\ddot{\bar{r}} = m\bar{g}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{g}$$

și prin integrare:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{g} t + \bar{C}_1 \tag{1}$$

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{g} t^2 + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile inițiale ale problemei scrise sub formă vectorială sînt:

$$t = 0 \begin{cases} \bar{r} = 0 \\ \dot{\bar{r}} = \bar{v}_0 \end{cases} \tag{3}$$

deoarece nu se particularizează problema alegînd originea sistemului de refe-

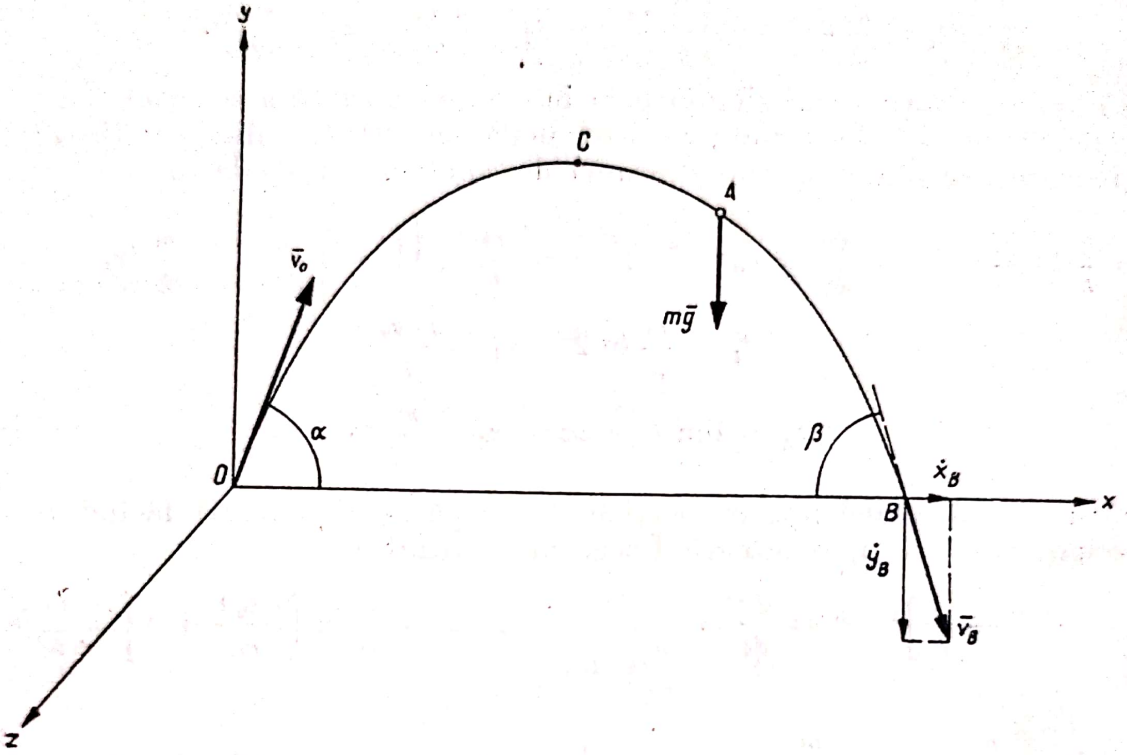


Fig. 21.8,*a*

rință în punctul O de lansare al mingii. Vom alege axa Oy, verticala ascendentă a punctului O, planul vertical determinat de Oy și $\bar{v}_0$ fiind ales drept plan xOy (fig. 21.8, *a*). Înlocuind (3) în (1) și (2) se obține:

$$O = \bar{C}_2; \quad \bar{v}_0 = \bar{C}_1,$$

deci legea de mișcare a mingii este:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{g}\,t^2 + \bar{v}_0\,t \tag{4}$$

$$\bar{v} = g\,t + \bar{v}_0. \tag{5}$$

Proiectînd ecuația vectorială (4) pe axele sistemului de referință ales se obțin ecuațiile parametrice ale mișcării:

$$x = v_0\,t\cos\alpha; \quad y = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t\sin\alpha; \quad z = 0. \tag{4'}$$

Proiecțiile vitezei (5) pe aceleași axe sînt:

$$\dot{x} = v_0\cos\alpha; \quad \dot{y} = -g\,t + v_0\sin\alpha; \quad \dot{z} = 0. \tag{5'}$$

Din ecuațiile (4') rezultă că mișcarea are loc în planul xOy (planul vertical

care conține viteza inițială $\bar{v}_0$), iar ecuația carteziană a traiectoriei se obține eliminînd timpul t din ecuațiile (4′):

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha, \qquad (6)$$

traiectoria fiind o parabolă cu axa verticală și concavitatea în jos.

În punctul C de înălțime maximă viteza este paralelă cu Ox, deci $\dot{y} = 0$, și punînd această condiție din ecuațiile (5′) și (4′) rezultă:

$$t_C = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}; \quad x_C = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}; \quad y_{\max} = y_C = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \text{ (înălțimea maximă)} \qquad (7)$$

pentru aceeași viteză inițială v_0 și diferite unghiuri de lansare α $y_{C\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ pentru $\alpha = 90°$.

Mingea cade pe sol în punctul B, $y_B = 0$ și punînd această condiție în ecuațiile (4′) rezultă:

$$t_B = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}; \quad OB = x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ (bătaia)} \qquad (8)$$

pentru aceeași viteză inițială v_0 și diferite unghiuri de lansare bătaia fiind maximă pentru $\alpha = 45°$

$$x_{B\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Timpul de urcare este egal cu cel de cădere $t_B = 2\, t_C$. Componentele vitezei $\bar{v}_B$ se obțin din ecuațiile (5′) pentru $t = t_B$:

$$\dot{x}_B = v_0 \cos \alpha;$$

$$\dot{y}_B = -v_0 \sin \alpha,$$

deci $v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = v_0$, iar $\operatorname{tg} \beta = \left|\frac{\dot{y}_B}{\dot{x}_B}\right| = \operatorname{tg} \alpha$, viteza și unghiul de cădere fiind egale cu viteza și unghiul de lansare (fig. 21.8, *a*).

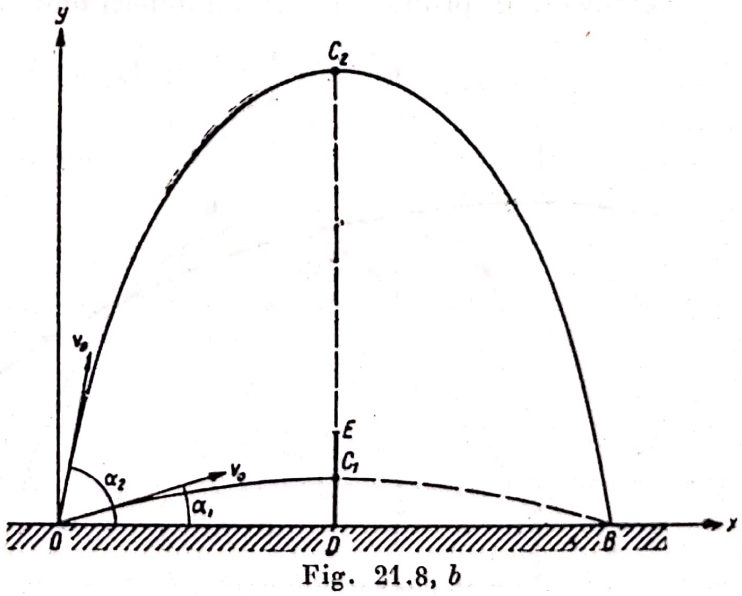


Fig. 21.8, *b*

Pentru aplicația numerică, unghiul α trebuie determinat cunoscînd bătaia $OB = 20$ m și viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Din relația (8) rezultă:

$$\sin 2\alpha = \frac{OB \cdot g}{v_0^2} = \frac{20 \times 10}{20^2} = \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentrn α se caută valori cuprinse între 0 şi 90°, deci $0 \leqslant 2\alpha \leqslant 180°$. Ecuaţia (9) admite două soluţii — unghiuri suplimentare $2\alpha_1 = 30°$, $2\alpha_2 = 150°$, deci pentru α se obţin soluţiile:

$$\alpha_1 = 15°; \quad \alpha_2 = 75°,$$

unghiuri complementare (fig. 21.8, *b*).

Nu ambele soluţii răspund problemei noastre, deoarece pentru traiectoria razantă ($\alpha_1 = 15°$) înălţimea maximă (7) este:

$$y_C{}^1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_1}{2g} = \frac{v_0^2 (1 - \cos 2\alpha_1)}{4g} = \frac{20^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4 \times 10} = 1{,}34 \text{ m},$$

deci mingea se opreşte în plasă.

Pentru traiectoria curbă ($\alpha_2 = 75°$) înălţimea maximă este:

$$y_C{}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_2}{2g} = \frac{v_0^2 (1 - \cos 2\alpha)}{4g} = \frac{20^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{4 \times 10} = 18{,}66 \text{ m},$$

deci mingea trece mult peste plasa DE.

21.9. Neglijîndu-se rezistenţa aerului, să se determine domeniul punctelor care pot fi atinse de un proiectil aruncat cu viteza iniţială $\bar{v}_0$ sub un unghi variabil α.

Rezolvare. În problema 21.8 s-a determinat traiectoria (8) a proiectilului:

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

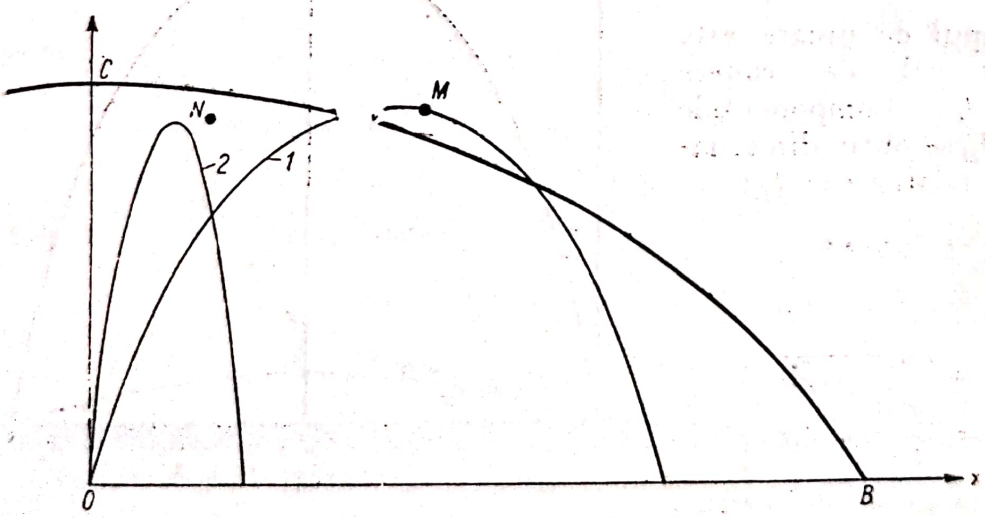


Fig. 21. 9.

Să se determine curba de siguranţă care delimitează domeniul punctelor M care pot fi atinse de domeniul punctelor N ce nu pot fi atinse.

Traiectoriile nu pot intersecta curba de siguranţă ca parabola *1* din figura 21.9, deoarece atunci ar exista puncte M care pot fi atinse în exteriorul

domeniului delimitat curbei de siguranță. Ele nu pot fi nici interioare curbei de siguranță ca parabola 2, deoarece atunci ar exista puncte N care nu pot fi atinse în interiorul domeniului punctelor care pot fi atinse. Rezultă deci că traiectoriile trebuie să fie tangente la curba de siguranță, care vor fi înfășurătoarea familiei de parabole (1). Notînd parametrul $\operatorname{tg}\alpha = \lambda$, ecuația (1) devine:

$$y = -\frac{g x^2}{v 2_0^2}(1 + \lambda^2) + x\lambda. \qquad (2)$$

Înfășurătoarea familiei de traiectorii (2) se obține eliminînd parametrul λ între ecuația (2) și ecuația care se obține prin derivarea ecuației (2) în raport cu parametrul λ:

$$O = -\frac{g x^2}{v_0^2}\lambda + x, \quad \lambda = \frac{v_0^2}{g x}$$

și introducînd pe λ în ecuația (2) se obține:

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2} + \frac{v_0^2}{2 g}. \qquad (3)$$

Curba de siguranță este deci o parabolă avînd drept axă de simetrie verticala Oy, cu concavitatea în jos. Curba de siguranță întîlnește axa Ox în punctele de bătaie maximă $x_{B\max} = \pm \frac{v_0^2}{g}$ și axa Oy în punctul C care corespunde săgeții maxime $y_{C\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ (v. problema precedentă).

Lăsăm pe seama cititorului să arate că pentru orice punct din interiorul curbei de siguranță se pot găsi două valori α_1 și α_2 ale unghiului α astfel ca traiectoria să treacă prin acel punct, iar pentru punctele de pe curba de siguranță, cele două valori sînt confundate $\alpha_1 = \alpha_2$, traiectoria și curba de siguranță fiind tangente în acel punct.

21.10. Să se determine înălțimea balconului unei case h știind că un corp lansat cu viteza v_0 sub unghiurile α_1 sau α_2 cade în același punct M de pe sol (fig. 21.10). Se va neglija rezistența aerului. Aplicație numerică:

$$\alpha_1 = 30°, \quad \alpha_2 = 45°, \quad v_0 = 18 \text{ m/s}.$$

Rezolvare. Alegînd originea O în punctul de lansare, rezultatele stabilite în problema 21.8 rămîn valabile, deci traiectoriile corespunzătoare unghiurilor de lansare α_1 și α_2 sînt:

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1) + x \operatorname{tg}\alpha_1 \qquad (1)$$

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2) + x \operatorname{tg}\alpha_2.$$

În punctul M abscisele și ordonatele fiind egale:

$$-\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1) + x \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2) + x \operatorname{tg}\alpha_2 \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţiile acestei ecuaţii fiind $x = 0$ (corespunzătoare punctului O) şi

$$x_M = \frac{2 v_0^2}{g (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)} \tag{3}$$

corespunzătoare punctului M. Substituind valoarea (3) a abscisei x în oricare

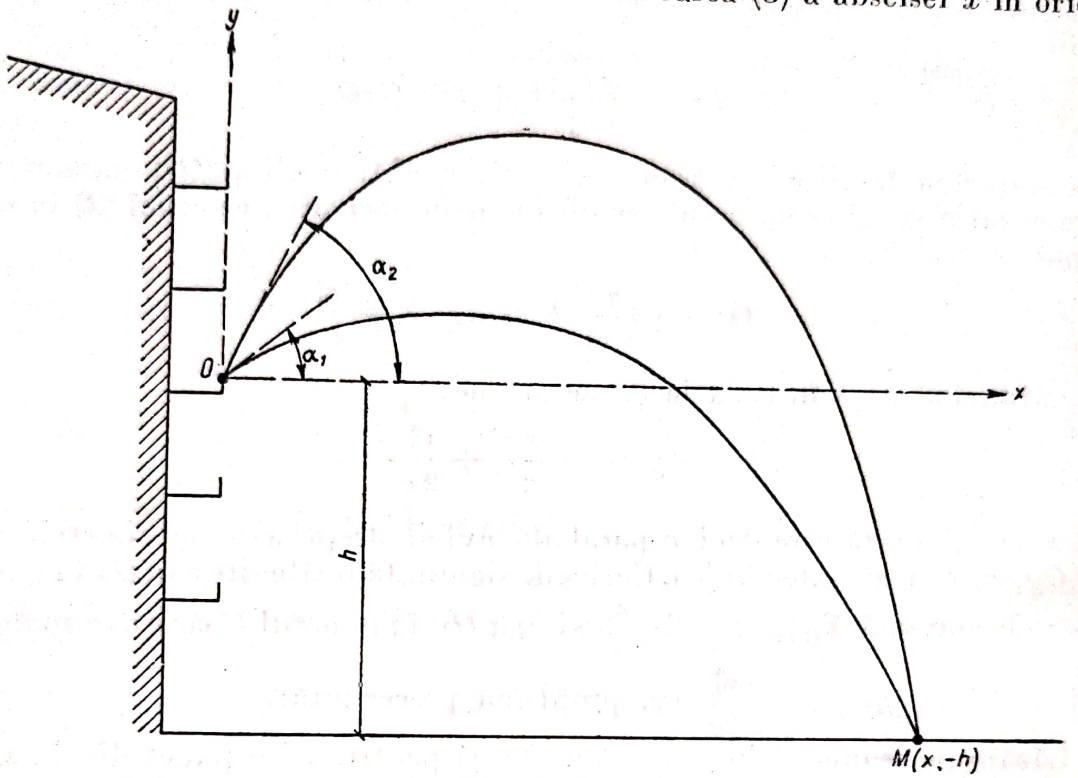


Fig. 21.10

dintre ecuaţiile (1) şi (2) găsim ordonata $y = -h$ a punctului M. Rezultă:

$$h = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)^2}.$$

Făcînd înlocuirile numerice, se obţin:

$$x_M = \frac{2 \times 18^2}{9{,}81 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)} = 41{,}89 \text{ m}; \quad h = \frac{2 \times 18^2}{9{,}81} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \times 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2} = 11{,}16 \text{ m}.$$

21.11. Cunoscînd viteza iniţială $\bar{v}_0$ cu care este lansat un punct greu 1 în vid, să se determine expresia modulului vitezei în funcţie de poziţia lui. Să se arate apoi că punctul are aceeaşi viteză ca mărime, ca şi cînd ar cădea fără viteza iniţială din punctul P al directoarei traiectoriei spre punctul A (fig. 21.11).

Rezolvare. Pentru punctul greu în vid s-au stabilit, în problema 21.8, formulele (4′) (5′) şi (6) ecuaţiile parametrice ale mişcării:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha \tag{1}$$

proiecţiile vitezei:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha; \quad \dot{y} = -g\,t + v_0 \sin\alpha \tag{2}$$

şi ecuaţia traiectoriei:

$$y = -\frac{g\,x^2}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha, \tag{3}$$

care este o parabolă.

Eliminînd timpul t între expresiile lui y şi $\dot{y}$ rezultă:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha; \quad \dot{y} = \pm\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2\,g\,y}, \tag{4}$$

deci modulul vitezei este:

$$v = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,y}. \tag{5}$$

Pentru puncte avînd aceeaşi ordonată y, modulul vitezei este acelaşi lucru stabilit în problema sus-amintită pentru punctele O şi B. Din expresia (5)

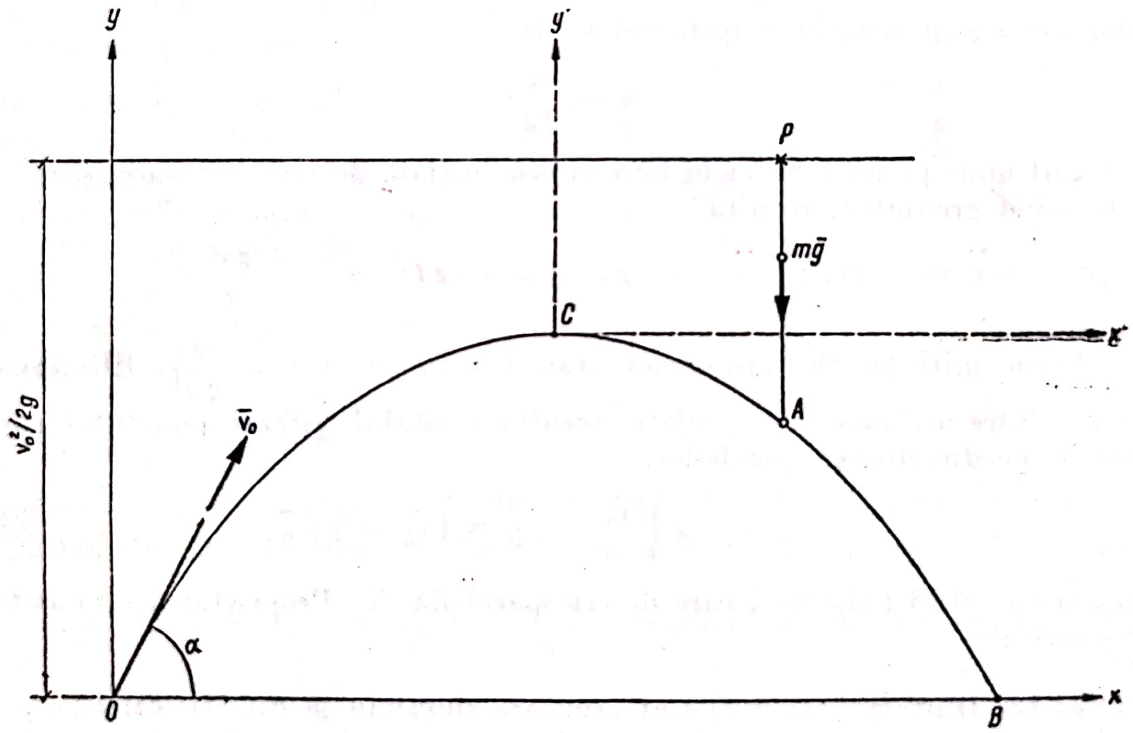


Fig. 21.11

rezultă: v real pentru $y \leqslant \frac{v_0^2}{2\,g}$, dar proiecţia vitezei pe verticală $\dot{y}$ este reală numai pentru $y \leqslant \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\,g}$. Rezultă deci că şi expresia (5) are sens doar pentru:

$$y \leqslant \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\,g} = y_{\max}. \tag{6}$$

În problema sus-amintită s-a determinat această valoare a ordonatei maxime [formula (7)].

Viteza punctului scade cu înălțimea y, ea fiind minimă pentru $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, $v_{min} = v_0 \cos \alpha$.

Să determinăm ecuația directoarei traiectoriei parabolice a punctului. Alegînd un nou sistem de axe de coordonate $Cx'y'$ cu originea în vîrful C al parabolei (fig. 21.11), se obțin:

$$x = x' + x_C = x' + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \qquad y = y' + y_C = y' + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

[v. relațiile (7) din problema 21.8] și înlocuind în ecuația (3), ecuația traiectoriei devine:

$$y' = -\frac{g x'^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{sau} \quad x'^2 = -\frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} y'$$

parabolă a cărei directoare este dreapta $y' = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}$. Revenind la vechile variabile x și y ecuația directoarei va fi:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{7}$$

În cazul unui punct care cade fără viteză inițială de pe directoare, singura forță fiind greutatea, rezultă:

$$m \ddot{y} = -mg; \quad \ddot{y} = -g; \quad \dot{y} = -gt; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

$\left(\text{condițiile inițiale ale problemei erau } t = 0, \dot{y} = 0, y = \frac{v_0^2}{2g}\right)$. Eliminînd timpul între ultimele două relații rezultă modulul vitezei punctului care cade de pe directoarea parabolei:

$$v = |\dot{y}| = g \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - 2y} = \sqrt{v_0^2 - 2gy}, \tag{8}$$

același cu cel al punctului care descrie parabola (5). Proprietatea este astfel demonstrată.

21.12. Dintr-un punct O sînt aruncate simultan în direcții diferite mai multe puncte materiale, cu viteze egale ca mărime cu v_0. Să se demonstreze că în cazul în care mișcarea se produce în vid, toate aceste puncte se află la un moment dat pe aceeași sferă.

Rezolvare. Asupra unui punct oarecare A_i acționează greutatea lui $\bar{G}_i = m_i \bar{g}$.

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.2) este:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = m_i \bar{g}.$$

Integrînd-o și punînd condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad \bar{r}_i = 0, \quad \dot{\bar{r}}_i = v_0 \bar{u}_i$$

(alegînd originea în punctul O în care se lansează punctele, $\bar{u}_i$ fiind versorul vitezei inițiale a punctului) se obține:

$$\bar{r}_i = \frac{\bar{g}\,t^2}{2} + v_0\,t\,\bar{u}_i.$$

Singurele mărimi variabile de la un punct la altul fiind $\bar{r}_i$ și $\bar{u}_i$, ecuația precedentă este ecuația vectorială a unei sfere cu centrul în punctul O' de vector de poziție $\bar{OO}' = \frac{\bar{g}\,t^2}{2}$ și având raza $v_0\,t$ (fig. 21.12).

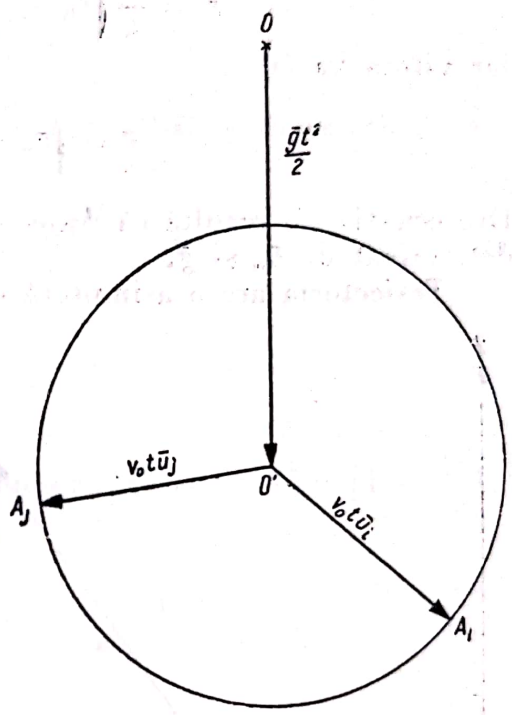


Fig. 21.12

21.13. Un punct material greu de masă m este aruncat cu viteza inițială $\bar{v}_0$ sub unghiul α față de orizontală. Rezistența aerului este proporțională cu viteza (cazul vitezelor mici) $\bar{R} = -h\bar{v}$, unde h este un coeficient constant. Să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare. Forțele care acționează asupra punctului A fiind greutatea $m\bar{g}$ și rezistența aerului $\bar{R} = -h\,\bar{v} = -h\,\dot{\bar{r}}$, scriind ecuația fundamentală a dinamicii (21.2) rezultă (fig. 21.13, *a*):

$$m\,\ddot{\bar{r}} = m\,\bar{g} - h\,\dot{\bar{r}}$$

sau:

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{h}{m}\,\dot{\bar{r}} = \bar{g}. \qquad (1)$$

Ecuația (1) este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, cu partea dreaptă o constantă. Ecuația caracteristică a ei este $\lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda = 0$ și are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{h}{m}$. Integrala generală a ecuației (1) este:

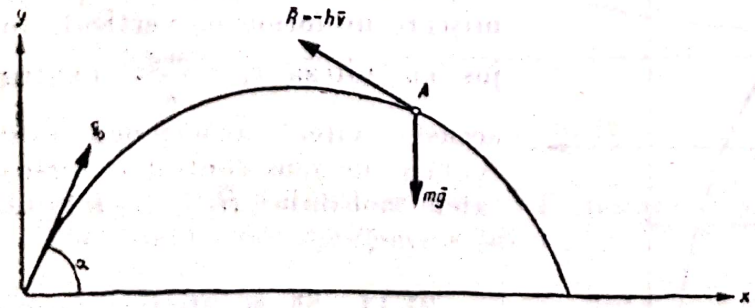


Fig. 21.13, *a*

$$\bar{r} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\,e^{-\frac{h}{m}t} + \bar{r}_0,$$

iar integrala particulară care verifică ecuația (1) este:

$$\bar{r}_0 = \frac{m\,\bar{g}}{h}\,t,$$

deci:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2\,e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\bar{g}}{h}\,t; \quad \dot{\bar{r}} = -\frac{h}{m}\,\bar{C}_2\,e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\,\bar{g}}{h}.$$

Punînd condițiile inițiale $t = 0 \begin{cases} \bar{r} = 0 \\ \bar{v} = \bar{v}_0 \end{cases}$ se determină constantele de integrare $\bar{C}_1 = -C_2 = \frac{m}{h}\left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)$ și, prin urmare, legea de mișcare va fi dată de:

$$\bar{r} = \frac{m}{h}\left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) + \frac{m\bar{g}}{h}t, \tag{2}$$

iar viteza va fi:

$$\bar{v} = \left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\bar{g}}{h}. \tag{3}$$

Din ecuația (2) rezultă că traiectoria este o curbă situată în planul vertical determinat de $\bar{v}_0$ și $\bar{g}$.

Traiectoria are o asimptotă care se determină calculînd:

$$\lim_{t\to\infty} \bar{r} = \frac{m}{h}\left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right) + \lim_{t\to\infty} \frac{m\bar{g}}{h}t. \tag{4}$$

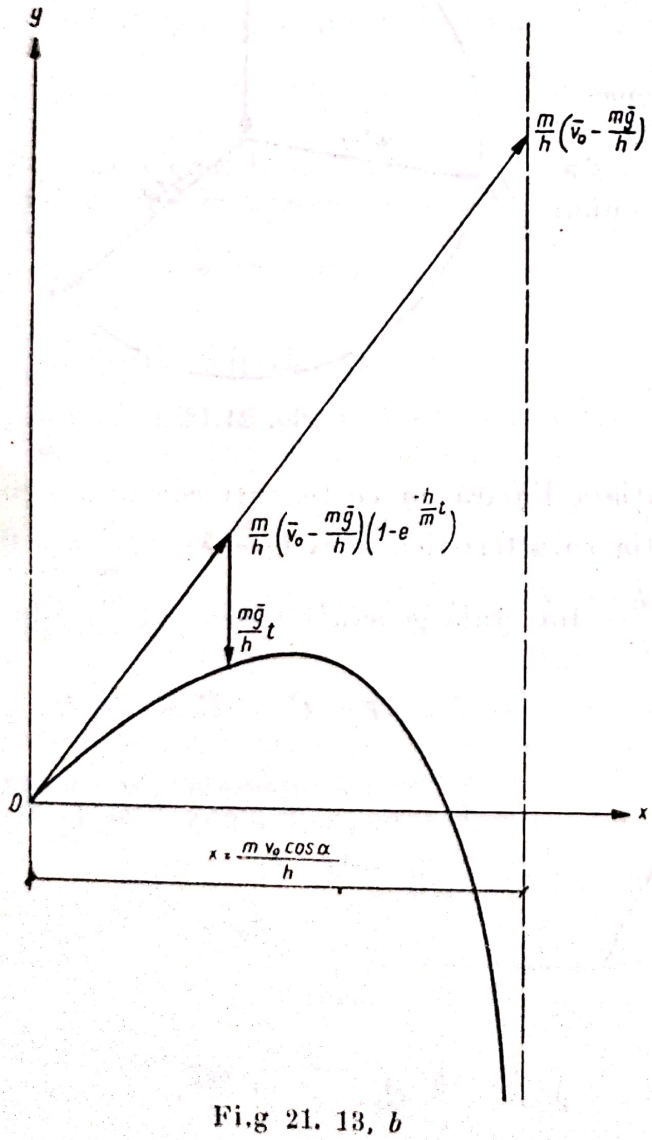


Fig. 21. 13, *b*

Asimptota (fig. 21.13, *b*) este deci paralelă cu suportul lui $\bar{g}$ (cu axa Oy), iar ecuația ei se obține proiectînd relația (4) pe axa Ox:

$$\lim_{t\to\infty} x = \frac{m v_0 \cos\alpha}{h}, \tag{5}$$

Viteza-limită va fi:

$$\bar{v}_1 = \lim_{t\to\infty} \bar{v} = \frac{m\bar{g}}{h}. \tag{6}$$

Deci independent de condițiile inițiale, mișcarea tinde spre o mișcare uniformă pe verticală în jos cu viteza $v_1 = \frac{mg}{h}$. Pentru această viteză reacțiunea este egală și de sens contrar cu greutatea mobilului $\bar{R}_1 = -h\bar{v}_1 = -m\bar{g}$.

21.14. Să se studieze mișcarea unui punct greu aruncat pe verticală, ținînd seamă de rezistența aerului proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$.

Rezolvare. În problema precedentă 21.13 [formulele (2) și (3)] s-a găsit legea de mișcare și legea vitezelor pentru o astfel de mișcare:

$$\bar{r} = \frac{m}{h}\left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) + \frac{m\bar{g}}{h}t \tag{1}$$

$$\bar{v} = \left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h}\right)e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\bar{g}}{h}. \tag{2}$$

Dacă punctul este aruncat în sus, proiectînd ecuațiile (1) și (2) pe axa Oy orientată în sus:

$$y = \frac{m}{h}\left(v_0 + \frac{mg}{h}\right)\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) - \frac{mg}{h}t, \tag{3}$$

$$v = \dot{y} = \left(v_0 + \frac{mg}{h}\right)e^{-\frac{h}{m}t} - \frac{mg}{h}. \tag{4}$$

Punctul se ridică, viteza punctului scade anulîndu-se pentru $t = \frac{m}{h} ln\left(1 + \frac{v_0 h}{mg}\right)$; înălțimea maximă atinsă de mobil fiind:

$$y_{max} = \frac{m}{h}\left[v_0 - \frac{mg}{h} ln\left(1 + \frac{v_0 h}{mg}\right)\right].$$

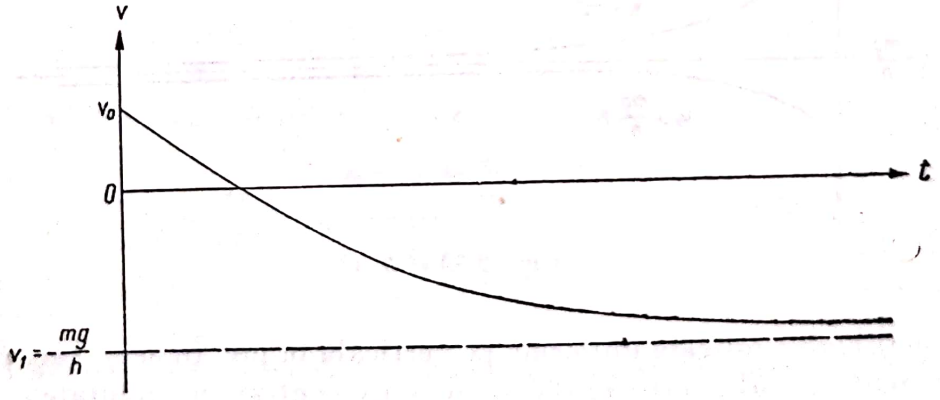


Fig. 21.14, *a*

După aceea viteza își schimbă sensul, mișcarea devine descendentă, iar pentru $t \to \infty$ viteza tinde spre viteza-limită:

$$v_1 = -\frac{mg}{h},$$

îndreptată pe verticală în jos, mișcarea tinzînd spre o mișcare uniformă.

În figura 21.14, *a* s-a reprezentat variația vitezei ca funcție de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punctul este aruncat în jos cu viteza v_0, orientînd axa y în jos prin proiectarea ecuațiilor (1) și (2), se obține:

$$y = \frac{m}{h}\left(v_0 - \frac{mg}{h}\right)\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right) + \frac{mg}{h}t,$$

$$v = \dot{y} = \left(v_0 - \frac{mg}{h}\right)e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{mg}{h}.$$

Dacă $v_0 < \frac{mg}{h}$, adică dacă viteza inițială este mai mică decît viteza-limită, atunci viteza punctului crește tinzînd spre viteza limită $v_1 = \frac{mg}{h}$, mișcarea fiind accelerată.

Dacă $v_0 > \frac{mg}{h}$, viteza punctului scade tinzînd spre viteza-limită v_1, mișcarea fiind frînată. În sfîrșit, pentru $v_0 = v_1 = \frac{mg}{h}$, $v = \frac{mg}{h} = \text{const}$,

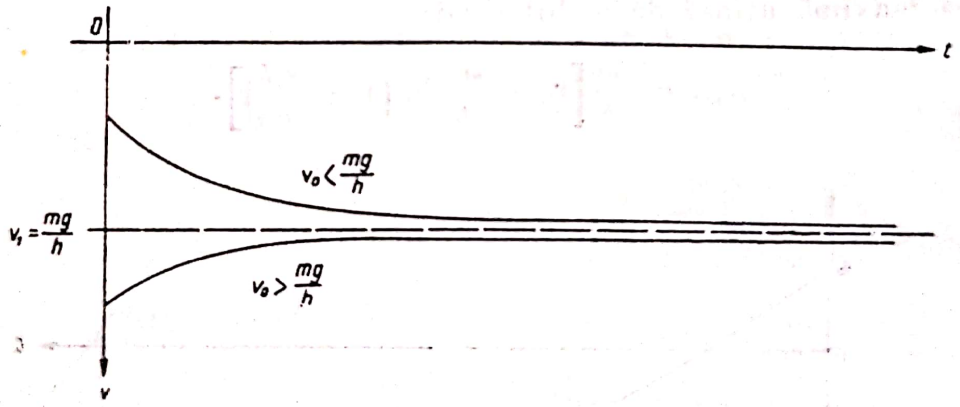


Fig. 21.14, *b*

adică punctul are o mișcare uniformă pe verticală în jos. În acest caz, $\bar{R} = m\bar{g}$, deci rezistența aerului este egală și de sens contrar cu greutatea corpului și forțele echilibrîndu-se, mișcarea este rectilinie și uniformă.

În figura 21.14, *b* s-a reprezentat variația vitezei ca funcție de timp pentru acest caz.

21.15. Un punct material greu A de masă m este aruncat pe verticală în sus cu viteza v_0. Știind că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei $|R| = hv^2$ (ipoteză satisfăcătoare pentru un interval de viteze care urmează celui cu rezistența proporțională cu viteza), să se studieze mișcarea acestui punct.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și rezistența aerului $\bar{R}$. *În mișcarea ascendentă* $\bar{R}$ va fi dirijat în jos (fig. 21.15, *a*), deci ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe verticală va fi:

$$m\ddot{x} = -mg - hv^2. \tag{1}$$

În cele ce urmează se notează:

$$h = \frac{mg}{v_1^2}, \tag{2}$$

v_1^2 fiind o masă constantă a cărei semnificație fizică se va vedea ulterior. Cum $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \frac{mg}{v_1^2}v^2$$

și separînd variabilele v și t și integrînd:

$$t = -\int \frac{dv}{g\left(1 + \frac{v^2}{v_1^2}\right)} + C_1 = -\frac{v_1}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{v_1} + C_1.$$

Din condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad v = v_0 \tag{3}$$

rezultă constanta $C_1 = \frac{v_1}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_1}$, deci:

$$t = \frac{v_1}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{v_1}\right) \tag{4}$$

și explicitînd din această relație viteza, rezultă:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1\frac{v_0 - v_1\operatorname{tg}\frac{gt}{v_1}}{v_1 + v_0\operatorname{tg}\frac{gt}{v_1}}. \tag{5}$$

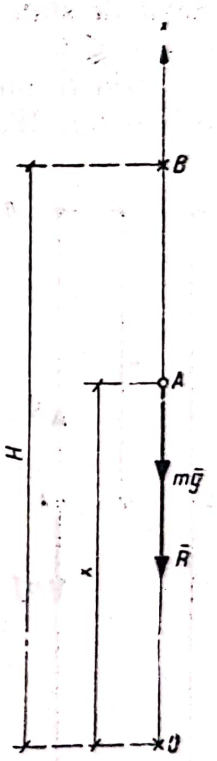


Fig. 21.15, *a*

Integrînd această ecuație și ținînd seamă de condițiile inițiale (3) se obține legea de mișcare:

$$x = \frac{v_1^2}{g}\ln\left[\cos\frac{gt}{v_1} + \frac{v_0}{v_1}\sin\frac{gt}{v_1}\right]. \tag{6}$$

Se poate găsi și legătura dintre viteza v și abscisa x a punctului fie prin substituirea lui (4) în (6), fie prin integrarea ecuației diferențiale (1) în care se va înlocui:

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

și se va ține seamă de condițiile inițiale (3). Rezultă:

$$x = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_0^2 + v_1^2}{v^2 + v_1^2}; \qquad v = \sqrt{(v_0^2 + v_1)^2 \, e^{\frac{-2gx}{v_1^2}} - v_1^2}. \tag{7}$$

Din relațiile (4) ÷ (7) rezultă că atunci cînd timpul t crește, abscisa x crește (punctul se urcă), viteza v scade anulîndu-se ($v = 0$) în punctul de înălțime maximă B, de abscisă $x_{max} = H$ în momentul $t = t_B$, unde:

$$H = \frac{v_1^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) \qquad t_B = \frac{v_1}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{v_1}. \tag{8}$$

Relațiile stabilite anterior pentru mișcarea ascendentă au sens pentru $x \leqslant H$, $0 < t \leqslant t_B$.

Din B, punctul începe să coboare, în mișcarea descendentă $\bar{R}$ fiind dirijat în sus (fig. 21.15, *b*). Făcînd o schimbare de axe de coordonate și alegînd originea în punctul $B \equiv O'$, axa $O'x'$ verticala descendentă, proiecția ecuației fundamentale a dinamicii (21.3) pe axa $o'x'$ va fi:

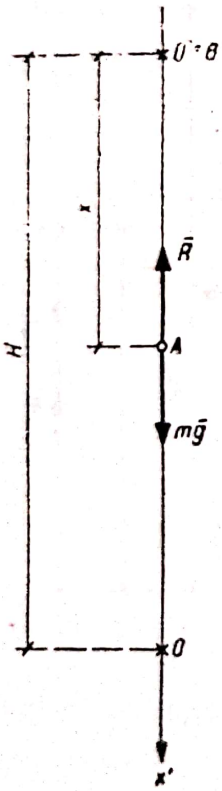


Fig. 21.15, *b*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - h\,v^2 \tag{9}$$

sau ținînd seamă de notația (2) $h = \frac{mg}{v_1^2}$ și separînd variabilele v și t

$$dt = \frac{v_1^2}{g} \frac{dv}{v_1^2 - v^2},$$

de unde, prin integrare:

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} + C_2, \qquad \text{pentru } v < v_1$$

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v + v_1}{v - v_1} + C_2', \qquad \text{pentru } v > v_1.$$

Vom considera drept moment inițial momentul în care începe mișcarea descendentă și pentru a obține un rezultat mai general presupunem că mobilul are o viteză inițială v_0' dirijată în jos (în cazul particular pe care-l studiem, $v_0' = 0$). Condițiile inițiale vor fi:

$$t = 0, \qquad x' = 0, \qquad v = v_0', \tag{10}$$

de unde

$$C_2 = -\frac{v_1}{2g} ln \frac{v_1 + v_0'}{v_1 - v_0'}, \text{ pentru } v_0' < v_1 \text{ și } C_2' =$$

$$= -\frac{v_1}{2g} ln \frac{v_0' + v_1}{v_0' - v_1}, \text{ pentru } v_0' > v_1, \text{ deci:}$$

$$t = \frac{v_1}{2g} ln \frac{(v_1 + v)(v_1 - v_0')}{(v_1 - v)(v_1 + v_0')}, \text{ pentru } v_0' < v_1, v < v_1 \qquad (11\text{ a})$$

$$t = \frac{v_1}{2g} ln \frac{(v + v_1)(v_0' - v_1)}{(v - v_1)(v_0' + v_1)}, \text{ pentru } v_0' > v_1, v > v_1. \qquad (11\text{ b})$$

În cazul nostru particular, făcînd $v_0' = 0$ în relația (11 a), rezultă:

$$t = \frac{v_1}{2g} ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} = \frac{v_1}{g} \operatorname{arg\,th} \frac{v}{v_1}. \qquad (11\text{ a}')$$

Explicitînd din aceste relații viteza, se obține:

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v_1 + v_0) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_1 - v_0') e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v_1 + v_0') e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_1 - v_0') e^{-\frac{gt}{v_1}}}, \text{ pentru } v_0' < v_1, v < v_1 \qquad (12\text{ a})$$

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v_0' + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_0' - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v_0' + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_0' - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}, \text{ pentru } v_0' > v_1, v > v_1 \qquad (12\text{ b})$$

$$v = \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} - e^{-\frac{gt}{v_1}}}{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}} = v_1 \operatorname{th} \frac{gt}{v_1}, \quad \text{pentru } v_0' = 0. \qquad (12\text{ a}')$$

Integrînd aceste ultime relații și ținînd seamă de condițiile inițiale (10) se obține legea de mișcare:

$$x' = \frac{v_1^2}{g} ln \frac{(v_1 + v_0') e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_1 - v_0') e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2 v_1}, \text{ pentru } v_0' > v_1 \qquad (13\text{ a})$$

$$x' = \frac{v_1^2}{g} ln \frac{(v_0' + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_0' - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2 v_1}, \text{ pentru } v_0' < v_1 \qquad (13\text{ b})$$

$$x' = \frac{v_1^2}{g} ln \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2} = \frac{v_1^2}{g} ln \left(ch \frac{gt}{v_1}\right), \text{ pentru } v_0' = 0. \qquad (13\text{ a}')$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog în cazul mișcării ascendente poate fi determinat și $x = x(v)$ din ecuațiile (11) și (13) sau prin integrarea ecuației diferențiale (9), în care $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx'}\frac{dx'}{dt} = v\frac{dv}{dx'}$. Rezultă:

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_1^2 - v_0'^2}{v_1^2 - v^2} \qquad v = \sqrt{v_1^2 - (v_1^2 - v_0'^2)\, e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}, \text{ pentru } v_0' < v_1 \qquad (14\text{ a})$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_0'^2 - v_1^2}{v^2 - v_1^2} \qquad v = \sqrt{v_1^2 + (v_0'^2 - v_1^2)\, e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}, \text{ pentru } v_0' > v_1 \qquad (14\text{ b})$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_1^2}{v_1^2 - v^2} \qquad v = v_1\sqrt{1 - e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}, \text{ pentru } v_0' = 0. \qquad (14\text{ a}')$$

Din relațiile (11)—(14) se pot trage următoarele concluzii. Dacă viteza inițială $v_0' < v_1$, viteza punctului crește tinzînd spre valoarea v_1 pentru $t \to \infty$. Dacă $v_0' > v_1$, viteza v scade tinzînd tot spre valoarea v_1, deci independent de condițiile inițiale ale problemei, există o viteză limită:

$$\lim_{t\to\infty} v = v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}, \qquad (15)$$

mișcarea tinzînd spre o mișcare uniformă pe verticală în jos. Pentru $v_0' = v_1$ rezultă $v = v_1 = \text{const}$, mișcarea fiind uniformă.

Ca și în cazul rezistenței aerului proporțională cu viteza și în acest caz pentru viteza-limită v_1 rezistența aerului este egală cu greutatea punctului $R_1 = hv_1^2 = mg$.

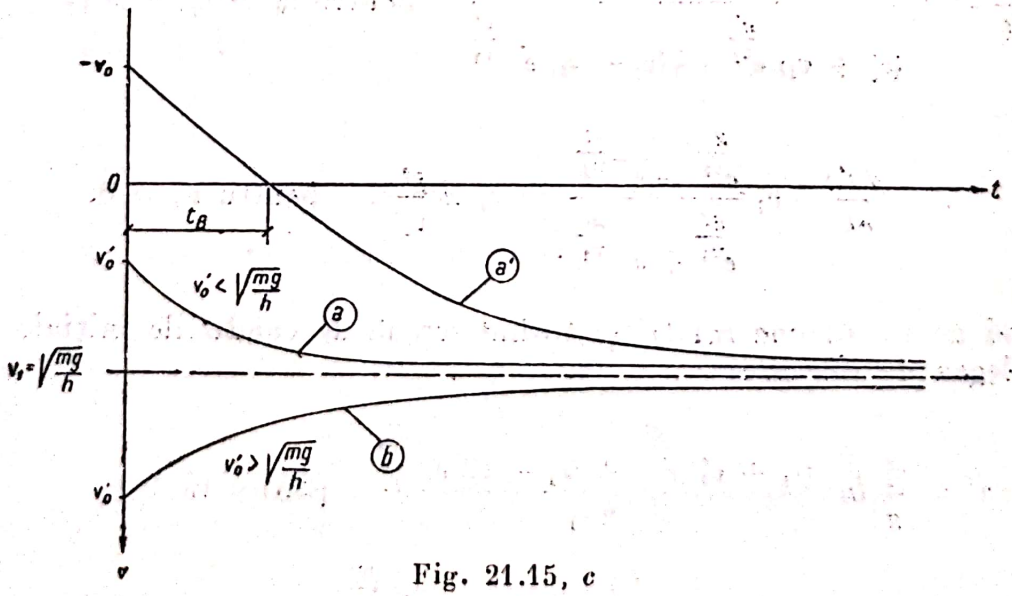


Fig. 21.15, *c*

În figura 21.15, *c* s-a reprezentat variația vitezei ca funcție de timp. Curba *a* reprezintă cazul $v_0' < \sqrt{\frac{mg}{h}}$, curba *a'* cazul punctului lansat în sus cu viteza $|v_0|$, iar curba *b* — cazul $v_0' > \sqrt{\frac{mg}{h}}$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul a' al punctului lansat în sus putem determina din relațiile (8) și (14) viteza cu care revine mobilul pe pământ (abscisa $x' = H$). Rezultă:

$$v = v_1\sqrt{1-e^{-\frac{2gH}{v_1^2}}} = \frac{v_0 v_1}{\sqrt{v_0^2+v_1^2}} = v_0\sqrt{\frac{1}{1+\frac{h v_0^2}{mg}}} \leqslant v_0.$$

Dacă rezistența aerului ar fi nulă $h = 0$, $v = v_0$, punctul ar reveni pe pământ cu viteza cu care a fost lansat.

21.16. Un avion de greutate $G = 9\,000$ kgf trece în picaj cu motorul oprit, cu viteza inițială de 360 km/h, rezistența aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei $R = hv^2$, unde $h = 0{,}1\frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^2}$. Să se determine drumul s_1 parcurs și momentul t_1 până cînd viteza avionului se dublează. Știind că apoi avionul se urcă, să se determine drumul s_2 și timpul t_2 după care își va recăpăta viteza inițială.

Rezolvare. Vom folosi rezultatele din problema 21.15. Să se determine viteza limită (15) a avionului:

$$v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}} = \sqrt{\frac{G}{h}} = \sqrt{\frac{9\,000}{0{,}1}} = 300 \text{ m/s}.$$

Cu notațiile din problema 21.15 viteza inițială va fi:

$$v_0' = 360 \text{ km/h} = \frac{360\times 1\,000}{3\,600}\frac{m}{s} = 100 \text{ m/s},$$

iar cea finală $v = 2v_0' = 200$ m/s. Cum $v_0' < v_1$, folosind formulele (14 a) și (11 a), drumul și timpul de coborîre vor fi:

$$s_1 = x' = \frac{v_1^2}{2g}\ln\frac{v_1^2-v_0^2}{v_1^2-v^2} = \frac{300^2}{2\times 9{,}81}\ln\frac{300^2-100^2}{300^2-200^2} =$$

$$= 4\,587 \ln 1{,}6 = 4\,587 \times 0{,}47 = 2\,155 \text{ m}$$

$$t_1 = t = \frac{v_1}{2g}\ln\frac{(v_1+v)(v_1-v_0')}{(v_1-v)(v_1+v_0')} = \frac{300}{2\times 9{,}81}\ln\frac{(300+200)(300-200)}{(300-100)(300+100)} =$$

$$= 15{,}29 \ln 2{,}5 = 15{,}29 \times 0{,}917 = 14{,}02 \text{ s}.$$

Din formulele (7) și (4) în care viteza inițială va fi $v_0 = 200$ m/s, iar cea finală $v = 100$ m/s, se obțin drumul și timpul de urcare:

$$s_2 = x = \frac{v_1^2}{2g}\ln\frac{v_0^2+v_1^2}{v^2+v_1^2} = \frac{300^2}{2\times 9{,}81}\ln\frac{200^2+300^2}{100^2+300^2} =$$

$$= 4\,587 \ln 1{,}3 = 4\,587 \times 0{,}2625 \approx 1\,204 \text{ m}$$

$$t_2 = t = \frac{v_1}{g}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{v_0}{v_1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{v_1}\right) = \frac{300}{9{,}81}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{200}{300} - \operatorname{arc\,tg}\frac{100}{300}\right) =$$

$$= 30{,}58\,(0{,}588 - 0{,}322) = 8{,}14 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

21.17. Un punct material greu de masă m cade pe verticală în jos întîmpinînd rezistența aerului $R(v)$. Rezistența aerului crescînd cu viteza, funcția $R(v)$ trebuie să fie o funcție uniformă, continuă și monoton crescătoare de viteză v în intervalul $0 \leqslant v \leqslant \infty$, avînd valoarea $R(0)=0$ (cînd punctul este în repaus rezistența aerului este nulă), iar $\lim\limits_{v\to\infty} R(v) > mg$ (fig. 21.17). Se mai presupune că există o singură valoare a vitezei $v=v_1$ pentru care rezistența aerului este egală cu greutatea punctului $R(v_1)=mg$. Să se arate că independent de condițiile inițiale ale problemei mișcarea tinde spre o mișcare uniformă pe verticală în jos cu viteza v_1 (viteza-limită).

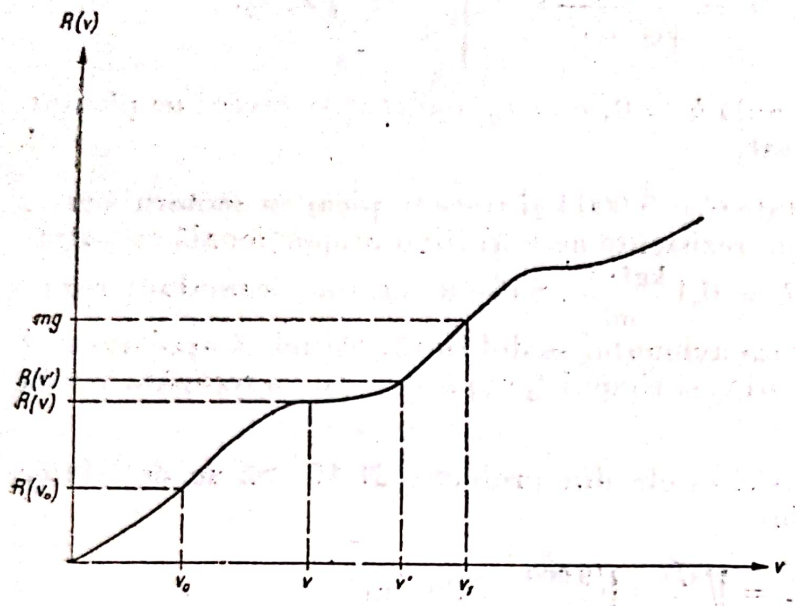


Fig. 21.17

Rezolvare. Forțele care acționează asupra punctului sînt greutatea lui mg și rezistența aerului dirijată pe verticală în sus. Alegînd drept axă Ox verticala descendentă, ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) va fi de forma:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - R(v), \tag{1}$$

deoarece $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$. Separînd variabilele v și t ea devine:

$$m\frac{dv}{mg - R(v)} = dt. \tag{2}$$

Presupunînd viteza inițială $v_0 < v_1$, atunci $R(v_0) < mg$ și din ecuația (1) accelerația punctului $\frac{dv}{dt} = \frac{mg - R(v)}{m} \geqslant 0$, viteza punctului crescînd. Integrînd ecuația (2) între momentul inițial $t = 0$, $v = v_0$ și un moment oarecare t în care viteza este $v' < v_1$ se obține:

$$t = m\int_{v_0}^{v'} \frac{dv}{mg - R(v)} \leqslant m\int_{v_0}^{v'} \frac{dv}{mg - R(v')} = \frac{m(v' - v_0)}{mg - R(v')}, \tag{3}$$

deoarece din $v \leqslant v'$ avem $R(v) \leqslant R(v') \leqslant mg$ și $\frac{1}{mg - R(v)} \leqslant \frac{1}{mg - R(v)}$.

Cum $(v' - v_0) < (v_1 - v_0) =$ finit trecînd la limită pentru $t \to \infty$, $mg - R(v') \to 0$, deci:

$$\lim_{t\to\infty} R(v') = mg = R(v_1),$$

de unde:

$$\lim_{t\to\infty} (v') = v_1. \tag{4}$$

Dacă viteza inițială este mai mare decît viteza-limită $v_0 > v_1$, $R(v_0) > mg$, accelerația punctului este mai mică decît zero, viteza punctului scăzînd, iar pentru $v' > v_1$ se obține:

$$t = m\int_{v_0}^{v'} \frac{dv}{mg - R(v)} = \int_{v'}^{v_0} \frac{dv}{R(v) - mg} \leqslant \frac{m(v_0 - v')}{R(v') - mg},$$

deoarece $R(v) \geqslant R(v') > mg$. Trecînd la limită rezultă din nou:

$$\lim_{t\to\infty} R(v') = mg = R(v_1) \qquad \lim_{t\to\infty} v' = v_1.$$

Deci, indiferent de condițiile inițiale, viteza mobilului tinde spre viteza-limită v_1 pentru care rezistența aerului este egală cu greutatea punctului. Integrala (3) fiind improprie, valoarea $v = v_1$ nu va fi atinsă niciodată.

În sfîrșit, dacă viteza inițială este egală cu viteza-limită, $v_0 = v_1$, forțele echilibrîndu-se, accelerația punctului este nulă, deci mișcarea este rectilinie și uniformă.

Cu rezultatul stabilit se poate afla ușor viteza-limită. De exemplu, dacă rezistența aerului este de forma $R = hv^n$, din $mg = hv_1^n$ rezultă $v_1 = \left(\frac{mg}{h}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Pentru rezistența direct proporțională cu viteza $(n = 1)$ rezultă $v_1 = \frac{mg}{h}$, iar pentru rezistența proporțională cu pătratul vitezei $(n = 2)$ $v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}$, rezultate stabilite în problemele precedente.

21.18. Să se studieze mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe $\bar{F}_0$, constante atît ca modul cît și ca direcție. Caz particular: mișcarea unui punct greu lansat pe verticală în sus cu viteza v_0 sub acțiunea vîntului care acționează ca o forță orizontală constantă H egală ca mărime cu greutatea punctului. (Se va determina înălțimea maximă atinsă și punctul unde cade din nou pe sol.)

Rezolvare. Din integrarea ecuației fundamentale a dinamicii (21.2)

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_0,$$

ținînd seamă că $\bar{F}_0$ este un vector constant, rezultă:

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{\bar{F}_0}{m}; \quad \dot{\bar{r}} = \frac{\bar{F}_0}{m}t + \bar{C}_1; \quad \bar{r} = \frac{1}{2}\frac{\bar{F}_0}{m}t^2 + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2. \tag{1}$$

Nu particularizăm prin nimic problema alegînd drept origine O, poziția inițială, din condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad \bar{r} = 0 \qquad \dot{\bar{r}} = \bar{v}_0 \tag{2}$$

rezultă $O = \bar{C}_2$, $\bar{v}_0 = \bar{C}_2$, deci:

$$r = \frac{1}{2}\frac{\bar{F}_0}{m}t^2 + v_0 t \qquad \dot{\bar{r}} = \frac{\bar{F}_0}{m}t + v_0. \tag{3}$$

Vectorii $\bar{F}_0$ și $\bar{v}_0$ determină un plan, planul xOy, în care Oy va avea direcția lui $\bar{F}_0$, deci $\bar{F}_0 = F_0\,\bar{j}$ și $\bar{v}_0 = v_{0x}\,\bar{i} + v_{0y}\,\bar{j}$. Proiectînd ecuațiile (3) pe axele de coordonate, se obțin ecuațiile de mișcare:

$$x = v_{0x}\,t \qquad y = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + v_{0y}\,t \qquad z = 0 \tag{4}$$

și componentele vitezei:

$$\dot{x} = v_{0x} \qquad \dot{y} = \frac{F_0}{m}t + v_{0y} \qquad \dot{z} = 0 \tag{5}$$

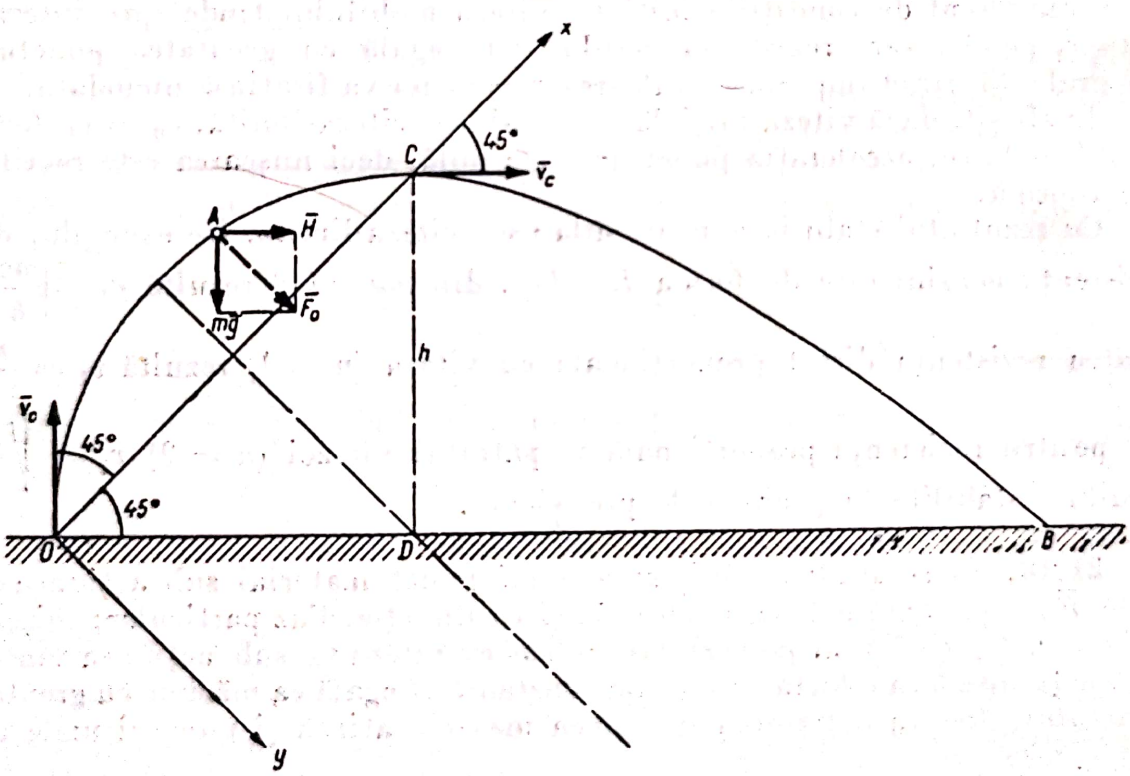


Fig. 21.18

Eliminînd timpul t din (4) rezultă ecuația carteziană a traiectoriei:

$$y = \frac{F_0}{2m}\frac{x^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x, \tag{6}$$

care este o parabolă cu axa paralelă cu Oy. Mișcarea este asemănătoare cu mișcarea punctului greu în vid (problema 21.8) care reprezintă cazul particular

al acestei probleme pentru $\bar{F}_0 = -m\bar{g}$. Se pot regăsi proprietăți ale mișcării, similare cu cele stabilite pentru punctul greu în vid (existența unei curbe de siguranță etc.).

În cazul particular examinat (fig. 21.18), forțele care acționează fiind greutatea $m\bar{g}$ și forța orizontală a vîntului $\bar{F}_0 = m\bar{g} + \bar{H}$, cum $|\bar{H}| = mg$, și forțele sînt perpendiculare $|\bar{F}_0| = mg\sqrt{2}$ și fac un unghi de 45° cu orizontala. Alegînd axele ca în figură, înclinate la 45° față de orizontală (Oy paralel cu $\bar{F}_0$), proiecțiile vitezei inițiale pe axe sînt $v_{0x} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$, $v_{0y} = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_0$, iar ecuațiile (4)—(6) devin:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t; \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} gt^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t \tag{4'}$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \; ; \qquad \dot{y} = \sqrt{2}\, gt - \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \tag{5'}$$

$$y = \frac{\sqrt{2} g\, x^2}{v_0^2} - x, \tag{6'}$$

traiectoria fiind o parabolă avînd axa paralelă cu Oy și $\bar{F}$ înclinată la 45° față de orizontală. În punctul de înălțime maximă C viteza fiind orizontală avem $v_{Cx} = v_{Cy}$, adică $\dot{x} = \dot{y}$. Înlocuind în (5') și (4') rezultă timpul de urcare t_C și coordonatele punctului $C(x_C, y_C)$: $t_C = \frac{v_0}{g}$, $x_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v_0^2}{g}$, $y_C = 0$ poziția punctului C putînd fi determinată și prin înălțimea $h = CD = x_C \cdot \operatorname{s\,în}\, 45° = \frac{v_0^2}{2g}$. Punctul B de cădere pe sol găsindu-se pe bisectoarea întîi a planului xOy, $x = y$ din ecuația (6') rezultă $x_B = y_B = \frac{\sqrt{2}\, v_0^2}{g}$, bătaia fiind $OB = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2v_0^2}{g}$.

Evident problema se putea rezolva și proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe alte axe, de exemplu pe orizontală și pe verticală. Lăsăm pe seama cititorului să încerce să rezolve în acest mod problema.

21.19. Un punct material este atras de o axă Δ cu o forță proporțională cu masa punctului și cu distanța lui d la axa ($|\bar{F}| = mk^2 d$), suportul forței fiind perpendicular pe Δ. Să se studieze mișcarea punctului știind că în momentul inițial el se află la distanța r_0 de axă, viteza inițială $\bar{v}_0$ fiind paralelă cu Δ. Să se determine punctele în care viteza este maximă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Alegînd axa Δ, drept axă Oz și originea astfel ca poziția inițială A_0 să se afle pe axa Ox. În coordonate cilindrice $Ornz$ (fig. 21.19,*a*) forța $\bar{F}$ fiind paralelă cu axa Or de versor $\bar{\rho}$ se va putea exprima sub forma:

$$\bar{F} = -mk^2 r\bar{\rho}, \tag{1}$$

deoarece $d = r$ și forța este dirijată spre axa Oz.

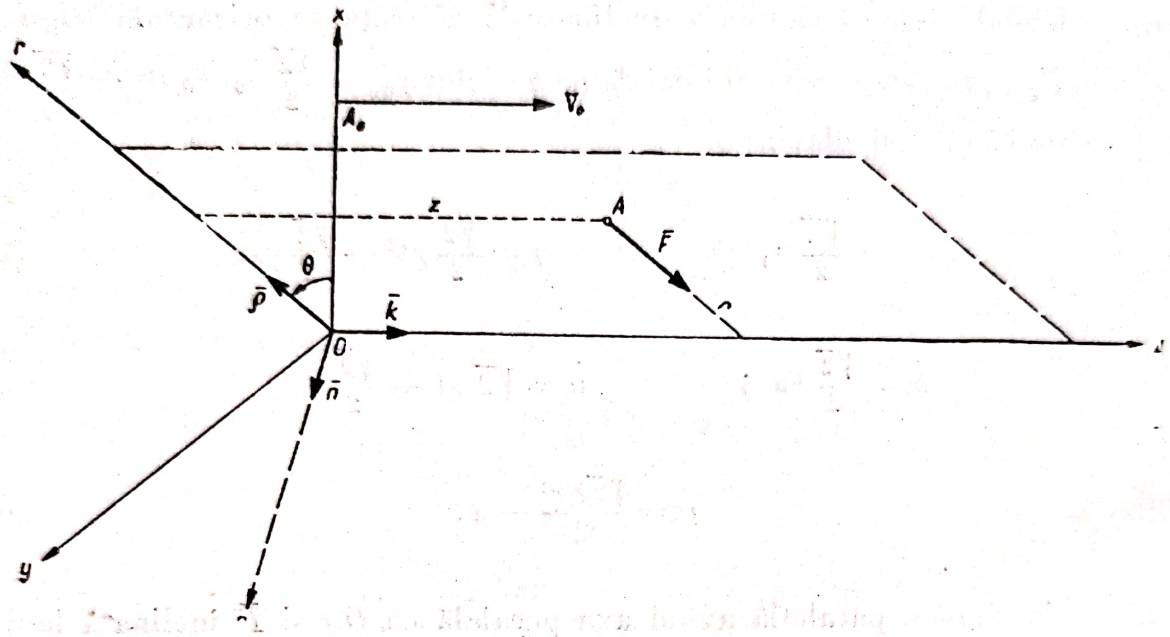


Fig. 21.19, *a*

Folosind proiecțiile (21.8) ale ecuației fundamentale ale dinamicii pe direcția razei polare Or, a normalei On la raza polară din planul xOy și pe axa Oz, se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mk^2 r \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad m\ddot{z} = 0. \tag{2}$$

Condițiile inițiale ale problemei sînt:

$$t = 0,\ r = r_0,\ \theta = 0,\ z = 0,\ v_\rho = \dot{r} = 0,\ v_n = r\dot{\theta} = 0,\ v_z = \dot{z} = v_0. \tag{3}$$

O integrală primă a mișcării $r^2\dot{\theta} = C_1$ se obține din a doua dintre ecuațiile (2). Ținînd seamă de (3), cum $\dot{\theta} = \frac{v_n}{r} = 0$, rezultă $C_1 = 0$ și cum soluția $r = 0$ nu are sens, deoarece la $t = 0$, $r = r_0 \neq 0$, singura soluție este:

$$\dot{\theta} = 0 \qquad \theta = C_2 = 0.$$

Ecuațiile (2) devin:

$$\ddot{r} + k^2 r = 0, \qquad \ddot{z} = 0. \tag{2'}$$

Prima este o ecuație diferențială de ordinul al doilea, a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 + k^2 = 0$ are soluții pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm ik$, deci integralele generale ale ecuațiilor (2′)sînt:

$$r = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt \qquad z = C_5 t + C_6$$

și:

$$\dot{r} = kC_3 \sin kt - kC_4 \cos kt \qquad \dot{z} = C_5.$$

Din condițiile inițiale (3) se determină constantele $r_0 = C_3$, $0 = -kC_4$, $0 = C_6$ $v_0 = C_5$ și cum din $\theta = 0$ rezultă $x = r$, $y = 0$, ecuațiile parametrice de mișcare sînt:

$$x = r_0 \cos kt \qquad y = 0 \qquad z = v_0 t \tag{4}$$

și componentele vitezei:

$$\dot{x} = -kr_0 \sin kt \qquad \dot{y} = 0 \qquad \dot{z} = v_0 \tag{5}$$

ecuații care se puteau determina prin proiectarea ecuației fundamentale a dinamicii pe axele triedrului $Oxyz$.

Prin eliminarea timpului t între ecuațiile (4) se obține ecuația traiectoriei, sinusoida:

$$x = r_0 \cos \frac{kz}{v_0}. \tag{6}$$

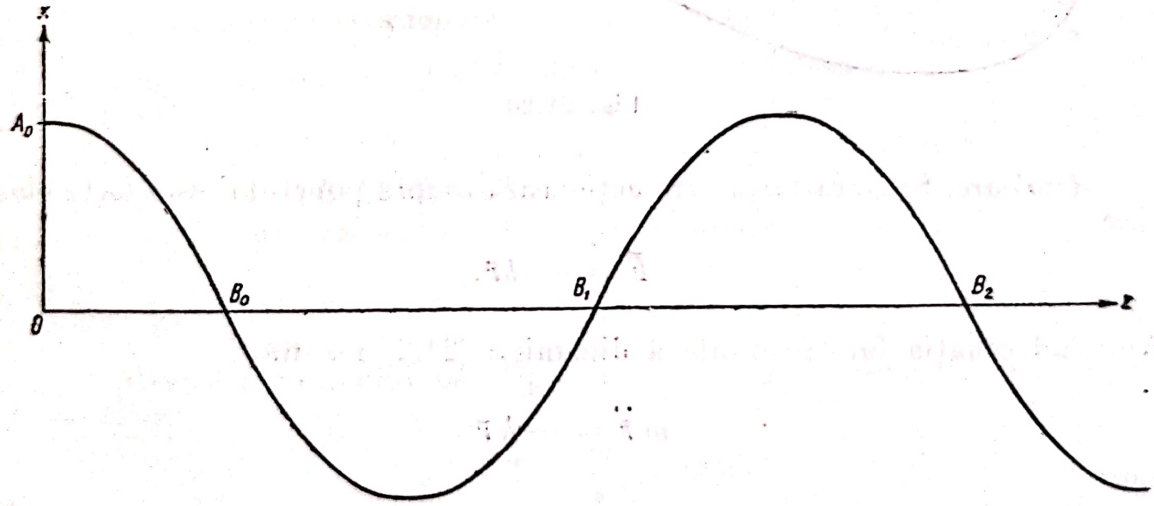


Fig. 21.19, *b*

Pentru a determina punctele în care viteza este maximă, din relațiile (5) se observă că proiecția pe axa Oz a vitezei fiind constantă, va trebui ca în acele puncte $|\dot{x}|$ să fie maxim, adică $|\sin kt| = 1$, deci:

$$kt = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Înlocuind valoarea lui t în ecuațiile (4) rezultă că viteza va fi maximă pentru $x = 0$, adică în punctele B_0, B_1, B_2,... de intersecție ale traiectoriei cu axa Oz (fig. 21.19, *b*).

21.20. Un punct de masă m este atras de un punct O cu o forță elastică (proporțională cu distanța), constanta elastică fiind k. Știind că în momentul inițial punctul se găsea în punctul A_0 ($OA_0 = x_0$) și avea viteza $\bar{v}_0$ formînd unghiul α cu $\overline{OA}$, se cere să se studieze mișcarea punctului.

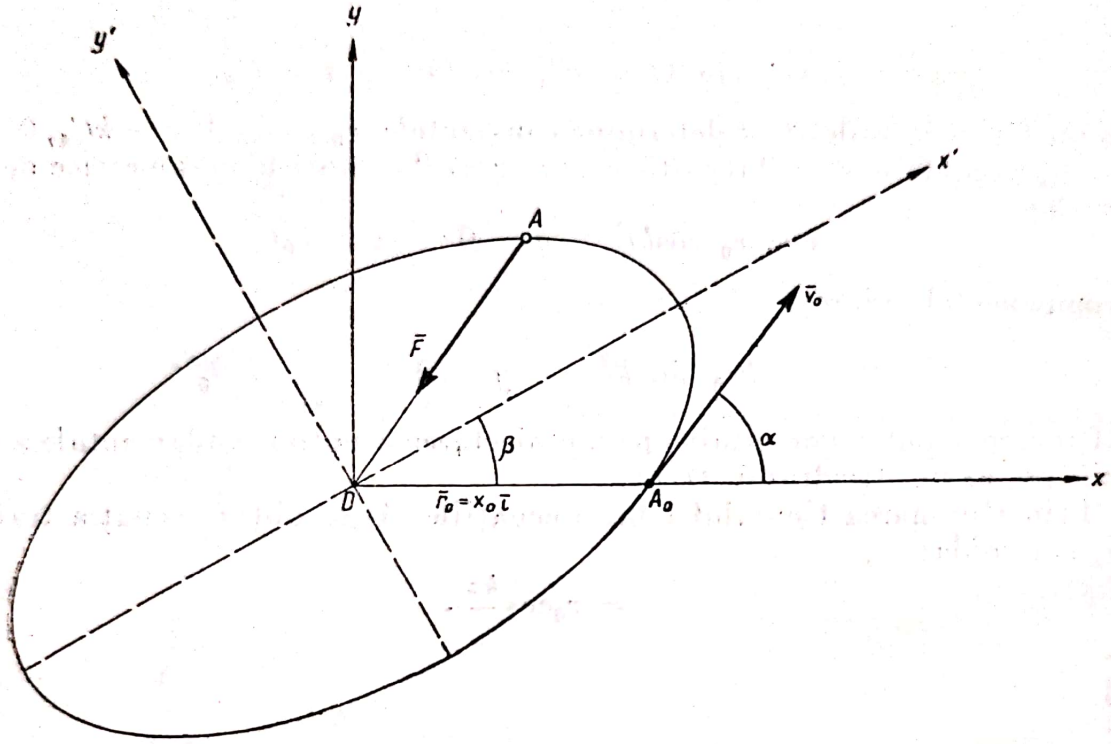


Fig. 21.20

Rezolvare. Singura forță care acționează asupra punctului este forța elastică:

$$\bar{F} = -k\bar{r}.$$

Aplicînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.2) rezultă:

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r}$$

sau:

$$\ddot{\bar{r}} + \nu^2\bar{r} = 0, \tag{1}$$

unde $\nu^2 = \frac{k}{m}$. Ecuația (1) este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 + \nu^2 = 0$ are soluțiile pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, deci:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos\nu t + \bar{C}_2 \sin \nu t.$$

Viteza va fi:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -\nu \bar{C}_1 \sin \nu t + \nu \bar{C}_2 \cos \nu t.$$

Punînd condițiile inițiale $t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \bar{r} = \bar{r}_0 = x_0 \bar{i} \\ \dot{\bar{r}} = \bar{v}_0 \end{array} \right.$ rezultă $\bar{r}_0 = \bar{C}_1$, $\bar{v}_0 = \nu \bar{C}_2$, deci:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t. \tag{2}$$

Proiectînd ecuația (2) pe axele din figura 21.20 (Ox pe direcția OA_0, planul xOy fiind determinat de $\overline{OA_0}$ și $\bar{v}_0$), se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0 \cos \alpha}{\nu} \sin \nu t \qquad y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\nu} \sin \nu t \qquad z = 0, \tag{3}$$

mișcarea fiind plană. Proiecțiile vitezei vor fi:

$$\dot{x} = -\nu x_0 \sin \nu t + v_0 \cos \alpha \cos \nu t \qquad \dot{y} = v_0 \sin \alpha \cos \nu t \qquad \dot{z} = 0. \tag{4}$$

Eliminînd timpul t între ecuațiile (3) se obține traiectoria:

$$x^2 + y^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{\nu^2 x_0^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha} \right) - 2 x y \operatorname{ctg} \alpha = x_0^2 \tag{5}$$

o elipsă avînd centrul în origine (în centrul atractiv), unghiul β dintre axele elipsei și axele de coordonate fiind date de $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{\nu^2 x_0^2 + v_0^2 \cos 2\alpha}$. Raportînd elipsa la axele ei $x'Oy'$ se obține ecuația redusă a ei:

$$\frac{x'^2}{\frac{2 x_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma}{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 2\gamma}}} + \frac{y'^2}{\frac{2 x_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 2\gamma}}} = 1 \tag{5'}$$

unde $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\nu x_0}{v_0}$.

Mișcarea punctului pe elipsă are un caracter periodic după intervalul de timp:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \text{ (perioada)}, \tag{6}$$

punctul revenind în aceeași poziție, cu aceeași viteză.

Dacă viteza inițială $\bar{v}_0$ este normală pe $\bar{r}_0$ ($\alpha = 90°$), atunci ecuațiile (3) și (5) se simplifică devenind $x = x_0 \cos \nu t$, $y = \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t$, $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\nu}\right)^2} = 1$, axele elipsei fiind determinate de direcțiile lui $\overline{OA_0}$ și $\bar{v}_0$. În cazul general, direcțiile lui $\overline{OA_0}$ și $\bar{v}_0$ reprezintă direcțiile a două diametre conjugate ale elipsei. Un studiu avantajos al mișcării se poate face în coordonate oblice, alegînd aceste direcții drept axe de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Un caz particular interesant este acela în care $\bar{v}_0$ și $\overline{OA_0}$ sînt coliniari ($\alpha = 0$). Din ecuațiile (3) rezultă:

$$x = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t \qquad y = 0 \tag{7}$$

mișcarea fiind o mișcare rectilinie oscilatorie armonică, care este studiată detaliat în capitolul XXIII.

21.21. Să se arate pentru punctul material din problema precedentă că aria elipsei descrisă de punct este aceeași pentru diferite viteze inițiale $\bar{v}_0$, dacă extremitățile vectorilor $\bar{v}_0$ se află pe o dreaptă paralelă cu raza vectoare $\overline{OA_0}$.

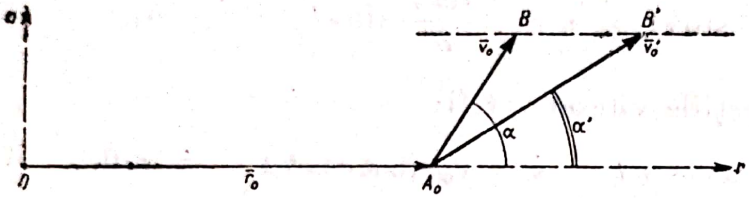


Fig. 21.21.

Rezolvare. Extremitățile B, B' ale vectorilor viteză inițială (fig. 21.21) fiind pe o dreaptă paralelă cu OA_0 rezultă: $v_0 \sin\alpha = v_0' \sin\alpha' = \text{const.}$

Aria elipsei este:

$$A = \pi ab,$$

unde a și b sînt lungimile semiaxelor elipsei. Însă din ecuația (5′) (problema 21.20) se obține:

$$a^2 = \frac{2x_0^2 \sin^2\alpha \cos^2\gamma}{1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 2\gamma}} \qquad b^2 = \frac{2x_0^2 \sin^2\alpha \cos^2\gamma}{1 + \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 2\gamma}}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\nu x_0}{v_0},$$

deci:

$$A = \pi ab = \pi \sqrt{\frac{2x_0^2 \sin^2\alpha \cos^2\gamma}{1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 2\gamma}} \cdot \frac{2x_0^2 \sin^2\alpha \cos^2\gamma}{1 + \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 2\alpha}}} =$$

$$= \pi \frac{x_0^2 \sin\alpha}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\pi x_0 v_0 \sin\alpha}{\nu}.$$

Cum x_0, $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$ și $v_0 \sin\alpha$ sînt mărimi care nu variază în condițiile problemei noastre, aria A va rămîne aceeași.

Soluția dată este numai aparent simplă; în realitate, calculul lungimilor semiaxelor elipsei a fost destul de laborios. Se poate da o soluție simplă folosind rezultatele din capitolul XXII — Forțe centrale.

Forța elastică este o forță centrală (suportul ei trecînd printr-un punct fix). În acest caz, aria descrisă de raza vectoare (viteza areolară):

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

este constantă. Ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $r = x_0$, $v_\rho = \dot{r} = v_0 \cos\alpha$, $v_n = r\dot{\theta} = v_0 \sin\alpha$ rezultă:

$$\Omega = \frac{1}{2} x_0 v_0 \sin\alpha.$$

Aria elipsei va fi descrisă într-o perioadă $T = \frac{2\pi}{\nu}$ [relația (6), problema 21.20], deci:

$$A = \Omega T = \frac{\pi x_0 v_0 \sin \alpha}{\nu},$$

expresie care pentru diferitele condiții inițiale ale problemei rămîne constantă.

21.22. Un punct de masă m este respins de un punct O cu o forță proporțională cu distanța $\bar{F} = k\bar{r}$. Știind că în momentul inițial punctul se găsește

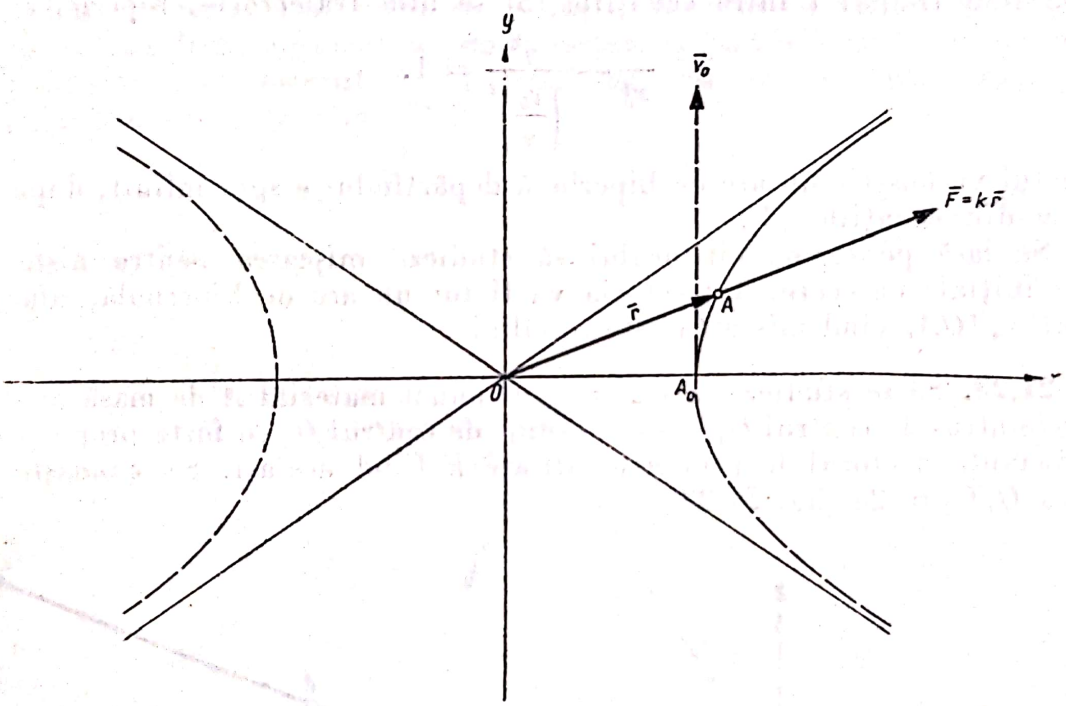


Fig. 21.22

în punctul $A_0(OA_0 = x_0)$ și are viteza $\bar{v}_0$ normală pe OA_0, se cere să se studieze mișcarea punctului (fig. 21.22).

Rezolvare. Aplicînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.2) se obține:

$$m\ddot{\bar{r}} = k\bar{r}$$

sau:

$$\ddot{\bar{r}} - \nu^2 \bar{r} = 0, \qquad (1)$$

unde $\nu^2 = \frac{k}{m}$. Ecuația (1) este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 - \nu^2 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm \nu$. Integrala generală a ecuației (1) este de forma $\bar{r} = \bar{C}_1 e^{\nu t} + \bar{C}_2 e^{-\nu t}$; punînd

condițiile inițiale $t = 0 \begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_0 = x_0 \bar{i} \\ \dot{\bar{r}} = \bar{v}_0 \end{cases}$ rezultă $\bar{r}_0 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2, \bar{v}_0 = \nu \bar{C}_1 - \nu \bar{C}_2$, deci:

$$r = \frac{1}{2}\left(\bar{r}_0 + \frac{\bar{v}_0}{\nu}\right) e^{\nu t} + \frac{1}{2}\left(\bar{r}_0 - \frac{v_0}{\nu}\right) e^{-\nu t}. \tag{2}$$

Proiectînd ecuația (2) pe axele din figură, se obțin legile de mișcare:

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\nu t} + e^{-\nu t}) = x_0 \, ch \, \nu t \quad y = \frac{v_0}{2\nu}(e^{\nu t} - e^{-\nu t}) = \frac{v_0}{\nu} sh \, \nu t. \tag{3}$$

Componentele vitezei vor fi:

$$\dot{x} = \nu x_0 \, sh \, \nu t; \qquad \dot{y} = v_0 \, ch \, \nu t. \tag{4}$$

Eliminînd timpul t între ecuațiile (3) se află traiectoria, hiperbola:

$$\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\nu}\right)^2} = 1. \tag{5}$$

Punctul va descrie un arc de hiperbolă depărtîndu-se spre infinit, după cum reiese din ecuațiile (3).

Se lasă pe seama cititorului să studieze mișcarea pentru niște condiții inițiale oarecare. Traiectoria va fi tot un arc de hiperbolă, afară de cazul $v_0 \| OA_0$ cînd mișcarea este rectilinie.

21.23. Să se studieze mișcarea unui punct material A de masă m știind că este atras de centrul O_1 și este respins de centrul O_2 cu forțe proporționale cu distanța, factorul de proporționalitate k fiind același. Se cunoaște distanța $O_1 O_2 = 2a$ (fig. 21.23).

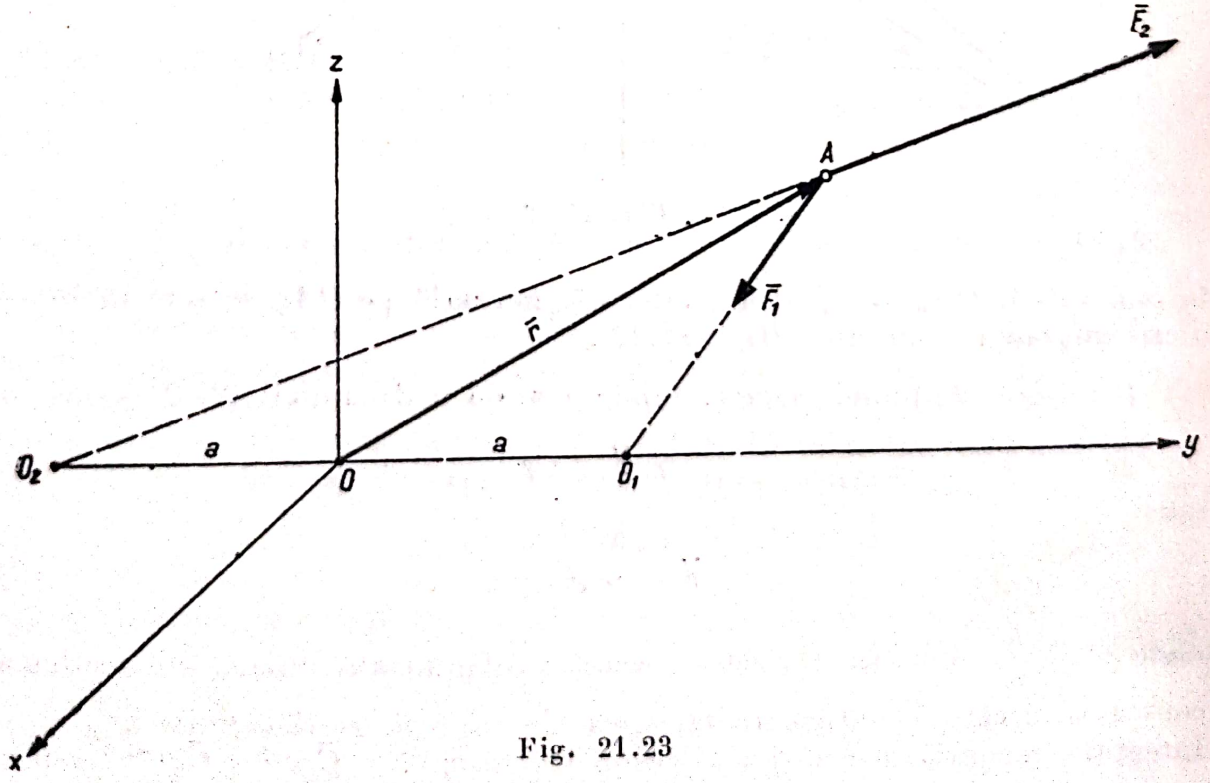


Fig. 21.23

Rezolvare. Să determinăm rezultanta $\bar{F}$ a forțelor care acționează punctul, $\bar{F}_1$ (forța atractivă) și $\bar{F}_2$ (forța repulsivă):

$$\bar{F}_1 = k\overline{AO_1} = k(\overline{AO} + \overline{OO_1}) \qquad \bar{F}_2 = k\overline{O_2A} = k(\overline{O_2O} + \overline{OA})$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = k(\overline{AO} + \overline{OO_1} + \overline{O_2O} + \overline{OA}) = k\overline{O_2O_1} = 2ka\,\vec{j}.$$

Deci forța $\bar{F}$ este constantă și conform rezultatelor stabilite în problema 21.18 punctul va descrie un arc de parabolă cu axa paralelă cu $\bar{F}$ (cu Oy). Se lasă pe seama cititorului să stabilească ecuațiile parametrice de mișcare pentru niște condiții inițiale oarecare.

21.24. Un punct A de masă m se mișcă uniform cu viteza v_0 pe parabola $y^2 = 2px$ fiind acționat de două forțe, $\bar{F}_1$ paralelă cu axa parabolei și $\bar{F}_2$ dirijată spre focarul C al parabolei. Să se determine expresiile scalarilor acestor forțe (fig. 21.24).

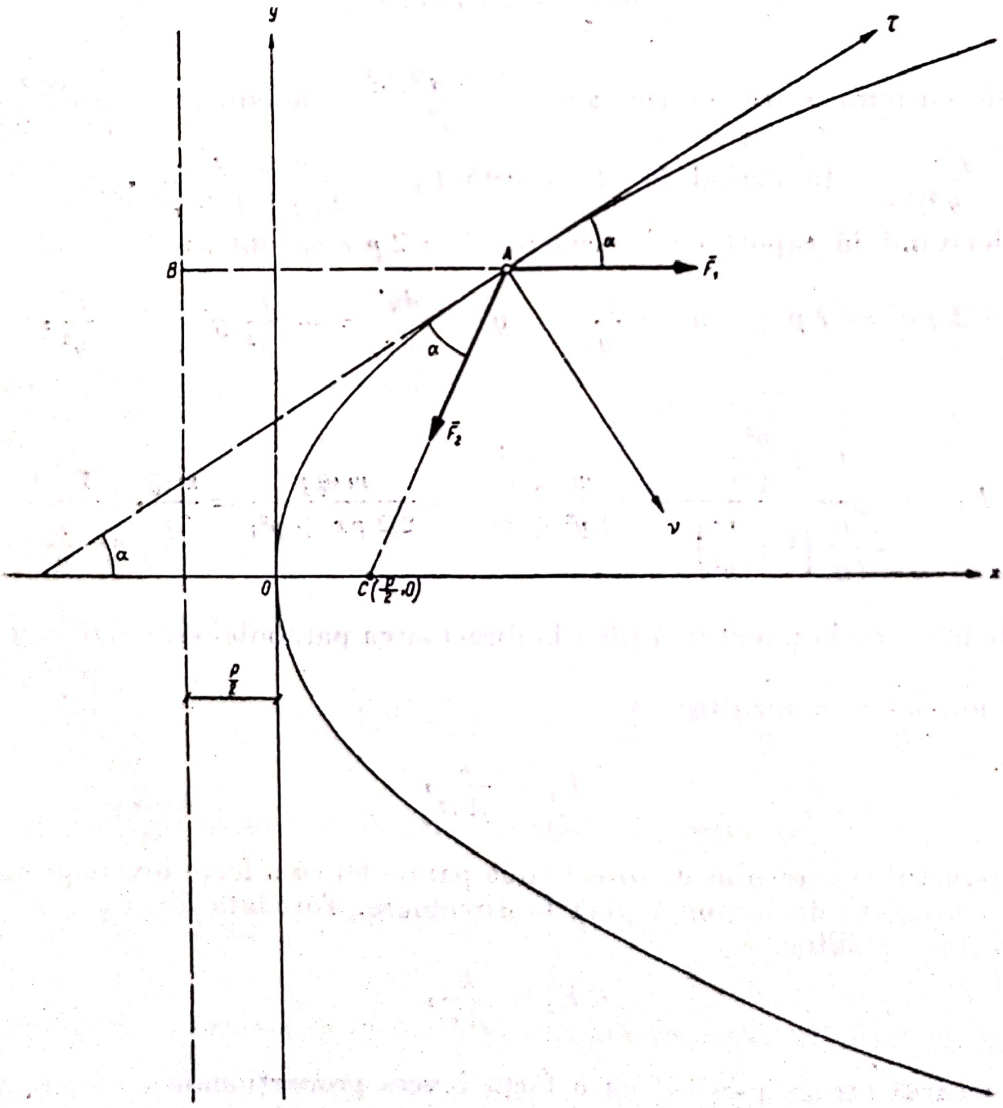


Fig. 21.24

Rezolvare. Traiectoria și legea de mișcare pe traiectorie fiind cunoscute, coordonatele intrinseci sînt comode pentru rezolvarea problemei. De aceea se va proiecta ecuația fundamentală a dinamicii (21.1):

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

pe axele triedrului lui Frenet. Cum tangenta la parabolă formează același unghi α cu paralela AB la axa parabolei și cu raza vectoare AC (C fiind focarul parabolei), ecuațiile (21.7) devin:

$$m\ddot{s} = F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha \qquad m\frac{s^2}{\rho} = F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha. \tag{1}$$

Însă viteza punctului fiind constantă $\dot{s} = v_0$, $\ddot{s} = 0$, și din prima ecuație (1) rezultă $F_1 = F_2$ (scalarii forțelor fiind egali), ecuația a doua devenind:

$$m\frac{v_0^2}{\rho} = 2F_1 \sin\alpha. \tag{2}$$

Raza de curbură a traiectoriei $\rho = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, iar $\sin\alpha = \dfrac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{|y'|}{(1+y'^2)^{3/2}}$. Înlocuind în (2) rezultă $F_1 = \dfrac{m v_0^2 |y''|}{2|y'|(1+y^2)}$.

Însă derivînd în raport cu x ecuația $y^2 = 2px$ se obțin:

$$2yy' = 2p \qquad y' = \frac{p}{y} \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3},$$

deci:

$$F_1 = \frac{m v_0^2 \dfrac{p^2}{|y|^3}}{2\dfrac{p}{|y|}\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)} = \frac{m v_0^2 p}{2(y^2+p^2)} = \frac{m v_0^2 p}{2(2px+p^2)} = \frac{mv_0^2}{4p}\cdot\frac{1}{x+\dfrac{p}{2}}.$$

Însă distanța de la punctul A pînă la directoarea parabolei este $AB = x + \dfrac{p}{2}$ și notînd $\dfrac{m v_0^2}{4p} = k$ rezultă:

$$F_1 = \frac{k}{AB},$$

adică punctul este respins de directoarea parabolei cu o forță invers proporțională cu distanța de la punct pînă la directoare. Totodată din $F_2 = F_1$, cum $AB = AC$, rezultă:

$$F_2 = \frac{k}{AC},$$

adică focarul atrage punctul cu o forță invers proporțională cu distanța de la punct la focar.

Scanned with OKEN Scanner

21.25. Un punct A de masă m descrie elicea $r = R$, $z = R\theta \operatorname{tg} \alpha$ cu viteza constantă $\bar{v}_0$. Să se determine forța $\bar{F}$ care acționează asupra punctului.

Rezolvare. Traiectoria fiind dată în coordonate cilindrice, se vor folosi proiecțiile (21.8) ale ecuației fundamentale a dinamicii pe direcțiile (v. fig. 21.25) Or (normala la cilindrul pe care este înfășurată elicea), On (tangenta la cercul paralel al cilindrului) și Oz (axa cilindrului), (v. problema 13.27):

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_n \qquad (1) \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned}$$

Însă $r = R$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, $\ddot{z} = R\ddot{\theta} \operatorname{tg} \alpha$, ecuațiile (1) devenind:

$$\begin{aligned} -mR\dot{\theta}^2 &= F_r \\ mR\ddot{\theta} &= F_n \qquad (2) \\ mR\ddot{\theta} \operatorname{tg} \alpha &= F_z. \end{aligned}$$

Componentele vitezei punctului în coordonate cilindrice (13.9) fiind:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r} = 0 \\ v_n &= r\dot{\theta} = R\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} = R\dot{\theta} \operatorname{tg} \alpha; \end{aligned}$$

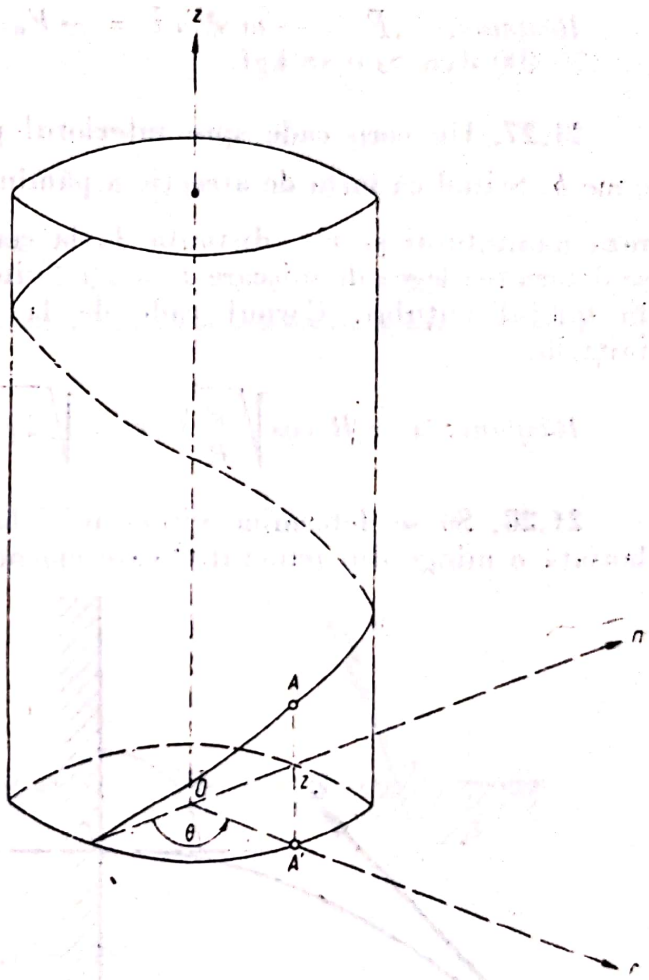


Fig. 21.25

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos \alpha} = v_0,$$

deci $\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}$, iar $\ddot{\theta} = 0$. Din ecuațiile (2) rezultă:

$$F_r = -\frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha}{R} \qquad F_n = 0 \qquad F_z = 0,$$

deci forța este normală la cilindru și dirijată spre axa cilindrului, modulul ei $F = \frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha}{R}$ fiind constant.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

21.26. Un punct avînd masa $m = 200$ g are o mișcare rectilinie oscilatorie armonică după legea $x = A \cos \nu t$, unde $A = 12$ cm, iar $\nu = 14 s^{-1}$. Să se determine forța $\bar{F}$ sub acțiunea căreia se mișcă punctul.

Răspuns. $\bar{F} = -m\nu^2 x\bar{i} = -F_0 \cos \nu t\, \bar{i}$, unde $F_0 = m\nu^2 A = 470\,400$ dyn $\approx 0{,}48$ kgf.

21.27. Un corp cade spre interiorul pămîntului, într-un puț, de adîncime h. Știind că forța de atracție a pămîntului este $F = \frac{mgx}{R}$, unde R este raza pămîntului și x — distanța de la centrul pămîntului pînă la corp, să se determine legea de mișcare $x = x(t)$, viteza și timpul în care corpul ajunge în fundul puțului. Corpul cade de la suprafața pămîntului fără viteză inițială.

Răspuns: $x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t$, $v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{h}{2R}\right)}$, $t = \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{R-h}{R}$.

21.28. Să se determine viteza inițială v_0 și unghiul α sub care trebuie lansată o minge din punctul O care ciocnește normal un perete vertical CD situat la distanța $OD = 2a$ la înălțimea $DC = a$ (fig. 21.28). Se neglijează rezistența aerului.

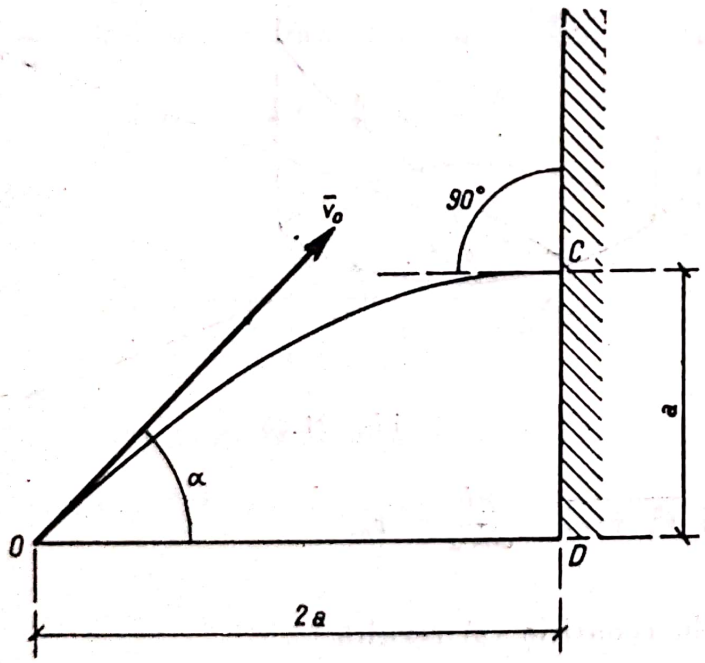


Fig. 21.28

Răspuns: $v_0 = 2\sqrt{ag}$, $\alpha = 45°$.

21.29. Din vîrful O al unui turn avînd înălțimea $h = 40$ m este aruncat un corp de greutate $G = 0{,}5$ kgf, cu viteza $v_0 = 20$ m/s, sub un unghi față de orizontală $\alpha = 30°$ (fig. 21.29). Să se determine viteza și poziția corpului în momentul în care a ajuns în punctul C de înălțime maximă și în momentul în care cade pe sol. Calculele se vor face în două ipoteze neglijînd rezistența aerului și presupunînd rezistența proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$, unde $h = 0{,}1 \frac{\text{kgf} \cdot \text{s}}{\text{m}}$. Accelerația gravitației $g = 10$ m/s^2.

Răspuns: Neglijînd rezistența aerului rezultă $v_c = 10\sqrt{3}$ m/s $\approx 17{,}3$ m/s orizontală, $x_c \approx 10\sqrt{3}$ m $= 17{,}3$ m, $h_c = h + y_c = 45$ m, $t_c = 1$ s,

$v_B = 20\sqrt{3}$ m/s$\approx$34,6 m/s înclinată sub unghiul $\beta=60°$ față de orizontală, $x_B = 40\sqrt{3}$ m $\approx$ 69,3 m, $t_B = 4$ s.

Dacă ținem seamă de rezistența aerului, rezultă $v_c \approx 14{,}4$ m/s, $x_c = 14{,}4$ m, $h_c \approx 44{,}6$ m, $t_c \approx 0{,}912$ s, $v_B=26{,}2$ m/s, $\beta \approx 73°28'$, $x_B=49{,}2$ m,

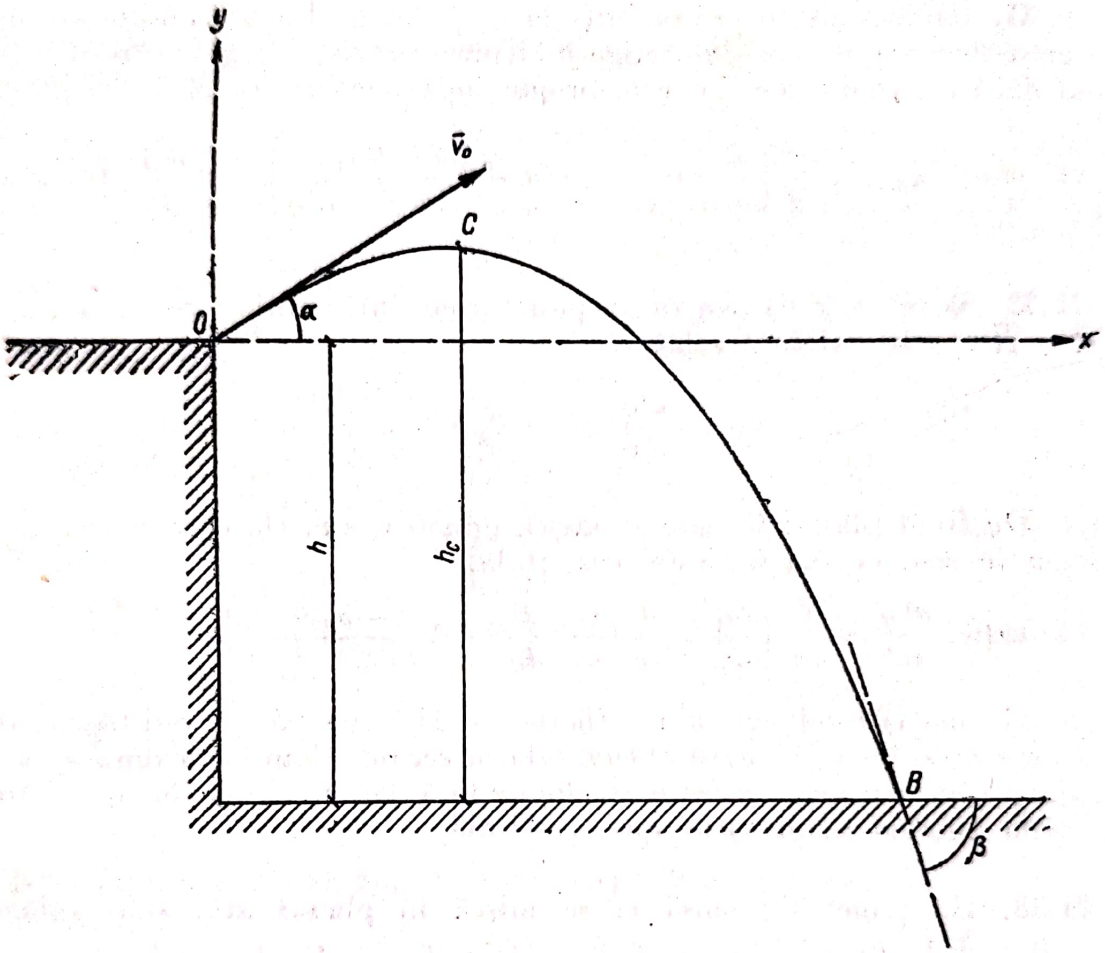


Fig. 21.29

$t_B = 4{,}21$ s. Efectul rezistenței aerului este destul de important, corpul căzînd pe sol cu aproximativ 20 m mai aproape de turn.

21.30. Două corpuri grele avînd aceeași masă m se mișcă pe verticală întîmpinînd rezistența aerului proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$. Primul este lansat de pe sol din punctul O cu viteza v_0 pe verticală în sus, în momentul în care al doilea este lăsat să cadă fără viteza inițială de la înălțimea y_0. Să se determine unde și în ce moment t se vor întîlni corpurile.

Răspuns. Alegînd axa Oy pe verticală în sus, legile de mișcare ale corpurilor sînt $y = \frac{v_1}{g}(v_0 + v_1)\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_1}}\right) - v_1 t$ și $y = y_0 + \frac{v_1^2}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_1}}\right) - v_1 t$ $\left(\text{unde } v_1 = \frac{mg}{h} \text{ este viteza-limită}\right)$; punctul de întîlnire are

ordonata $y_1 = y_0 \left(1 + \frac{v_1}{v_0}\right) - v_1 t_1$, și $t_1 = \frac{v_1}{g} ln \frac{v_1 v_0}{v_1 v_0 - y_0 g}$. Pentru ca întîlnirea să fie posibilă trebuie ca $v_0 > \frac{y_0 g}{v_1}$.

21.31. Cunoscîndu-se viteza inițială $\bar{v}_0$ și unghiul α de lansare ale unui corp greu de masă m să se determine înălțimea maximă y_{max} la care se ridică corpul dacă rezistența aerului este proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$.

Răspuns: $y_{max} = \frac{v_1^2}{g}\left(\frac{v_0}{v_1} \sin \alpha - ln \frac{v_0 \sin \alpha + v_1}{v_1}\right)$; $v_1 = \frac{mg}{h}$ fiind viteza-limită.

21.32. Să se arate că pentru un punct greu întîmpinînd rezistența aerului $\bar{R} = \bar{R}(\dot{v})$ este valabilă relația:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2},$$

planul xOy fiind planul în care se mișcă punctul, axa Oy este orientată pe verticală în sus, și axa Ox este orizontală.

Indicație. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{v_x a_y - a_y a_x}{\overset{3}{x}}$.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) pe axele Ox și Oy și înlocuind expresiile lui a_y și a_x se obține relația cerută. Cum totdeauna $a_x < 0$, v_x scade, deci curbura traiectoriei îndreptată pe verticală în jos scade, traiectoria tinzînd asimptotic spre verticală.

21.33. Un punct de masă m se mișcă în planul xOy sub acțiunea forței $\bar{F} = \frac{k}{y^3}\bar{j}$. Să se arate că independent de condițiile inițiale punctul descrie o conică.

Indicație. Din ecuația (21.3) proiectată pe axa Ox rezultă:

$\frac{dx}{dt} = v_{0x} = \text{const}$, și cum $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left[\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right] = v_{0x}^2 y'\frac{dy'}{dy}$ din ecuația (21.3) proiectată pe Oy rezultă succesiv $m v_{0x}^2 y'\frac{dy'}{dy} = \frac{k}{y^3}$, $y' = \pm$

$$\pm\sqrt{\frac{v_{0y}^2}{v_{0x}^2} + \frac{k}{m v_0^2}\left(\frac{1}{y_{0x}^2} - \frac{1}{y^2}\right)}, \left(v_{0y}^2 + \frac{k}{m y_0^2}\right) y^2 - \frac{k}{m} - v_{0y} y_0 \pm \left[\frac{(x-x_0)\left(v_{0y}^2 + \frac{k}{m y_0^2}\right)}{v_{0x}}\right]^2 = 0.$$

Ecuația traiectoriei fiind un polinom de gradul al doilea în x și y, traiectoria va fi o conică.

Capitolul XXII

FORȚE CENTRALE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Se numește forță centrală o forță al cărei suport trece printr-un punct fix O denumit *pol*. Expresia ei este:

$$\bar{F} = F\,\bar{\rho}, \tag{22.1}$$

unde F este scalarul forței centrale care acționează asupra punctului P (22.1), (fig. 22,*a*), și $\bar{\rho}$ — versorul direcției OP. Dacă $F > O$, forța este repulsivă și dacă $F < O$, forța este atractivă.

Dacă un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, traiectoria punctului este plană și mișcarea se face cu viteza areolară Ω constantă:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \tag{22.2}$$

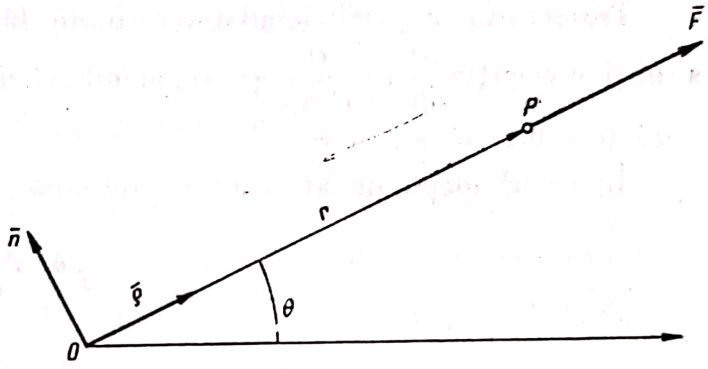


Fig. 22, *a*

Mișcarea punctului se poate studia:

a) cu ajutorul ecuației fundamentale a dinamicii:

$$m\bar{a} = \bar{F} \tag{22.3}$$

ale cărei proiecții în coordonate polare (fig. 22,*a*) sînt:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho = F$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_n = 0 \tag{22.4}$$

b) cu ajutorul ecuației lui Binet:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2}, \tag{22.5}$$

în care:

r, θ sînt coordonatele polare ale punctului;

m este masa punctului și

$$C = r^2\dot{\theta} = r \cdot v_n \tag{22.6}$$

este constanta ariilor (dublul vitezei areolare $C = 2\,\Omega$).

Cu ajutorul ecuației lui Binet se poate determina forța F dacă se cunoaște traiectoria, și dacă se cunoaște F, prin integrare se determină ecuația diferențială a traiectoriei:

$$r = r(\theta,\ C_1,\ C_2),$$

constantele de integrare determinîndu-se cu ajutorul condițiilor inițiale care se pun în ecuația precedentă și în ecuația obținută prin derivarea ei în raport cu θ sau cu timpul t. Reamintim expresiile componentelor vitezei în coordonate polare

$$v_\rho = \dot{r};\quad v_n = r\dot{\theta}. \tag{22.7}$$

Traiectoria $r = r(\theta)$ fiind determinată, făcînd înlocuirile în ecuația (22.6) se obține ecuația $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2(\theta)}$ și separînd variabilele θ și t rezultă $t = t(\theta)$ și apoi $\theta = \theta(t)$ și $r = r(t)$.

În cazul forței de atracție newtoniană

$$F = -f\frac{mM}{r^2}, \tag{22.8}$$

unde $f = 6{,}664 \times 10^{-8}$ CGS este constanta atracției universale;

m, M sînt masele corpurilor care se atrag;

r este distanța dintre cele două corpuri.

Traiectoria este o conică a cărei ecuație în coordonate polare, raportată la focarul O în care se găsește corpul de masă M, este

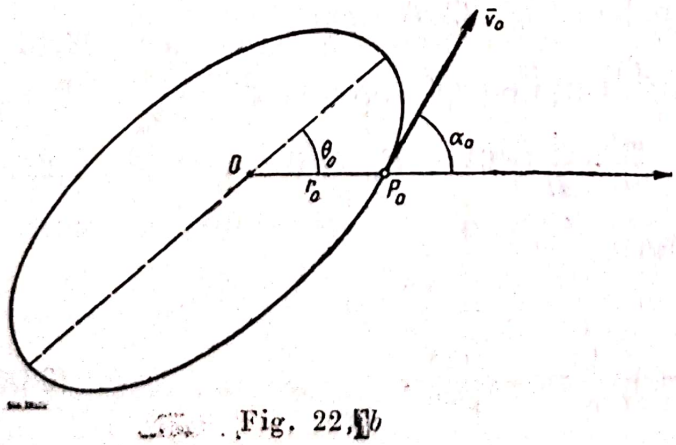


Fig. 22,b

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{22.9}$$

unde

$$p = \frac{C^2}{f\cdot M}\quad e = 1 + \frac{r_0 v_0^2 \sin^2\alpha_0 (r_0 v_0^2 - 2fM)}{f^2 M^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{r_0 v_0 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{fM - r_0 v_0^2 \sin^2\alpha} \tag{22.10}$$

α_0 fiind unghiul dintre raza vectoare $r_0 = OP_0$ și viteza v_0 din momentul inițial (fig. 22,b).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă excentricitatea

$$\left.\begin{aligned} e<1, \quad & v_0^2<\frac{2fM}{r_0}, \text{ traiectoria este o elipsă;} \\ e=1, \quad & v_0^2=\frac{2fM}{r_0}, \text{ traiectoria este o parabolă;} \\ e>1, \quad & v_0^2>\frac{2fM}{r_0}, \text{ traiectoria este o hiperbolă.} \end{aligned}\right\} \tag{22.11}$$

În cazul sateliților pământului,

$$fM = gR^2, \tag{22.12}$$

unde M este masa, iar $R = 6\,370$ km — raza pământului.

B. PROBLEME REZOLVATE

22.1. Asupra unui punct A de masă m acționează forța centrală atractivă $F = -\frac{2m\,C^2}{r^3}$, unde C este dublul vitezei areolare. Știind că în momentul inițial unghiul dintre viteza $\bar{v}_0$ și raza sa vectoare $\bar{r}_0$ este $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare:

Metoda I. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (22.4) pe axele unui sistem de coordonate polare, obținem:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{2m\,C^2}{r^3}; \tag{1}$$

$$\frac{m}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta}) = 0. \tag{2}$$

Din ecuația (2) rezultă

$$r^2\dot{\theta} = C \tag{3}$$

mișcarea producîndu-se cu viteză areolară constantă, iar din ecuațiile (1) și (3) obținem:

$$\ddot{r} = -\frac{C^2}{r^3},$$

ecuație care amplificată cu $2\dot{r}$ și integrată devine:

$$\dot{r}^2 = \frac{c^2}{r^2} + C_1. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile inițiale ale mișcării (fig. 22.1) fiind

$$t = 0 \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} v_\rho = \dot{r} &= v_0 \sin \alpha_0 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_n = r\dot{\theta} &= v_0 \cos \alpha_0 = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dot{\theta} &= \frac{v_n}{r} + \frac{v_0 \sqrt{2}}{2r_0} \end{aligned} \tag{5}$$

rezultă din (22.6) și din (4)

$$C = r\, v_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\, r_0 v_0 \tag{6}$$

și $C_1 = 0$, deci:

$$\dot{r} = \frac{C}{r} = \frac{\sqrt{2}\, r_0 v_0}{2r}. \tag{7}$$

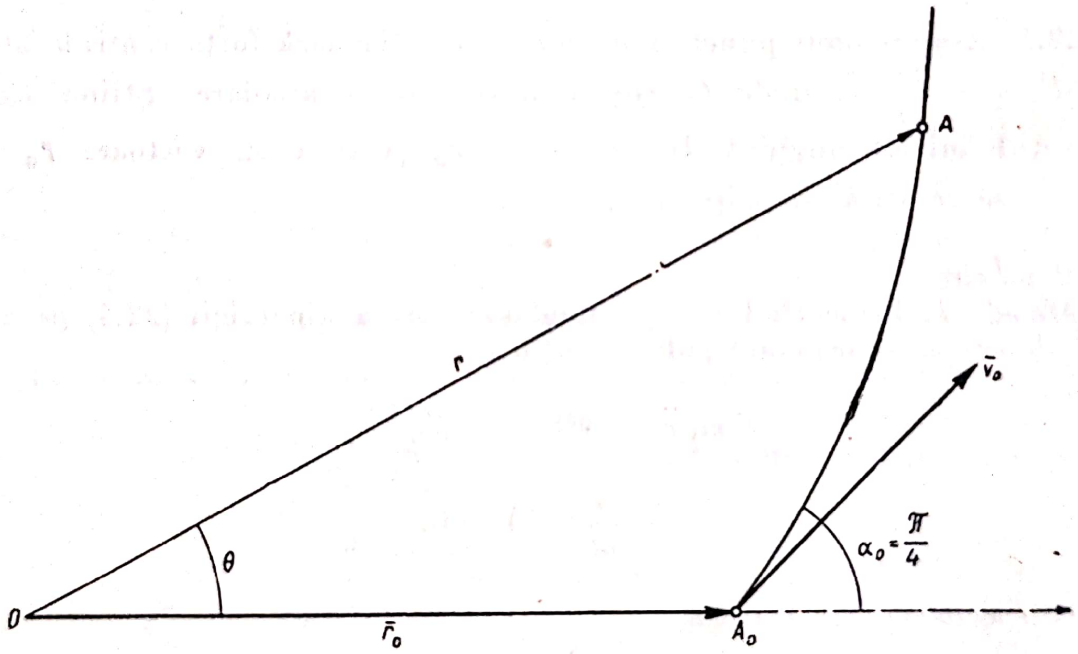


Fig. 22.1

Separînd variabilele r și t $\left(r = \frac{dr}{dt}\right)$, integrînd și ținînd seamă de condițiile inițiale (5) rezultă:

$$r = \sqrt{\sqrt{2}\, r_0 v_0 t + r_0^2}. \tag{8}$$

Cum din (3) și (8)

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{\sqrt{2}\, r_0\, v_0}{2\,(\sqrt{2}\, r_0\, v_0\, t + r_0^2)},$$

separînd variabilele θ și t, integrînd și ținînd seamă de (5), rezultă:

$$\theta = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}\, v_0\, t}{r_0}\right). \tag{9}$$

Eliminînd timpul t între ecuațiile (8) și (9) se obține ecuația traiectoriei în coordonate polare:

$$r = \sqrt{r_0^2\left(1 + \frac{\sqrt{2}\, v_0\, t}{r_0}\right)} = \sqrt{r_0^2\, e^{2\theta}} = r_0\, e^{\theta}, \tag{10}$$

o spirală logaritmică.

Metoda a II-a. Se determină traiectoria punctului cu ajutorul formulei lui Binet (22.5), a cărei expresie devine:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\left(-\frac{2mC^2}{r^3}\right) \cdot \frac{r^2}{mC^2},$$

de unde:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} - \frac{1}{r} = 0. \tag{11}$$

Ecuația (11) este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți în $\frac{1}{r}$ și θ, a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 - 1 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 1$ și a cărei integrală generală este:

$$\frac{1}{r} = A\, e^{\theta} + B\, e^{-\theta}. \tag{12}$$

Derivînd ecuația (12) în raport cu timpul t,

$$\frac{-\dot{r}}{r^2} = (Ae^{\theta} - Be^{-\theta})\dot{\theta}$$

și ținînd seamă de condițiile inițiale (5), se obține sistemul:

$$\frac{1}{r_0} = A + B \qquad \frac{-\sqrt{2}\, v_0}{2\, r_0^2} = (A - B)\, \frac{v_0\sqrt{2}}{2r_0},$$

de unde $A = 0$ și $B = \frac{1}{r_0}$ și substituind în (12) se regăsește ecuația (10)

$$r = r_0 e^{\theta}. \tag{13}$$

Pentru a găsi legile de mișcare pe traiectorie $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, se folosește ecuația (22.6), care ținînd seamă de (10) devine:

$$r_0^2\, e^{2\theta}\, \frac{d\theta}{dt} = C.$$

Integrînd-o și ținînd seamă de (5) și (6) rezultă

$$e^{2\theta} = 1 + \sqrt{2}\, \frac{v_0}{r_0}\, t,$$

deci $\theta = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\, \frac{v_0 t}{r_0}\right.$ și înlocuind în (10) $r = \sqrt{\sqrt{2}\, r_0\, v_0\, t + r_0^2}$.

Astfel au fost regăsite, pe altă cale, legile de mișcare (8) și (9).

22.2. Un punct material este respins de un centru fix cu o forță care variază după legea lui Newton $F = \frac{mk}{r^2}$. Să se determine traiectoria punctului.

Rezolvare. Se determină traiectoria punctului cu ajutorul formulei lui Binet (22.5):

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{mk}{r^2} \cdot \frac{r^2}{mC^2} = -\frac{k}{C^2}. \tag{1}$$

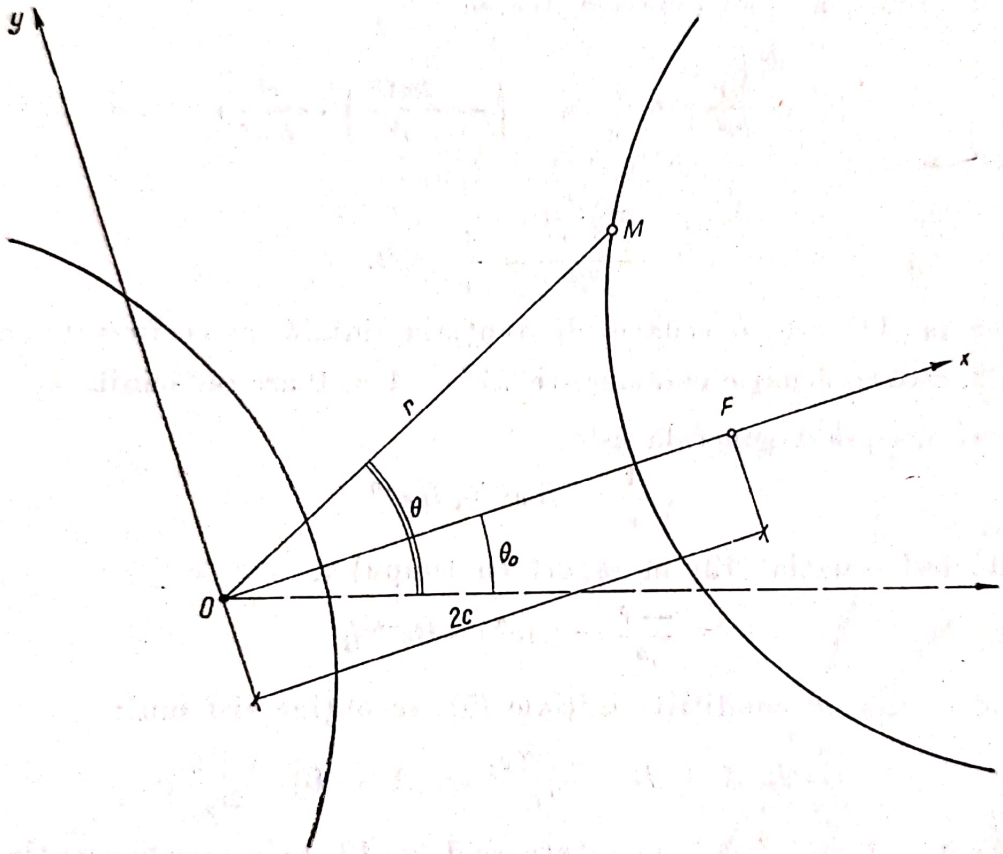


Fig. 22.2

Integrala generală a ecuației (1) este:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) - \frac{k}{C^2}, \tag{2}$$

de unde:

$$r = \frac{p}{e\cos(\theta - \theta_0) - 1}, \tag{3}$$

unde s-a notat:

$$p = \frac{C^2}{k} \quad \text{și} \quad e = \frac{AC^2}{k}. \tag{4}$$

Ecuația (3) reprezintă ecuația în coordonate polare a unei conice. Într-adevăr, raportînd-o la sistemul de axe carteziene xOy din figura 22.2, rezultă:

$$x = r\cos(\theta - \theta_0) = \frac{p\cos(\theta - \theta_0)}{e\cos(\theta - \theta_0) - 1};$$

$$y = \frac{p\sin(\theta - \theta_0)}{e\cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

și eliminînd parametrul $\theta - \theta_0$, rezultă:

$$x^2(e^2 - 1) - y^2 - 2epx + p^2 = 0,$$

ecuația unei hiperbole, deoarece din condiția inițială $t = 0$, $r = r_0$, rezultă din (2):

$$\frac{1}{r_0} = A\cos\theta_0 - \frac{k}{C^2} \quad \frac{AC^2}{k}\cos\theta_0 = 1 + \frac{C^2}{kr_0} > 1,$$

deci

$$e = \frac{AC^2}{k} > 1,$$

și

$$\delta = \begin{vmatrix} e^2 - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - e^2 < 0.$$

Se lasă pe seama cititorului să verifice că centrul repulsiv al forței se găsește în focarul mai depărtat de mobil al hiperbolei.

22.3. Să se arate că, în cazul mișcării unui punct sub acțiunea unei forțe centrale, expresia vitezei este:

$$v = C\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r_0}} \qquad (1)$$

și constanta ariilor este:

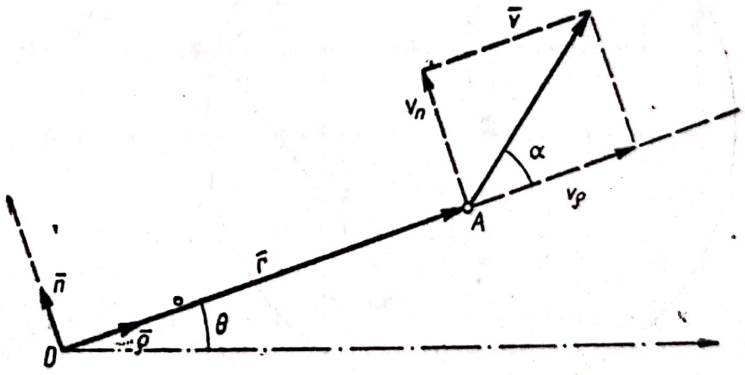


Fig. 22.3

$$C = r\,v\sin\alpha, \qquad (2)$$

unde α este unghiul dintre vectorii $\bar{r}$ și $\bar{v}$.

Rezolvare. Componentele vitezei (22.7) fiind:

$$v_\rho = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \qquad (3)$$

$$v_n = r\dot{\theta} = \frac{C}{r},$$

în care s-a ţinut seamă de relaţia (22.6), $C = r^2\dot{\theta}$.

$$\text{Însă } v = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2} = C\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r^2}}, \qquad (1)$$

constanta ariilor este:

$$C = r\,v_n = r\,v\,\sin\,\alpha,$$

deoarece $v_n = v\,\sin\,\alpha$ (fig. 22.3).

22.4. Un punct material A, de masă m, descrie o circumferinţă de rază a sub acţiunea unei forţe centrale, polul O al forţei fiind situat pe cerc.

Cunoscîndu-se constanta ariilor C, să se determine scalarul F al forţei şi viteza v a punctului, în funcţie de poziţia punctului.

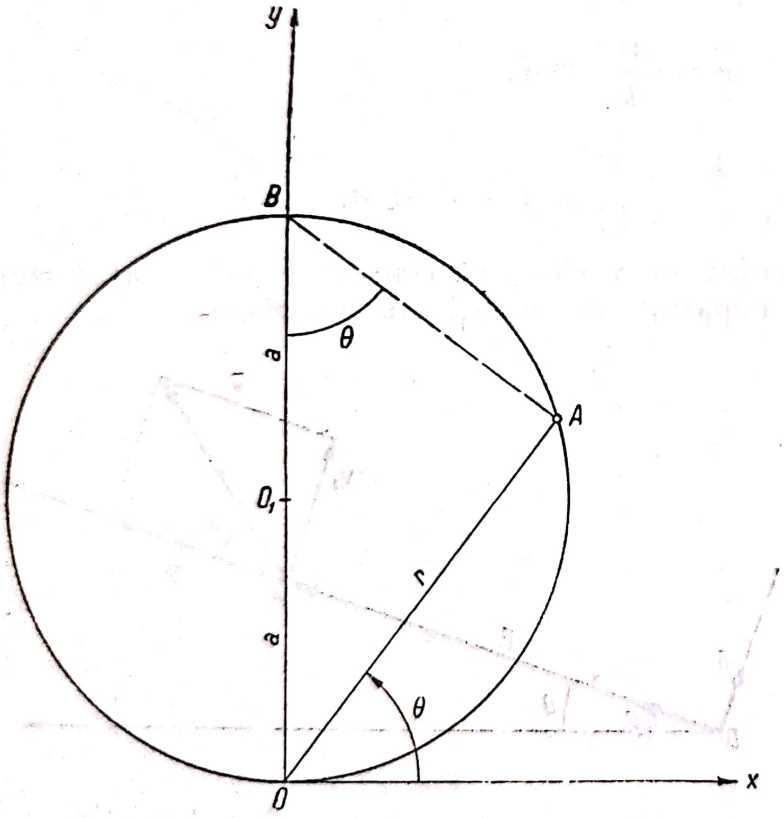


Fig. 22.4

Rezolvare. Din triunghiul OAM (fig. 22.4) rezultă ecuaţia cercului în coordonate polare:

$$r = 2a\,\sin\,\theta. \qquad (1)$$

Traiectoria fiind cunoscută aplicăm ecuaţia lui Binet (22.5). Cum

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2a\,\sin\,\theta}$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = \frac{-\cos\,\theta}{2a\,\sin^2\,\theta}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\,\theta + 2\cos^2\,\theta}{2a\,\sin^3\,\theta} \qquad (2)$$

rezultă

$$\frac{\sin^2\,\theta + 2\cos^2\,\theta}{2a\,\sin^3\,\theta} + \frac{1}{2a\,\sin\,\theta} = -\frac{Fr^2}{mC^2}$$

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\cdot\frac{2}{2a\,\sin^3\,\theta} = -\frac{8mC^2a^2}{r^5}, \qquad (3)$$

deoarece $\sin\,\theta = \frac{r}{2a}$. Forţa este atractivă şi invers proporţională cu puterea a cincea a razei vectoare.

Folosind formula (1) din problema (22.3) expresia vitezei este:

$$v = C\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r^2}} = C\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{4a^2\sin^4\theta} + \frac{1}{4a\sin^2\theta}} = \frac{C}{2a^2\sin^2\theta} = \frac{2aC}{r^2}. \quad (4)$$

22.5. Ecuația traiectoriei unui punct în coordonate polare este $r = \frac{a}{\cos\theta}$. Știind că punctul se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, să se determine această forță, viteza punctului și să se explice rezultatul.

Rezolvare.

Din formula lui Binet (22.5) rezultă:

$$\frac{d^2\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{a} = -\frac{Fa^2}{\cos^2\theta\, mC^2},$$

de unde

$$F = 0. \quad (1)$$

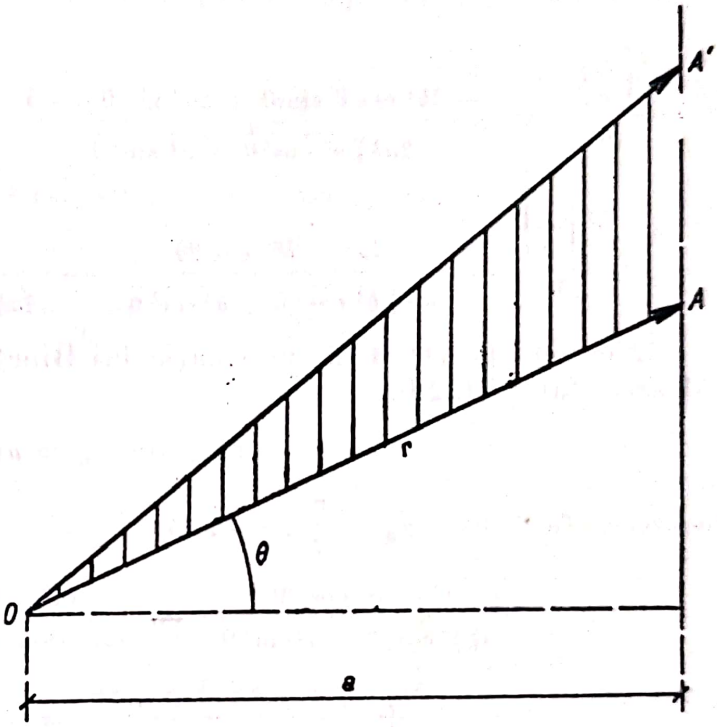


Fig. 22.5

Din formula (1) (problema 22.3):

$$v = C\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r^2}} = C\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{a^2}} = -\frac{C}{a} = \text{const.}$$

Observație. Traiectoria este dreapta $x = r\cos\theta = a$ (fig. 22.5). Mișcarea fiind provocată de o forță centrală, viteza areolară Ω este constantă. Însă:

$$\Omega = \frac{\text{aria } OAA'}{t' - t} = \frac{1}{2}\frac{AA' \cdot a}{(t' - t)} = \frac{1}{2}va = \text{const.},$$

unde AA' este spațiul străbătut de mobil în intervalul de timp (t, t') și v este viteza mobilului. Rezultă $v = \text{const.}$, mișcarea este rectilinie și uniformă, deci $F = 0$.

22.6. Un punct material A, de masă m, descrie o elipsă cu semiaxele a și b sub acțiunea unei forțe centrale având polul în centrul elipsei. Cunoscîndu-se viteza v_0 a punctului, cînd mobilul se află la extremitatea semiaxei mari, să se determine scalarul forței centrale F.

Rezolvare. Pentru aplicarea ecuației lui Binet este necesar să se stabilească ecuația traiectoriei în coordonate polare raportată la polul forței centrale.

În ecuația elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, înlocuind pe $x = r\cos\theta$ și $y = r\sin\theta$ rezultă:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}{ab}. \tag{1}$$

Prin derivare, în raport cu θ, se obține:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = \frac{-2b^2\cos\theta\sin\theta + 2a^2\sin\theta\cos\theta}{2ab\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} = \frac{(a^2 - b^2)\sin 2\theta}{2ab\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}.$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = \frac{(a^2 - b^2)\cos 2\theta}{ab\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} - \frac{(a^2 - b^2)^2\sin^2 2\theta}{4ab\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^3}} \tag{2}$$

Înlocuind pe (1) și (2) în ecuația lui Binet (22.5) și ținînd seamă și de valoarea lui C (22.6):

$$C = r_0 v_0 \sin\alpha_0 = a v_0,$$

deoarece $r_0 = a$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă:

$$\frac{(a^2 - b^2)\cos 2\theta}{ab\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} - \frac{(a^2 - b^2)^2\sin^2 2\theta}{4ab\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^3}} + \frac{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}{ab} = -\frac{Fr^2}{ma^2v_0^2}. \tag{3}$$

Făcînd calculele rezultă, pentru scalarul forței F, expresia:

$$F = -\frac{ma^2v_0^2}{r^2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^3}} = -\frac{mv_0^2}{b^2} r.$$

Se observă că forța este atractivă, mărimea ei fiind proporțională cu distanța la punctul material (forța elastică).

22.7. Un punct material, de masă m, descrie o elipsă cu semiaxa mare a sub acțiunea unei forțe de atracție newtoniene $F = -\frac{\mu m}{r^2}$, orientată spre focarul elipsei. Să se arate că pătratul vitezei punctului este dat de relația:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

unde r este mărimea razei polare.

Să se calculeze apoi viteza punctului la extremitatea axei mici a elipsei.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare.

Metoda 1. Expresia pătratului vitezei unui punct în mișcare, sub acțiunea unei forțe centrale, este (v. problema 22.3):

$$v^2 = C^2\left\{\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}. \tag{1}$$

Calculul termenilor din această formulă se face ținînd seamă de ecuația elipsei în coordonate polare (22.9), în care excentricitatea e și parametrul p sînt:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} - \frac{b^2}{a}. \tag{2}$$

Admițînd $\theta_0 = 0$, ecuația elipsei în coordonate polare va fi:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\cos\theta},$$

sau

$$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}. \tag{3}$$

Cum

$$\frac{1}{r} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}{b^2} \qquad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}\sin\theta$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}\cos\theta, \tag{4}$$

folosind ecuația lui Binet (22.5):

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\left(-\frac{\mu m}{r^2}\right)\frac{r^2}{mC^2},$$

se va obține:

$$-\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}\cos\theta + \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}{b^2} = \frac{\mu}{C^2}.$$

Făcînd calculele, constanta ariilor C are expresia:

$$C^2 = \mu\frac{b^2}{a}. \tag{5}$$

Înlocuind în (1) expresiile (3) (4) și (5) și făcînd calculele rezultă:

$$v^2 = \mu \frac{b^2}{a}\left[\frac{(a^2 - b^2)\sin^2\theta}{b^4} + \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}{b^2}\right)^2\right] =$$

$$= \mu \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}{b^4},$$

sau încă:

$$v^2 = \mu\left(2\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}{b^2} - \frac{1}{a}\right).$$

Ținînd seamă de (3) se obține expresia cerută de problemă:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{6}$$

Pentru calculul vitezei punctului la extremitatea axei mici, se va aplica această relație în care se va ține seamă că, în acest punct, $r^2 = b^2 + c^2 = b^2 + (a^2 - b^2) = a^2$ și, deci, $r = a$.

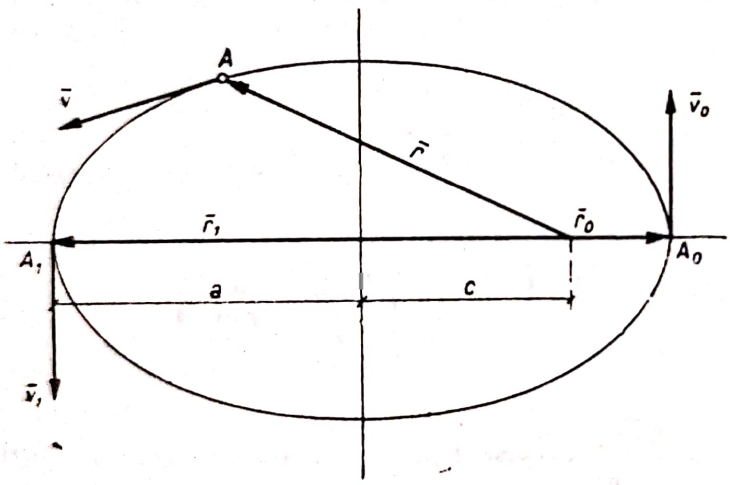


Fig. 22.7

Rezultă:

$$v_{r=a} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Metoda a 2-a. Se aplică teorema energiei cinetice (24.16) între punctele A_0 și A (fig. 22.7), ținînd seamă că funcția de forță a forței newtoniene:

$F = \frac{\mu m}{r^2}$ este $U = \frac{\mu m}{r}$ [v. formula (24.23), în care $fM = \mu$],

rezultă:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mu m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

sau

$$v^2 - v_0^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{7}$$

Pentru calculul lui v_0, se aplică relația (7) între punctele A_0 și A_1, ținînd seamă și de legea ariilor: $r_0 v_0 = r_1 v_1$.

Se poate scrie, deci,

$$\frac{v_0^2 r_0^2}{r_1^2} - v_0^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right),$$

de unde:

$$v_0^2 = 2\mu \frac{r_1}{r_0(r_0 + r_1)}.$$

Observînd că: $r_0 = a - c$ și $r_1 = a + c$, rezultă că:

$$v_0^2 = \frac{\mu(a + c)}{a(a - c)}. \tag{8}$$

Introducînd expresia lui v_0^2 în (7), unde de asemenea $r_0 = a - c$, rezultă:

$$v^2 = \frac{\mu(a + c)}{a(a - c)} + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{a - c} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

22.8. Un satelit descrie o traiectorie circulară la înălțimea h deasupra pămîntului. Se cere:

1) viteza satelitului;
2) perioada de revoluție a satelitului;
3) condiția ca satelitul să fie staționar față de pămînt.

Rezolvare.

1) Din ecuația lui Binet, scrisă pentru cazul forței de atracție universale:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = + \frac{fM}{C^2}, \tag{1}$$

ținînd seamă că în cazul traiectoriei circulare la înălțimea h deasupra pămîntului $r = R + h = \text{const.}$, rezultă:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = 0. \tag{2}$$

Ținînd seamă că $C = (R + h)v_0$, ecuația lui Binet devine:

$$\frac{1}{R + h} = \frac{fM}{(R + h)^2 v_0^2}, \tag{3}$$

de unde:

$$v_0 = \sqrt{\frac{fM}{R + h}}. \tag{4}$$

Greutatea corpurilor la suprafața pământului datorindu-se atracției universale, se poate scrie:

$$\frac{fM}{R^2} = g,$$

de unde:

$$fM = gR^2. \tag{5}$$

Formula (4) devine, deci:

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}. \tag{6}$$

2) Perioada de revoluție a satelitului se obține, pe baza legii ariilor, împărțind aria cercului la viteza areolară:

$$T = \frac{A}{\Omega}. \tag{7}$$

Ținînd seamă că aria cercului este:

$$A = \pi(R+h)^2,$$

și viteza areolară este:

$$\Omega = \frac{C}{2} = \frac{(R+h)v_0}{2} = \frac{(R+h)R\sqrt{\frac{g}{R+h}}}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{g(R+h)},$$

pentru perioada de revoluție se obține expresia:

$$T = \frac{\pi(R+h)^2}{\frac{R}{2}\cdot\sqrt{g(R+h)}} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}}. \tag{8}$$

3) Pentru ca satelitul să fie staționar față de pămînt este necesar ca el să fie lansat în același sens de rotație ca și pămîntul, și perioada de rotație să fie egală cu

$$T = 23^h56'4'' = 86\,164 \text{ s}.$$

Se poate determina înălțimea h la care trebuie să se găsească satelitul; din relația (8) rezultă $h \approx 37\,600$ km și din (6), $v_0 \approx 3$ km/s.

22.9. Un satelit, lansat la suprafața pământului într-o direcție orizontală, se găsește la apogeu la o distanță egală cu nR de centrul pământului (R — raza pământului). Se cere:

1) viteza de lansare a satelitului;
2) viteza satelitului în momentul cînd se află la apogeu;
3) durata unei perioade.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Se notează cu v_1 viteza de lansare și cu v_2 viteza la apogeu (fig. 22.9).

Aplicînd teorma energiei:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = fmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{1}$$

și legea ariilor:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2, \tag{2}$$

și înlocuind $r_1 = R$ și $r_2 = nR$, se obține sistemul de ecuații:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2fM\left[\frac{1}{nR} - \frac{1}{R}\right], \tag{3}$$

$$v_1 R = v_2 nR.$$

Rezolvînd sistemul (3) și ținînd seamă și de relația (22.12)

$$fM = gR^2, \tag{4}$$

rezultă:

$$v_1 = \sqrt{2gR}\sqrt{\frac{n}{n+1}}; \quad v_2 = \sqrt{2gR}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

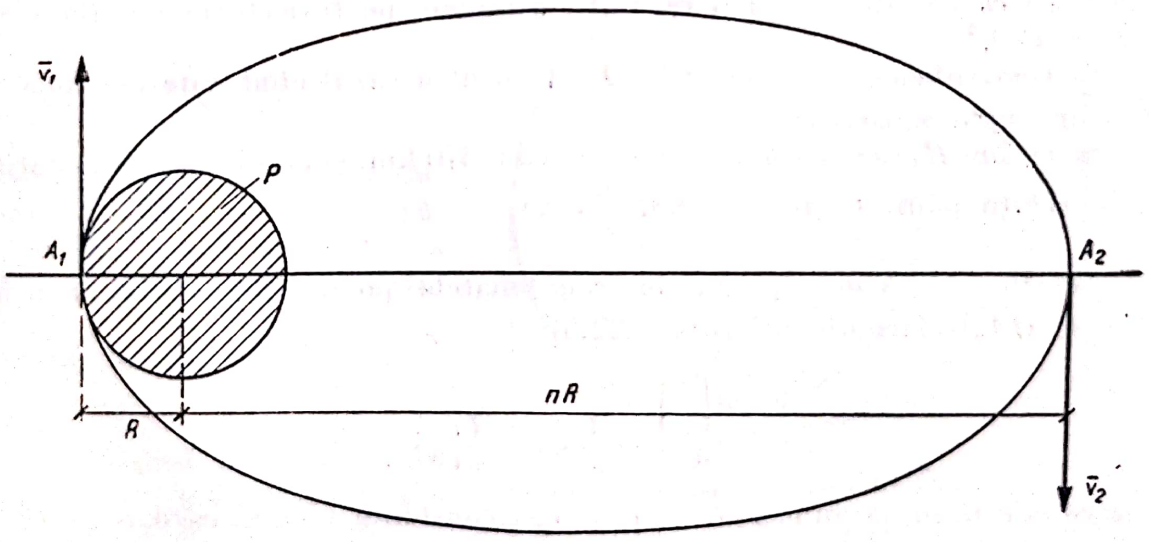


Fig. 22.9

Durata unei perioade se deduce din legea ariilor scriind că, în timp de o perioadă, aria măturată este πab, unde $a = \frac{(n+1)R}{2}$. Semiaxa b se determină observînd că:

$$c = \frac{(n+1)R}{2} - R = \frac{(n-1)R}{2}.$$

Rezultă:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{(n+1)^2R^2}{4} - \frac{(n-1)^2R^2}{4}} = R\sqrt{n}.$$

Ținînd seamă că viteza areolară are valoarea:

$$\Omega = \frac{v_1 r_1}{2} = \frac{v_2 r_2}{2} = R\sqrt{\frac{gR}{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

pentru perioada de revoluție se obține:

$$T = \frac{\pi ab}{\Omega} = \pi(n+1)\sqrt{\frac{(n+1)R}{2g}}.$$

22.10. Un punct material A este atras de pămînt după legea de atracție newtoniană. El este lansat de la înălțimea h deasupra solului cu o viteză v_0 care face unghiul de 90° cu raza vectoare inițială $\bar{r}_0 = \overline{OA_0}$, O fiind centrul pămîntului. Neglijînd rezistența aerului se cere:

1) Să se determine traiectoria lui M. Să se precizeze poziția focarului al doilea al conicii după diferitele valori ale lui v_0.

2) Condiția ca mobilul să cadă pe pămînt; în ce caz rămîne el un satelit al pămîntului?

3) Care este condiția ca mobilul să se depărteze la infinit?

4) Cum trebuie aleasă viteza v_0 pentru ca traiectoria lui M să fie circulară? În ce caz durata unei revoluții complete pe traiectoria circulară va fi $T = 24$ h?

5) Generalizarea punctelor 1), 2), 3), pentru cazul cînd viteza v face cu $\overline{OA_0}$ un unghi α oarecare.

Se va lua R, raza pămîntului, egală cu 6 370 km, și accelerația gravitației la suprafața pămîntului $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Soluții. 1) Vom aplica, în coordonatele polare $OA = r$ și $\theta = \sphericalangle(\overline{OA}, \overline{OA_0})$, formula lui Binet (22.5):

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mC^2}, \qquad (1)$$

în care m este masa punctului A, $C = r_0 v_0$ constanta vitezei areolare și F — forța centrală newtoniană de atracție spre O:

$$F = f\frac{mM}{r^2},$$

f fiind coeficientul legii de atracție universală, iar M — masa pămîntului.

Întrucît la suprafața pămîntului forța F reprezintă chiar greutatea mg a punctului, rezultă:

$$f\frac{mM}{R^2} = mg,$$

de unde

$$fM = gR^2,$$

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}.$$

Prin introducerea lui F în (1), integrarea și determinarea constantelor de integrare, se obține cunoscuta conică:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

în care

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{gR^2}; \quad e = \frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1; \quad r_0 = R + h$$

(p este parametrul conicii, e — excentricitatea conicii). Rezultă:

$$r = \frac{r_0^2 v_0^2}{gR^2\left[1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1\right)\cos\theta\right]}. \tag{2}$$

Astfel s-a obținut traiectoria punctului A (fig. 22.10).

Semiaxa a a conicii este dată de relația:

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

distanța OO_1 dintre primul focar O, aflat în centrul pământului, și cel de-al doilea focar O_1 fiind dată de relația:

$$OO_1 = 2ae = \frac{2pe}{1 - e^2}.$$

Înlocuind pe e și p prin valorile lor în funcție de condițiile inițiale, se obține:

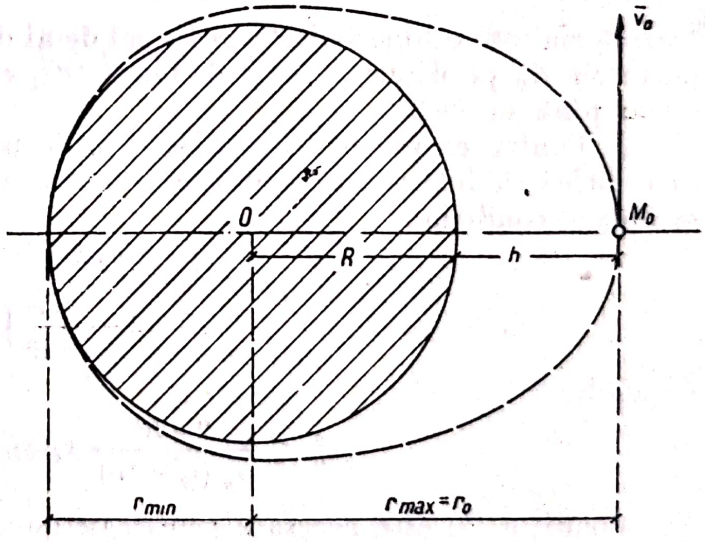


Fig. 22.10

$$OO_1 = 2r_0\frac{v_0^2 - \frac{gR^2}{r_0}}{\frac{2gR^2}{r_0} - v_0^2}, \tag{3}$$

Din (3) rezultă că, pentru

$$0 \leqslant v_0 < R\sqrt{\frac{g}{r_0}},$$

traiectoria este o elipsă ($|e| < 1$) în care focarul al doilea O_1 se află între O și A_0, distanța OO_1 este negativă și variază de la $-r_0$ pînă la zero.

Pentru

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{r_0}},$$

traiectoria devine un cerc ($e = 0$), și focarele coincid în O.

Pentru

$$R\sqrt{\frac{g}{r_0}} < v_0 < R\sqrt{\frac{2g}{r_0}},$$

traiectoria este o elipsă ($e < 1$), în care focarul al doilea O_1 se află pe direcția OA_0 de cealaltă parte a lui A_0, distanța OO_1 este pozitivă și variază de la zero pînă la plus infinit.

Pentru

$$v_0 = R\sqrt{\frac{2g}{r_0}},$$

traiectoria este o parabolă ($e = 1$).

Pentru

$$R\sqrt{\frac{2g}{r_0}} < v_0 + \infty,$$

traiectoria este o hiperbolă ($e > 1$), cel de-al doilea focar O_1 se află de aceeași parte cu A_0 pe direcția OA_0, distanța OO_1 este negativă și variază de la $-\infty$ pînă la $-2r$.

2) Pentru ca punctul material să cadă pe pămînt trebuie ca traiectoria sa eliptică să întîlnească pămîntul; pentru aceasta, luînd $\theta = 180°$, din (2) se obține condiția:

$$r_{min} = \frac{r_0^2 v_0^2}{gR^2\left(2 - \frac{r_0 v_0^2}{gR^2}\right)} \leqslant R,$$

de unde:

$$v_0^2 \leqslant \frac{2gR^3}{r_0(r_0 + R)}, r_0 = R + h. \tag{4}$$

Condiția (4) este necesară pentru ca punctul să cadă pe pămînt.

Pentru a deveni satelit al pămîntului este necesar ca viteza să fie cuprinsă între anumite valori, și anume:

$$\frac{2gR^3}{r_0(r_0 + R)} \leqslant v_0^2 < \frac{2gR^2}{r_0}. \tag{5}$$

3) Pentru ca punctul material să se poată depărta indefinit de pămînt și să poată pătrunde în spațiul interplanetar, trebuie ca viteza sa inițială v_0 să fie suficient de mare:

$$v_0^2 \geqslant \frac{2gR^2}{r_0} = \frac{2gR^2}{R + h}. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Condiția ca traiectoria să fie un cerc de rază r_0 este:

$$v_0 = R\sqrt{\frac{g}{r_0}}, \tag{7}$$

după cum s-a dedus anterior.

Dacă durata unei rotații este T, se obține:

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0}. \tag{8}$$

Rezolvînd sistemul (7), (8) în raport cu necunoscutele v_0 și r_0, rezultă:

$$v_0 = \sqrt[3]{\frac{2\pi g R^2}{T}}, \quad r_0 = R + h = \sqrt[3]{\frac{g T^2 R^2}{4\pi^2}}.$$

Numeric, pentru $T = 24$ h $= 86\,400$ s se obține:

$$v_0 = 3{,}07\ \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

$$h \approx 36\,000 \text{ km}.$$

5) Generalizarea punctelor 1), 2) și 3) se realizează ușor, urmînd raționamentul dat la rezolvarea lor.

Ecuația generală (22.9) a traiectoriei este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{9}$$

în care:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g R^2},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2 R^4}\left(v_0^2 - 2\frac{g R^2}{r_0}\right)},$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{r v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g R^2 - r_0 v_0^2 \sin^2\alpha_0}.$$

Distanța OO_1 dintre cele două focare este:

$$OO_1 = \frac{2pe}{1 - e^2} = \frac{2 g R^2}{\frac{2 g R^2}{r_0} - v_0^2}\sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2 R^4}\left(v_0^2 - \frac{2 g R^2}{r_0}\right)}.$$

Condiția ca punctul să cadă pe pămînt este:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} < R. \tag{10}$$

Această condiție este îndeplinită pentru orice viteză inițială v_0 a punctului, dacă:

$$r_0 \sin\alpha_0 < R.$$

În cazul cînd

$$r_0 \sin \alpha_0 > R,$$

pentru ca mobilul să cadă pe pămînt, inegalitatea (10) duce la condiția:

$$v_0^2 < \frac{2 g h R^3}{r_0 (r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - R^2)}.$$

Pentru ca punctul material să devină un satelit, sînt necesare următoarele condiții:

$$r_0 \sin \alpha_0 > R,$$

$$\frac{2 g h R^3}{r_0 (r_0^2 \sin^2 \alpha_0 - R^2)} < v_0^2 < \frac{2 g R^2}{r_0}.$$

Pentru ca punctul material să poată părăsi pămîntul, este necesar ca:

$$r_0 \sin \alpha_0 > R,$$

$$v_0^2 \geqslant \frac{2 g R^2}{r_0}.$$

Făcînd $\alpha_0 = 90°$, se obțin rezultate de la punctele 1), 2), 3). În acest caz particular, inegalitatea

$$r_0 \sin \alpha_0 = r_0 = R + h > R$$

este totdeauna îndeplinită.

(8) **22.11.** Să se afle mărimea v_0 și direcția α a vitezei minime cu care trebuie lansat un proiectil dintr-un punct A de pe suprafața pămîntului, pentru a atinge un alt punct T de pe suprafața pămîntului. Arcul $AT = s$ este dat (fig. 22.11).

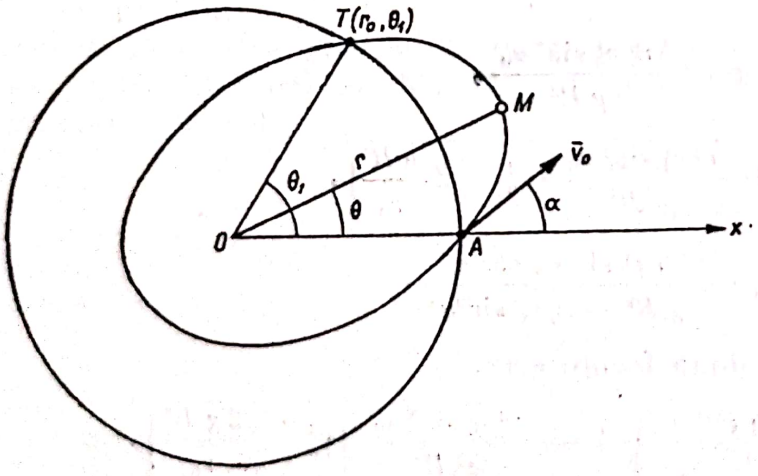


Fig. 22.11

Aplicație numerică $OA = OT = r_0 = 6\,378$ km — raza pămîntului

arc $AT = s = 12\,500$ km

(este cazul rachetei balistice sovietice lansate la 20.I.1960).

Rezolvare. Trebuie studiată, deci, mișcarea unui punct material M, de masă m, atras de centrul atractiv O (centrul pămîntului) cu o forță newtoniană $F = f\frac{Mm}{r^2}$, unde M este masa pămîntului.

În cele ce urmează se va nota: $k = fM$,

deci:

$$F = \frac{km}{r^2}.$$

Traiectoria pe care o descrie mobilul M este o conică a cărei ecuație (22.9) în coordonate polare, cu polul în O și OA ca axă polară, este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{1}$$

în care constantele p, e și θ_0 au următoarele expresii:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{k}; \tag{2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{k^2}\left(v_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right)} \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{k - r_0 v_0^2 \sin^2\alpha}. \tag{4}$$

În cazul proiectilelor balistice, $v_0^2 < \frac{2k}{r_0}$ și, deci:

$$e < 1.$$

Deci traiectoria este o elipsă.

Din relația (4) rezultă:

$$\sin\theta_0 = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta_0}} = -\frac{1}{e}\cdot\frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha; \tag{5}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta_0}} = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_0} - 1\right). \tag{6}$$

Ecuația (1) se mai scrie:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta_0\cos\theta + e\sin\theta_0\sin\theta}$$

sau, dacă se înlocuiește $\sin\theta_0$ și $\cos\theta_0$ cu expresiile lor din (5) și (6):

$$r = \frac{p}{1 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\cos\theta - \frac{p}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta}$$

sau dacă se înlocuiește și p cu expresia lui din (2):

$$r = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{k}\sin^2\alpha}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{k}\sin^2\alpha - 1\right)\cos\theta - \frac{r_0 v_0^2}{k}\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha\sin\theta}. \tag{7}$$

Ecuația (7) reprezintă familia de elipse care trece prin punctul A și depinde de doi parametri, v_0 și α.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd acum condiția ca traiectoria să treacă prin punctul T (r_0, θ_1), adică coordonatele punctului T—r_0 și θ_1 — să verifice ecuația (7), se obține:

$$r_0 = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{k} \sin^2 \alpha}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{k} \sin^2 \alpha - 1\right) \cos \theta_1 - \frac{r_0 v_0^2}{k} \sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha \sin \theta_1},$$

de unde, făcînd simplificările respective și scoțînd pe v_0^2, rezultă:

$$v_0^2 = \frac{k (1 - \cos \theta_1)}{r_0 \sin^2 \alpha (1 - \cos \theta_1 + \operatorname{ctg} \alpha \sin \theta_1)}$$

sau:

$$v_0^2 = \frac{k \sin \frac{\theta_1}{2}}{r_0 \sin \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right)}. \tag{8}$$

Relația (8) dă viteza cu care trebuie lansat mobilul din A ca să ajungă în punctul T, în funcție de α.

Deoarece k, r_0 și θ_1 (pentru arcul AT dat) sînt niște constante, rezultă că pentru ca v_0^2 să fie minim trebuie ca produsul $\sin \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right)$, care se găsește la numitor, să fie maxim.

Condiția necesară este deci:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\sin \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right)\right] = 0,$$

adică:

$$\cos \alpha \cos\left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right) - \sin \alpha \sin\left(\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right) = 0$$

sau

$$\cos\left(2\alpha - \frac{\theta_1}{2}\right) = 0,$$

de unde:

$$2\alpha - \frac{\theta_1}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

sau

$$\alpha = \frac{\theta_1}{4} + (2n + 1)\frac{\pi}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Singura valoare care corespunde problemei și face maxim produsul $\sin\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\theta_1}{2}\right)$ este aceea care corespunde lui $n=0$,

adică

$$\alpha=\frac{\theta_1}{4}+\frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Înlocuind pe α, astfel obținut, în relația (8) se află viteza minimă de lansare:

$$v_{0min}^2=\frac{k\sin\frac{\theta_1}{2}}{r_0\sin\left(\frac{\theta_1}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{4}\right)}$$

sau

$$v_{0min}^2=\frac{2k\sin\frac{\theta_1}{2}}{r_0\left(1+\sin\frac{\theta_1}{2}\right)}. \tag{10}$$

Înlocuind în relația (3) pe α cu valoarea lui din (9) și pe v_0^2 cu v_{0min}^2 din (10), se obține pentru e o relație mai simplă:

$$e=1-\frac{r_0\,v_{0min}^2}{k}=1-\frac{{}_{1}2\text{ si }\frac{n\theta_1}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{11}$$

Dacă în relația (1) se face ca $\theta-\theta_0=\pi$ și $\theta-\theta_0=0$, rezultă:

$$r_{max}=\frac{p}{1-e}, \tag{12}$$

$$r_{min}=\frac{p}{1+e}.$$

Notînd cu a semiaxa mare a elipsei, cu b semiaxa mică și cu c distanța de la centrul elipsei pînă la focar se știe că rezultă:

$$a=\frac{p}{1-e^2},\qquad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}-a\,e.$$

Aplicația numerică:

$$r_0=6\,378\text{ km};$$

arc $AT = 12\,500$ km;

$$\theta_1 = \frac{\text{arc } AT}{r_0} = \frac{12\,500}{6\,378} \approx 1{,}95986 \text{ rad} \approx 112°18'.$$

Unghiul de lansare dat de formula (9) este:

$$\alpha = \frac{\theta_1}{4} + \frac{180'}{4} = \frac{112°\,18'}{4} + \frac{180°}{4} \cong 73°\,4'.$$

Viteza de lansare este dată de relația (10), în care valoarea lui k se află ținînd seamă că la suprafața pămîntului forța de atracție $F = \frac{km}{r_0^2}$ reprezintă chiar greutatea corpului, $G = mg$.

Deci:

$$\frac{km}{r_0^2} = mg.$$

Deci:

$$k = gr_0^2 = 9{,}81 \times 10^{-3} \times 6\,378^2 \approx 399\,000 \text{ km}^3/\text{s}^2.$$

Așadar:

$$v_{0_{min}} = \sqrt{\frac{2k \sin \frac{\theta_1}{2}}{r_0\left(1 + \sin \frac{\theta_1}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 399\,000 \sin \frac{112°\,18'}{2}}{6\,378 \times \left(1 + \sin \frac{112°18'}{2}\right)}} \approx 7{,}53 \text{ km/s}.$$

Din formulele (2) și (11) se obține:

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin \alpha}{k} + \frac{6\,378^2 \times 7{,}53^2 \times \sin^2 73°4'}{399\,000} = 5\,296 \text{ km};$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2 \sin \frac{\theta_1}{2}}{1 + \sin \frac{\theta_1}{4}}} = \sqrt{1 - \frac{2 \sin \frac{112°\,18'}{2}}{1 + \sin \frac{112°\,18'}{2}}} \approx 0{,}3047.$$

Semiaxele a și b și distanța c între focare și centrul elipsei vor fi:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{5\,296}{1 - 0{,}3047^2} \approx 5\,838 \text{ km},$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{5\,296}{\sqrt{1 - 0{,}3047^2}} \approx 5\,562 \text{ km},$$

$$c = ae = 5\,838 \times 0{,}3047 \approx 1{,}778 \text{ km}.$$

Ca verificare,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5\,838^2 - 5\,562^2} \approx 1\,778 \text{ km}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relațiile (12) rezultă:

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} = \frac{5\,296}{1-0,3047} \approx 7\,616 \text{ km},$$

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = \frac{5\,296}{1+0,3047} \approx 4\,060 \text{ km}.$$

Ca verificare:

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{7\,616 + 4\,060}{2} = 5\,838 \text{ km}.$$

Înălțimea maximă, atinsă de rachetă față de pământ, este:

$$h_{max} = r_{max} - r_0 = 7\,616 - 6\,378 = 1\,238 \text{ km}.$$

Pentru a calcula viteza pe care o are racheta în punctul cel mai înalt de pe traiectorie (punctul M) se aplică teorema variației energiei cinetice între punctul A de lansare și punctul M. Se obține:

$$\frac{1}{2} m (v_M^2 - v_{0_{min}}^2) = -km \int_{r_0}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2},$$

$$v_M^2 - v_{0_{min}}^2 = 2k \frac{1}{r} \Big|_{r_0}^{r_{max}},$$

$$v_M^2 = v_{0_{min}}^2 + 2k \left(\frac{1}{r_{max}} - \frac{1}{r_0} \right),$$

sau

$$v_M^2 = v_{0_{min}}^2 - 2k \frac{r_{max} - r_0}{r_{max} r_0}.$$

Deci:

$$v_M = \sqrt{v_{0_{min}}^2 - 2k \frac{r_{max} - r_0}{r_{max} r_0}} =$$

$$= \sqrt{7,53^2 - 2 \times 399\,000 \frac{7\,616 - 6\,378}{7\,616 \times 6\,378}} \approx 6,03 \text{ km/s}.$$

Ca verificare se poate afla v_M din constanța vitezei areolare:

$$\Omega = \frac{v_M r_{max}}{2} = \frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{2};$$

$$\Omega = \frac{v_0 r_0 \sin \alpha}{2} = \frac{7,53 \times 6\,378 \sin 73^\circ 4'}{2} \approx 22\,960 \text{ km}^2/\text{s};$$

$$v_M = \frac{2\,\Omega}{r_{max}} = \frac{2 \times 22\,960}{7\,616} \approx 6,03 \text{ km/s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

22.12. Să se afle mărimea accelerației centripete a a lunii în mișcarea ei pe orbită, considerînd orbita circulară, și să se arate că această accelerație va fi egală cu accelerația g_1 a forței de atracție a pămîntului.

Se dau: accelerația forței de atracție a pămîntului $g = 9{,}81$ m/s²; raza orbitei lunii $r \approx 60\ R$, în care raza globului pămîntesc $R \approx 6\,370\,000$ m; timpul de rotație a lunii în jurul pămîntului este $T = 27$ de zile, 7 h, 43 min.

Rezolvare. Notînd cu r raza orbitei circulare a lunii, accelerația centripetă a va fi:

$$a = \frac{v^2}{r}, \tag{1}$$

unde:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\, 60\, R}{T}. \tag{2}$$

Înlocuind pe v în (1) rezultă:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2\, 60^2\, R^2}{T^2 \cdot 60\, R} = \frac{4 \times 3{,}14^2 \times 60^2 \times 6{,}37 \times 10^6}{(2{,}361 \times 10^6)^2} = 0{,}0027 \text{ m/s}^2,$$

unde $T = 27$ de zile, 7 h, 43 min $= 2{,}361 \times 10^6$ s.

Același rezultat poate fi obținut calculînd accelerația g_1 a forței de atracție a pămîntului, cunoscînd că această forță este invers proporțională cu r^2. Aplicînd ecuația $ma = F$ și ținînd seamă de relația $fM = gR^2$, se obține:

$$m g_1 = \frac{f\, m\, M}{r^2},$$

sau

$$g_1 = \frac{fM}{r^2} = \frac{g R^2}{60^2 R^2} = \frac{9{,}81}{3\,600} = 0{,}0027 \text{ m/s}^2.$$

22.13. Să se deducă următoarea formulă generală pentru mărimea unei forțe centrale:

$$F = \frac{m C^2}{2} \cdot \frac{d h^{-2}}{d r},$$

în care m este masa punctului material, r — distanța de la punct pînă la pol, C — dublul vitezei areolare și h — distanța de la pol pînă la tangenta la traiectorie în punctul considerat.

Aplicînd apoi această formulă să se arate că:

a) dacă punctul descrie o circumferință, polul aflîndu-se pe această circumferință, forța este invers proporțională cu puterea a cincea a distanței;

b) dacă punctul descrie o spirală logaritmică cu polul în centrul curbei, forța este invers proporțională cu cubul distanței.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei cinetice și legea ariilor:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r}, \tag{1}$$

$$r\,v\sin\alpha = C; \tag{2}$$

Cum $\sin\alpha = \frac{h}{r}$ (fig. 22.13,*a*) rezultă din (2):

$$v = \frac{C}{h}. \tag{3}$$

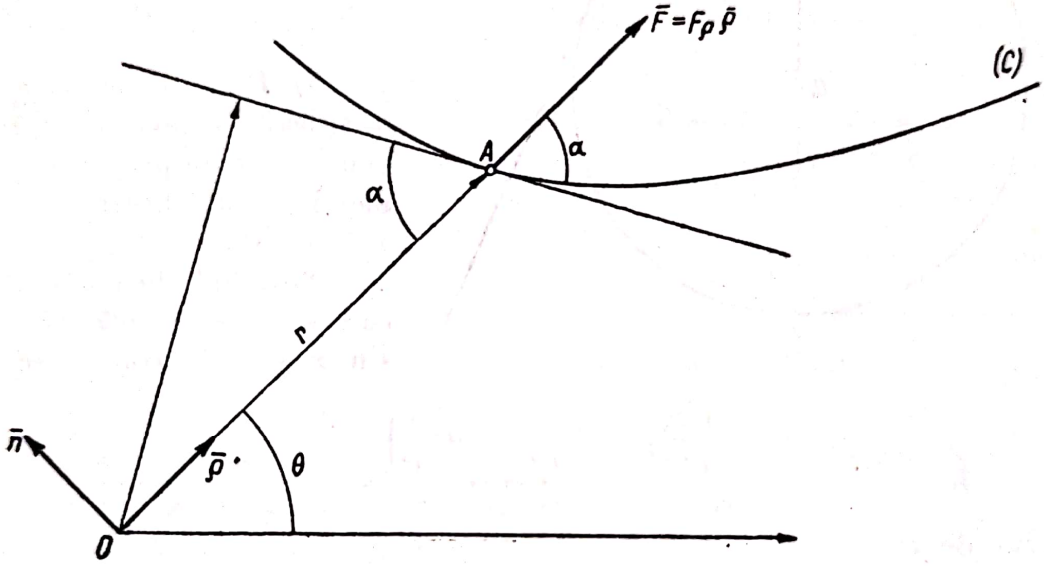


Fig. 22.13, *a*

Înlocuind această relație în (1) și scriind expresia lucrului mecanic sub forma:

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = F_\rho\,dr + F_n\,r\,d\theta = F\,dr, \tag{4}$$

deoarece $F = F_\rho$, $F_n = 0$, forța fiind centrală, se obține:

$$\frac{1}{2}m\,d\left(\frac{C^2}{h^2}\right) = F\,dr,$$

de unde:

$$F = \frac{mC^2}{2}\cdot\frac{d\left(\frac{1}{h^2}\right)}{dr} = \frac{mC^2}{2}\cdot\frac{d\,h^{-2}}{d\,r}. \tag{5}$$

a) În cazul traiectoriei circulare cu polul pe cerc, se poate scrie (fig.22.13,*b*):

$$h = r\sin\alpha = \frac{r^2}{D},$$

și deci:

$$h^2 = \frac{r^4}{D^2}.$$

Aplicînd formula generală (5) vom avea:

$$F = \frac{mC^2}{2} \cdot \frac{dh^{-2}}{dr} = \frac{mC^2}{2} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{D^2}{r^4}\right) = \frac{mC^2D^2}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r^4}\right)}{dr} = -\frac{mC^2D^2}{2} \cdot \frac{4}{r^5}.$$

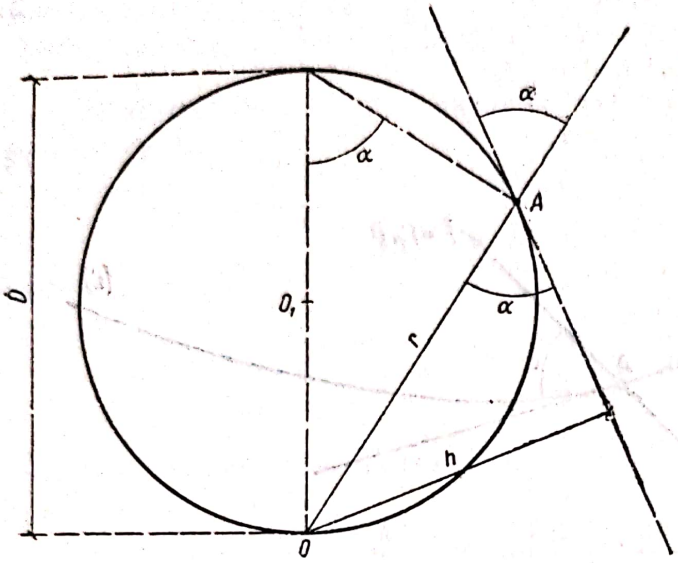


Fig. 22.13, *b*

Înlocuind pe D cu $2R$ (R — raza cercului) se obține rezultatul problemei:

$$F = -\frac{mC^2 \cdot 4R^2}{2} \cdot \frac{4}{r^5} = -\frac{8mR^2C^2}{r^5}.$$

b) Dacă traiectoria este o spirală logaritmică se va ține seamă de propritatea geometrică a acestei curbe: $\alpha = \text{const.}$

Aplicînd formula (5) în care se ține seamă că $h = r \sin \alpha$ și $\alpha = \text{const.}$, rezultă:

$$F = \frac{mC^2}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha}\right)}{dr} = \frac{mC^2}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r^2}\right)}{dr} = -\frac{mC^2}{2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{2}{r^3}.$$

Rezultă deci:

$$F = -\frac{mC^2}{r^3 \sin^2 \alpha}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

22.14. Un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale a cărei mărime este o funcție de r. Cunoscînd modulul vitezei punctului $v = \frac{a}{r}$ ($a = \text{const.}$), viteza areolară $\Omega = \frac{C}{2}$ și condițiile inițiale $\theta_0 = 0$, $r = r_0$ și $\frac{dr}{d\theta} > 0$, se cere mărimea forței centrale care acționează punctul.

Răspuns. Spirala logaritmică $r = r_0 e^{\frac{\sqrt{a^2 - C^2}}{C}\theta}$.

22.15. Un punct material, de masă m, descrie cardioida $r = a(1 + \cos \theta)$ sub acțiunea unei forțe centrale.

Să se afle mărimile forței și vitezei punctului în funcție de r, dacă pentru $\theta = 0$, viteza punctului are valoarea v_0.

Răspuns:

$$F = \frac{12m\,a^3v_0^2}{r^4}; \quad v^2 = \frac{8a^3}{r^3}v_0^2.$$

22.16. O rachetă de masă m este lansată într-un punct A situat la distanța r_0 de centrul pămîntului O și acționată numai de forța de atracție newtoniană $F = -\frac{fmM}{r^2}$. Fie D distanța rachetei la centrul O, cînd racheta este la apogeu, și d — distanța sa la perigeu.

Să se arate că viteza de lansare și unghiul de lansare, cu verticala OA a locului de lansare, sînt date de expresiile:

$$v_0^2 = 2fM\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{D+d}\right);$$

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{d \cdot D}{r_0 (D + d - r_0)}.$$

22.17. Dintr-un punct P de pe sfera O sînt aruncate simultan două corpuri identice *1* și *2*, de aceeași masă m, care merg împreună și ajung o dată în A ($OA = h$) cu aceeași viteză $\bar{v}_0$, perpendiculară pe OA. Corpul *1* își continuă mișcarea sub acțiunea forței de atracție $\bar{F}$ a centrului O, dată de expresia:

$$\bar{F} = -m\left(\frac{v_0}{h}\right)^2 \bar{r},$$

în care $\bar{r}$ este vectorul de poziție al corpului *1* în raport cu O.

Corpul *2* suportă, pe lîngă forța de atracție $\bar{F}$, și rezistența $\bar{R}$ a mediului, direct opusă vitezei și proporțională cu viteza:

$$\bar{R} = -2m\,k\,\bar{v}, \quad \left(k < \frac{v_0}{h}\right)$$

(k fiind un coeficient de proporționalitate). Să se demonstreze:

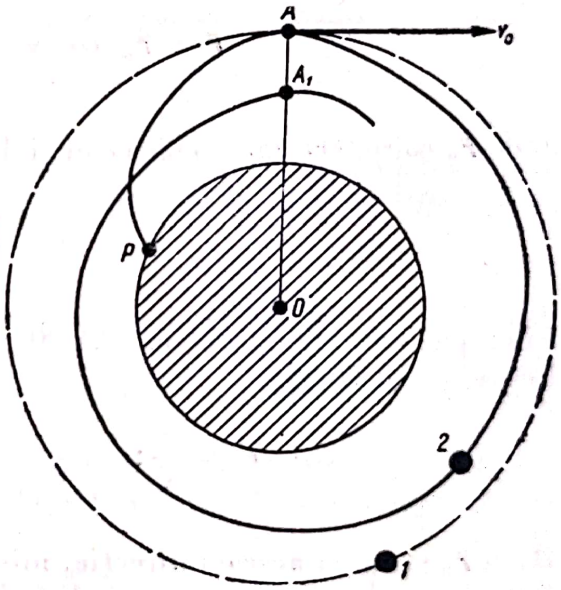


Fig. 22.17

a) corpul *1* devine un satelit permanent al sferei; corpul *2* devine un satelit temporar și rămîne în urma lui;

b) timpul necesar corpului *2*, plecat din A pentru a ajunge în A_1 pe direcția OA este:

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{v_0}{h}\right)^2 - k^2};$$

c) să se calculeze lucrul mecanic al rezistenței mediului pe parcursul AA_1 și să se arate că are mărimea

$$L = -mv_0^2\left(1 - e^{-\frac{4k\pi}{\alpha}}\right);$$

d) să se verifice legea conservării energiei.

Capitolul XXIII

FORȚE ELASTICE. MIȘCĂRI OSCILATORII

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Prin forță elastică se înțelege o forță $\bar{F}$ atractivă exercitată asupra unui punct A din partea unui punct fix O (centrul de atracție), proporțională cu distanța $OA = r$. Expresia ei vectorială este:

$$\bar{F} = -k\bar{r}, \tag{23.1}$$

constanta elastică k fiind pozitivă.

Sub acțiunea unei forțe elastice un punct material descrie o elipsă de ecuație:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t, \tag{23.2}$$

unde $\bar{r}_0$ caracterizează poziția inițială, $\bar{v}_0$ — viteza inițială,

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{23.3}$$

fiind pulsația (v. problema 21.20). Mișcarea este periodică, perioada T și frecvența f fiind:

$$T = \frac{2\pi}{\nu}; \qquad f = \frac{\nu}{2\pi}. \tag{23.4}$$

Dacă $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$ au aceeași direcție, mișcarea este rectilinie. Dacă Ox este axa pe care se mișcă punctul

$$x = x_0 \cos \nu t + \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t. \tag{23.5}$$

Această ecuație mai poate fi scrisă:

$$x = A \cos (\nu t - \varphi), \tag{23.6}$$

unde A este amplitudinea mișcării; $\nu t - \varphi$ — faza mișcării; $-\varphi$ — faza inițială, valorile lor fiind date de:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\nu^2}}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\nu x_0}. \tag{23.7}$$

Vibrograma — diagrama $x = x(t)$ acestei mișcări oscilatorii armonice este reprezentată în figura 23, *a*. Ea este o sinusoidă.

Cînd afară de forța elastică avînd centrul atractiv în C mai acționează asupra punctului A și o forță constantă $\bar{F}_0$ (de exemplu greutatea proprie a

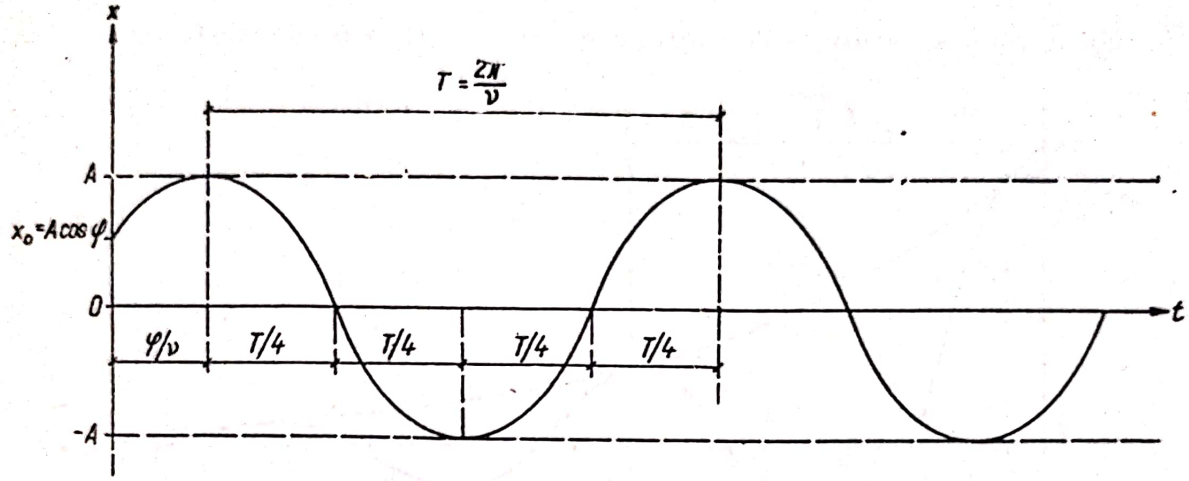


Fig. 23, *a*

punctului material), atunci punctul A descrie o elipsă sau oscilează rectiliniu în jurul centrului de oscilație O care corespunde poziției de echilibru și al cărui vector de poziție este:

$$\overline{CO} = \frac{\bar{F}_0}{k}. \tag{23.8}$$

Alegînd originea în centrul de oscilație O, legile de mișcare (23.2) și (23.5) rămîn valabile (v. problema 23.1)

Cînd asupra punctului A care are o mișcare rectilinie acționează, afară de forța elastică, o rezistență proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\,\bar{v}$, ecuația diferențială a mișcării este:

$$\ddot{x} + 2\alpha\,\dot{x} + \nu^2 x = 0, \tag{23.9}$$

unde s-a notat:

$$\alpha = \frac{h}{2m}; \qquad \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{23.10}$$

Dacă $\nu > \alpha$, soluția generală se poate pune sub una dintre formele:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t); \quad x = A\,e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi), \tag{23.11}$$

unde:

$$\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}. \tag{23.12}$$

Oscilația este amortizată avînd pseudoperioada:

$$T = \frac{2\pi}{\beta}; \tag{23.13}$$

iar decrementul logaritmic este:

$$D = \ln \frac{x\,(t)}{x\,(t+T)} = \alpha\, T\, \frac{2\pi\alpha}{\beta}. \tag{23.14}$$

În figura 23,*b* se reprezintă vibrograma $x = x(t)$ pentru acest caz.

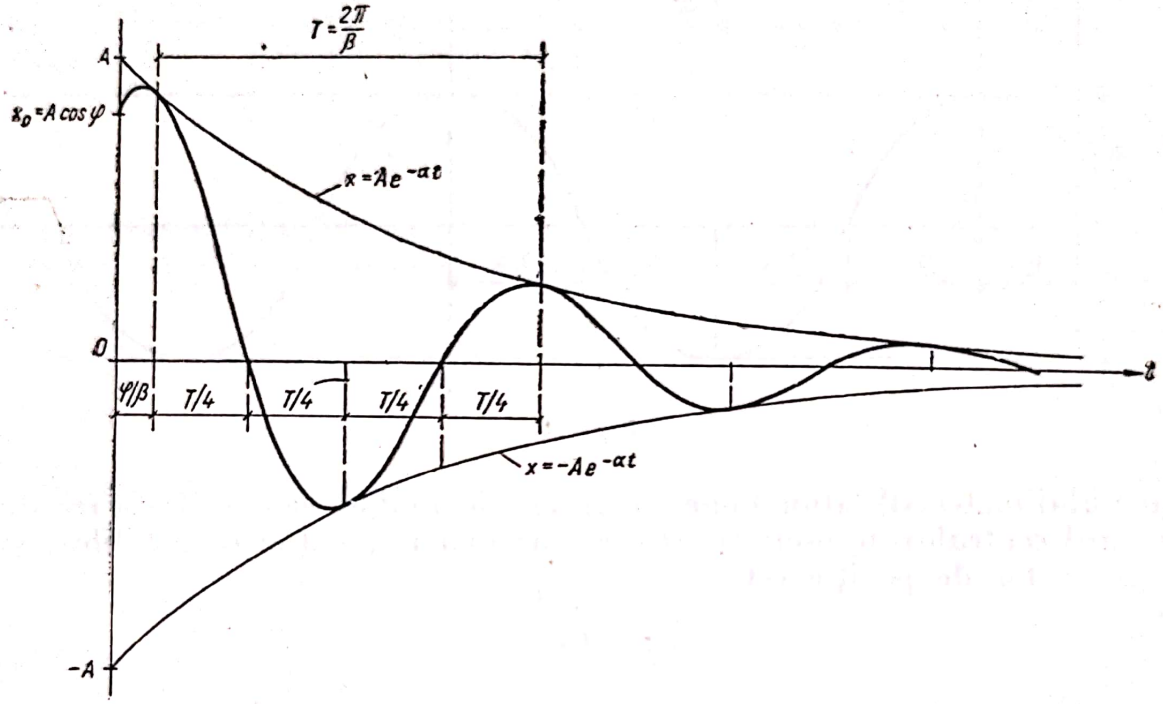


Fig. 23, *b*

Dacă $\nu < \alpha$, soluția ecuației (23.9) este de forma:

$$x = C_1\, e^{-r_1 t} + C_2\, e^{-r_2 t}, \tag{23.15}$$

unde $-r_1 = \lambda_1$ și $-r_2 = \lambda_2$ sînt rădăcinile negative ale ecuației caracteristice:

$$\lambda^2 + 2\,\alpha\,\lambda + \nu^2 = 0 \tag{23.16}$$

Dacă $\nu = \alpha$, legea de mișcare este:

$$x = e^{-\alpha t}\ (C_1 + C_2\, t). \tag{23.17}$$

În aceste două cazuri, mișcarea fiind puternic amortizată este aperiodică.

Cînd, afară de forța elastică, asupra punctului avînd o mișcare rectilinie mai acționează și o forță perturbatoare $F_p = F_0 \cos \omega\, t$, ecuația diferențială a mișcării devine:

$$\ddot{x} + \nu^2\, x = p \cos \omega\, t, \tag{23.18}$$

în care s-a notat cu $p = \frac{F_0}{m}$ și $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Pentru $\nu \neq \omega$, integrala generală a ecuației (23.18) este de forma:

$$x = A \cos(\nu t - \varphi) + \frac{p}{\nu^2 - \omega^2} \cos \omega t, \tag{23.19}$$

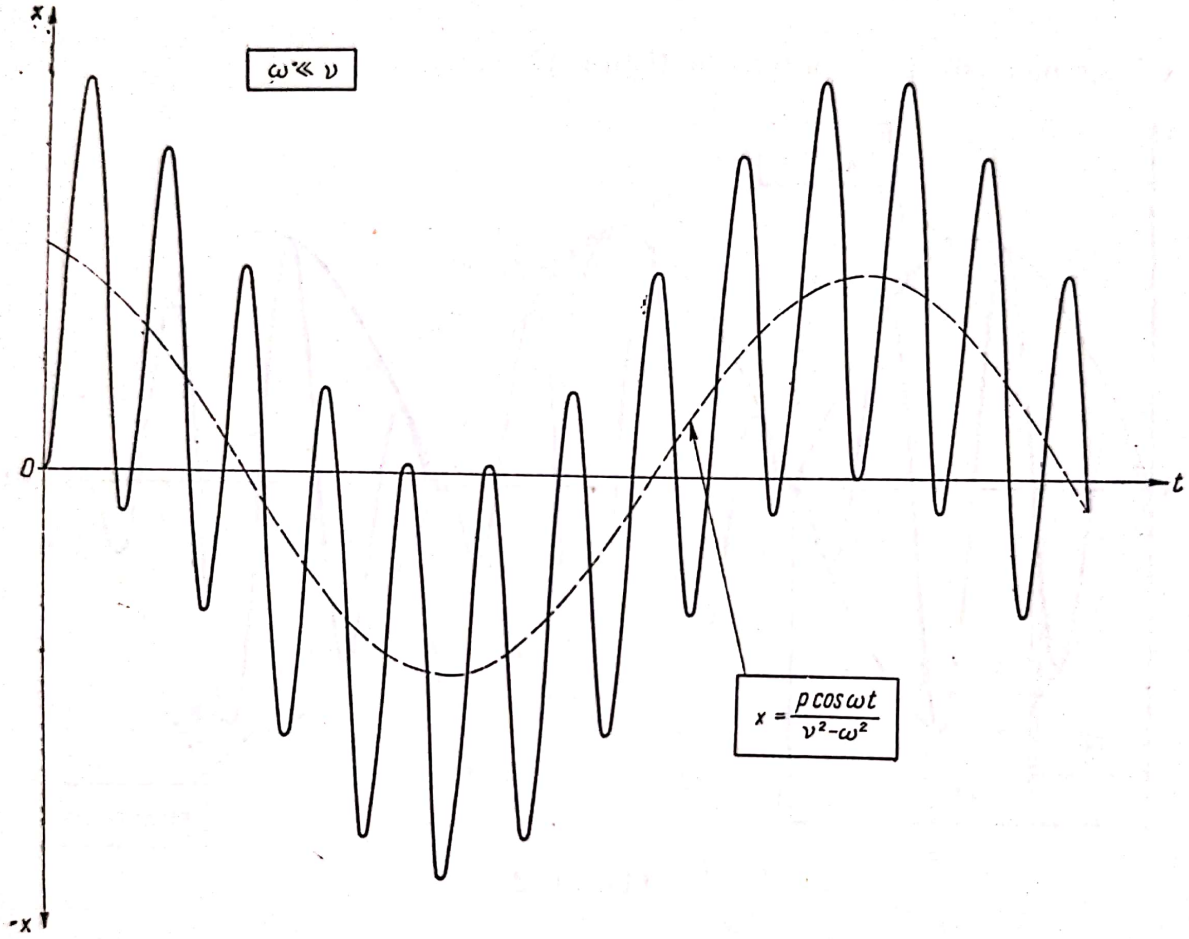


Fig. 23, *c*

și în cazul cînd condițiile inițiale sînt $t = 0$, $x = 0$, și $\dot{x} = 0$, soluția este:

$$x = \frac{p}{\nu^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \nu t), \tag{23.20}$$

pentru $\omega << \nu$ sau pentru $\omega >> \nu$, vibrograma avînd aspectul din figura 23, *c*.

Cînd $\omega \approx \nu$, apare fenomenul care are numele de *bătăi*, vibrograma avînd aspectul din figura 23, *d*. Notînd $\nu - \omega = \varepsilon$ se obține:

$$x = \frac{p}{\varepsilon\left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \sin\left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right) t \sin \frac{\varepsilon t}{2}. \tag{23.21}$$

Cînd $\omega = \nu$ apare fenomenul de rezonanţă, amplitudinea oscilaţiilor tinzînd spre infinit. Legea de mişcare este:

$$x = \frac{pt}{2\nu} \sin \nu t; \tag{23.22}$$

vibrograma este reprezentată în figura 23, *e*.

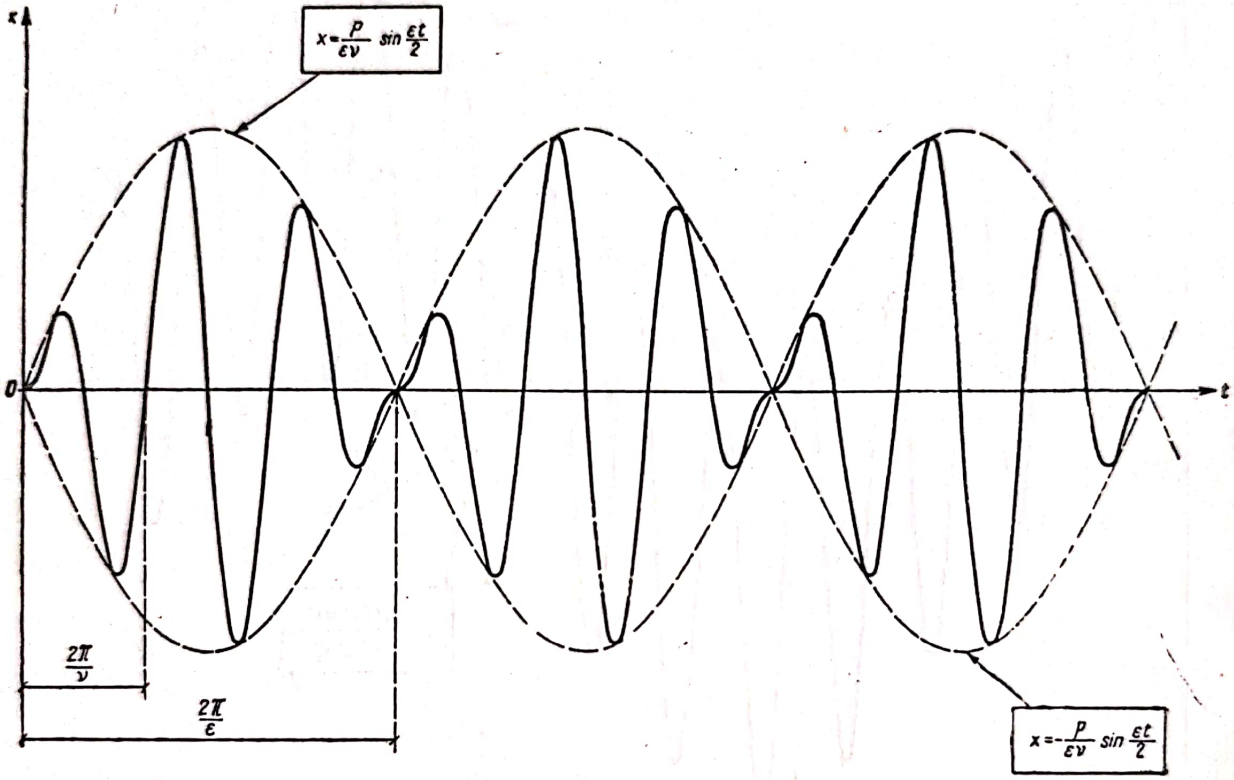


Fig. 23, *d*

Cînd afară de forţa perturbatoare se ţine seamă şi de rezistenţa mediului, proporţională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$, ecuaţia diferenţială a mişcării este:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \nu^2 x = p \cos \omega t, \tag{23.23}$$

cu integrala generală:

$$x = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) + \mathcal{A} \cos(\omega t - \Phi), \tag{23.24}$$

primul termen (oscilaţia proprie) fiind neglijabil la sfîrşitul fazei tranzitorii, iar amplitudinea $\mathcal{A}$ şi faza iniţială — Φ a oscilaţiei forţate (oscilaţie armonică) fiind date de:

$$\mathcal{A} = \frac{p}{\sqrt{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\Phi = \frac{2\alpha\omega}{\nu^2 - \omega^2}. \tag{23.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul rezonanței $\omega = \nu$, relația (23.24) devine:

$$x = A\, e^{-\alpha t} \cos\,(\beta t - \varphi) + \frac{p}{2\alpha\nu} \sin\,\nu\, t. \tag{23.26}$$

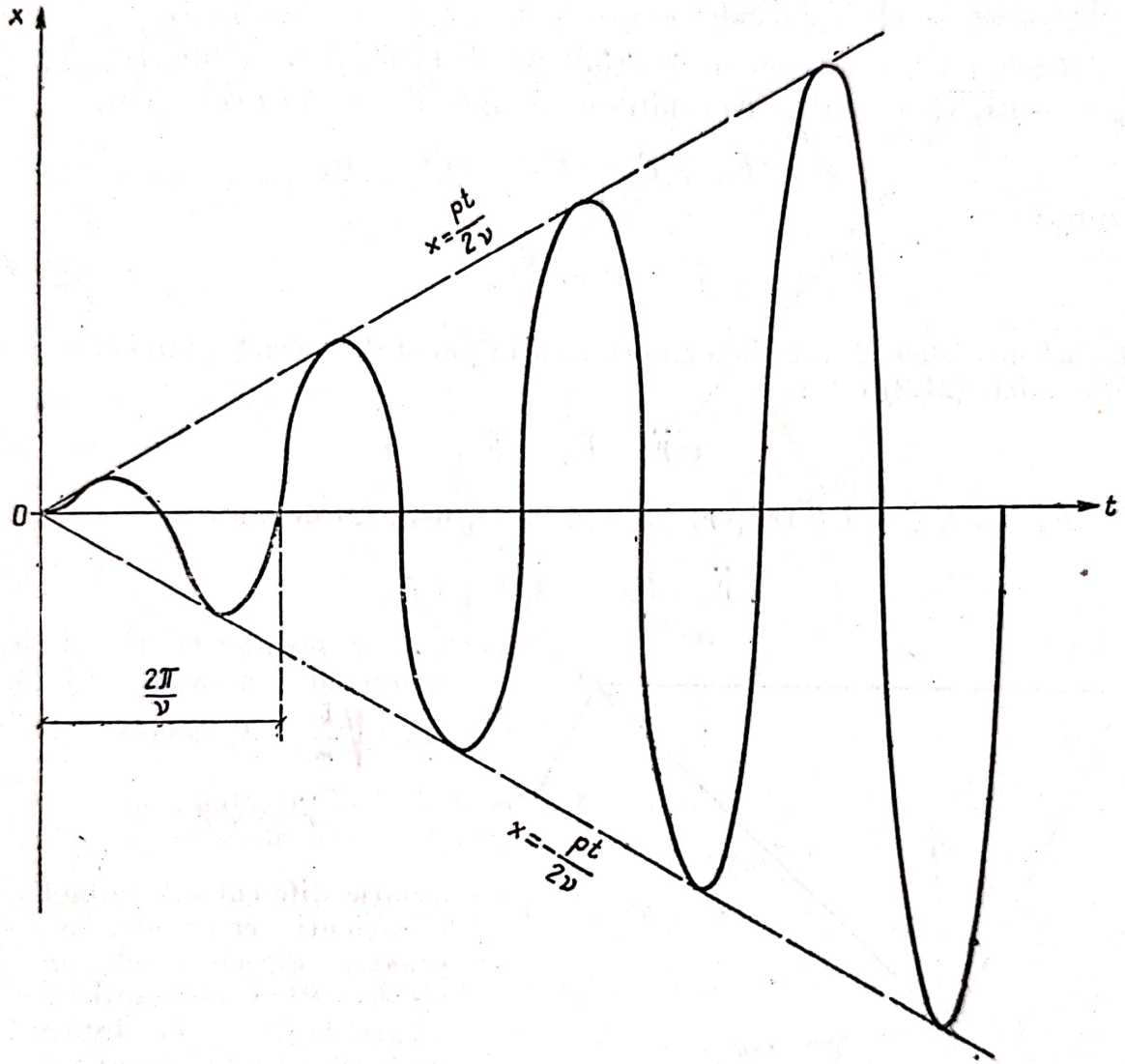


Fig. 23, *e*

Coeficientul de impact ψ este raportul dintre amplitudinea oscilației forțate $\mathcal{A}$ și deplasarea statică $x_{st} = \frac{F_0}{k}$;

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}}. \tag{23.27}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

23.1. Un punct A de masă m este acţionat de o forţă constantă $\bar{F}_0$ şi de o forţă elastică, centrul atractiv C şi constanta elastică k fiind cunoscute. Să se determine poziţia de echilibru O a punctului şi să se studieze mişcarea lui pentru nişte condiţii iniţiale oarecare.

Rezolvare. Asupra punctului acţionează forţa $\bar{F}_0$ şi forţa elastică (23.1) $\bar{F}_e = -k\overline{CA}$. În poziţia de echilibru, $A \equiv 0$, $\bar{F}_e = -k\overline{CO}$ şi cum:

$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{F}_0 + \bar{F}_e = \bar{F}_0 - k\overline{CO} = 0, \tag{1}$$

rezultă:

$$\overline{CO} = \frac{\bar{F}_0}{k}. \tag{23.8}$$

Alegînd un sistem de referinţă cu originea în punctul O, ecuaţia fundamentală a dinamicii (21.2) este:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_0 + \bar{F}_e. \tag{2}$$

însă $\bar{F}_e = -k\overline{CA} = -k(\overline{CO} + \bar{r})$ (v. fig. 23.1), deci (2) devine:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_0 - k\overline{CO} - k\bar{r}. \tag{3}$$

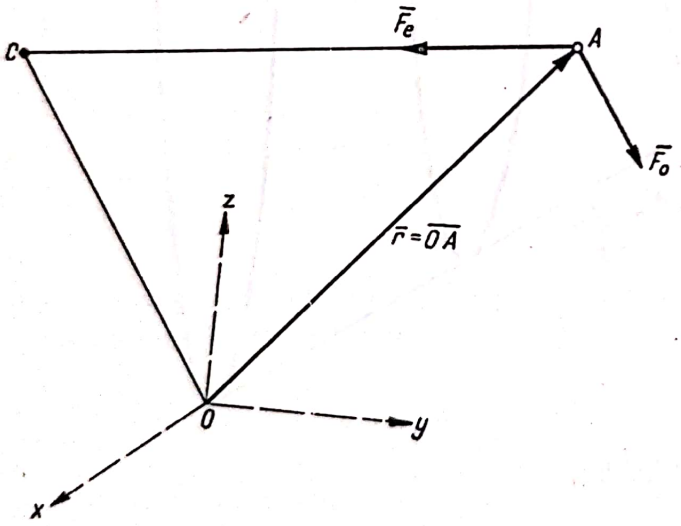


Fig. 23.1

Ţinînd seamă de (1) şi introducînd notaţia (23.3), $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$, (3) devine:

$$\ddot{\bar{r}} + \nu^2\bar{r} = 0, \tag{4}$$

ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, avînd ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + \nu^2 = 0$ cu rădăcinile imaginare $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$. Integrala generală a acestei ecuaţii este:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos \nu t + \bar{C}_2 \sin \nu t$$

şi pentru nişte condiţii iniţiale oarecare $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$ se obţine ca şi la problema 21.20:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t, \tag{23.2}$$

mişcarea avînd acelaşi caracter cu cea din problema sus-amintită, punctul A descriind — în cazul general — o elipsă cu centrul în O sau oscilînd rectiliniu în jurul lui O, dacă $\bar{r}_0 = \overline{OA}_0$ şi $\bar{v}_0$ sînt coliniare.

Observație. În toate problemele de mișcări oscilatorii este comod să se aleagă drept origine a sistemului de referință poziția de echilibru a punctului de a cărui mișcare ne ocupăm.

23.2. Să se studieze mișcarea unui punct A sub acțiunea a n forțe elastice $\bar{F}_i\,(i=1,\ldots,n)$, pozițiile centrelor de atracție $C_i\,(\overline{OC}_i=\bar{r}_i)$ și constantele elastice k_i fiind cunoscute. Ce mișcare are punctul dacă unele dintre forțele $\bar{F}_i$ sînt forțe repulsive proporționale cu distanța?

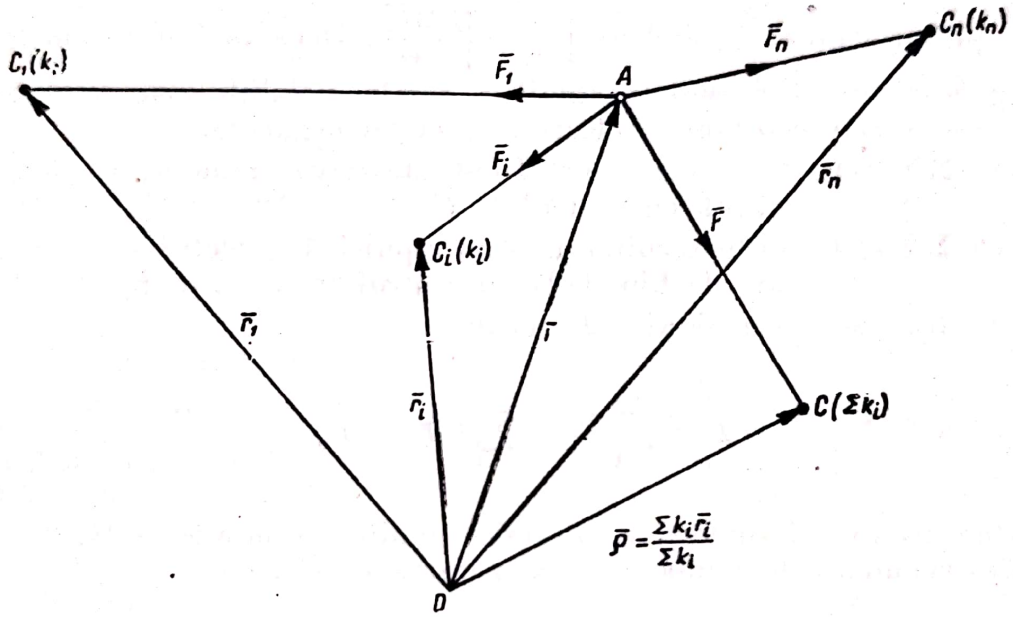


Fig. 23.2

Rezolvare. Conform (23.1) forțele elastice $\bar{F}_i\,(i=1,\ldots,n)$ care acționează asupra punctului vor avea expresia:

$$\bar{F}_i = -k_i\overline{C_iA} = k_i\,(\bar{r}_i-\bar{r}) \tag{1}$$

(v. fig. 23.2). Rezultanta $\bar{F}$ a acestor forțe va fi:

$$\bar{F}=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\,(\bar{r}_i-\bar{r})=\sum_{i=1}^{n}k_i\bar{r}_i-\bar{r}\sum_{i=1}^{n}k_i=\sum_{i=1}^{n}k_i\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}-\bar{r}\right] \tag{2}$$

Notînd:

$$k=\sum_{i=1}^{n}k_i \qquad \rho=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}, \tag{3}$$

relația (2) devine:

$$\bar{F} = k(\bar{\rho} - \bar{r}) = -k\overline{CA}, \tag{4}$$

deci punctul A este atras de punctul C de vector de poziție $\bar{\rho} = \overline{OC}$ (centrul maselor elastice) cu o forță elastică avînd constanta elastică k egală cu suma constantelor elastice k_i. Conform rezultatelor stabilite în problema (21.20), punctul A va descrie o elipsă cu centrul în C sau va oscila în jurul punctului C, pulsația mișcării fiind $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\Sigma k_i}{m}}$. Dacă unele dintre forțele $\bar{F}_i$ sînt repulsive, atunci formulele stabilite rămîn valabile, cu condiția ca pentru aceste forțe constantele elastice k_i să fie negative.

Dacă $\Sigma k_i > 0$, forța rezultantă fiind atractivă, punctul va descrie o elipsă cu centrul în C.

Dacă $\Sigma k_i < 0$, forța rezultantă fiind repulsivă, punctul va descrie un arc de hiperbolă cu centrul în C (v. problema 21.22).

Dacă $\Sigma k_i = 0$, atunci din (2) rezultă:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i = \bar{F}_0, \tag{5}$$

forța este constantă și, conform rezultatelor stabilite în problema 21.18, punctul va descrie un arc de parabolă cu axa paralelă cu $\bar{F}_0$.

23.3. Un punct A avînd greutatea $G = 3\,\text{kgf}$ este legat cu trei resorturi ideale (tensiunile resorturilor sînt proporționale cu lungimile resorturilor), avînd constantele elastice $k_1 = 2$ kgf/m, $k_2 = 4$ kgf/m, $k_3 = 6$ kgf/m de punctele C_1, C_2 și C_3 (fig. 23.3,*a*), pozițiile acestor puncte fiind determinate prin distanțele $O'C_1 = 0{,}5$, $O'C_2 = 0{,}25$m, $O'C_3 = 1$m (dreapta C_1C_2 este orizontală, iar $O'C_3$ verticală). Știind că în momentul inițial punctul A se găsește în C_3, să se determine mărimea și direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$ care trebuie imprimată punctului A pentru ca acesta să descrie un cerc. Ce mișcare are punctul dacă viteza v_0 determinată este orientată pe verticală în jos.

Rezolvare. Asupra punctului A acționează greutatea lui $\bar{G} = m\bar{g}$ și cele trei forțe elastice $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$ ale resorturilor. Conform relațiilor (3) și (4), stabilite în problema 23.2, aceste trei forțe pot fi înlocuite prin rezultanta lor $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$, o forță elastică avînd constanta elastică:

$$k = \sum k_i = k_1 + k_2 + k_3 = 12 \text{ kgf/m}, \tag{1}$$

vectorul de poziție al centrului atractiv C fiind:

$$\overline{O'C} = \bar{\rho}' = \frac{\Sigma k_i \bar{r}_i'}{\Sigma k_i} = \frac{k_1 \overline{O'C_1} + k_2 \overline{O'C_2} + k_3 \overline{O'C_3}}{k_1 + k_2 + k_3} = 0{,}5\,\bar{i}', \tag{2}$$

deoarece $\overline{O'C_1} = -0{,}5\,\bar{j}'$, $\overline{O'C_2} = 0{,}25\,\bar{j}'$, $\overline{O'C_3} = 1\cdot\bar{i}'$. Înlocuirile s-au făcut în sistemul MKfS, și drept axe de coordonate s-au ales $O'x'$ verticala descendentă $O'y'$ direcția $O'C_2$, versorii acestor axe fiind notați $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ (fig. 23.3,*a*). Punctul C se găsește pe verticala $O'x'$ la 0,5m sub punctul O'.

Cum afară de această forță elastică $\bar{F}$ mai acționează greutatea proprie (forță constantă), centrul de oscilație O este diferit de centrul atractiv C și are vectorul de poziție (23.8):

$$\overline{CO} = \frac{\bar{G}}{k} = \frac{3\,\bar{i}'}{12} = 0{,}25\,\bar{i}'. \qquad (3)$$

Deci $\overline{O'O} = \overline{O'C} + \overline{CO} = 0{,}75\,\bar{i}'$, coordonatele centrului de oscilație O față de sistemul $O'x'y'z'$ fiind:

$$x_0' = 0{,}75\ \text{m} \qquad y_0' = 0. \qquad z_0' = 0. \qquad (4)$$

Punctul A va descrie în general o elipsă cu centrul în O. Alegînd drept origine punctul O, vectorul de poziție $\bar{r}$ (23.2) și viteza $\bar{v}$ au expresiile:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = -\bar{r}_0 \nu \sin \nu t + \bar{v}_0 \cos \nu t. \qquad (5)$$

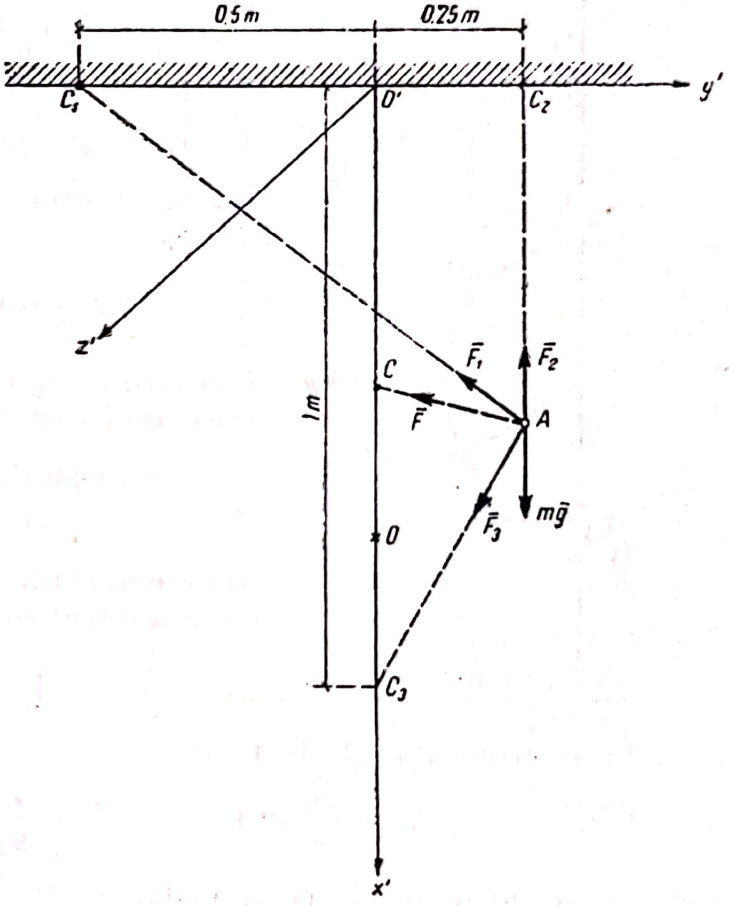


Fig. 23.3, *a*

Pentru ca traiectoria să fie un cerc, vectorii $\bar{r} = \overline{OA}$, care are direcția razei cercului și $\bar{v}$ care are direcția tangentei trebuie, să fie normali, $\bar{r}\bar{v} = 0$ (fig. 23.3,*b*), adică:

$$\bar{r}\bar{v} = \left(\frac{v_0^2}{\nu} - r_0^2\nu\right)\frac{\sin 2\nu t}{2} + \bar{r}_0\bar{v}_0 \cos 2\nu t = 0 \qquad (6)$$

pentru orice valoare a lui t. Deci trebuie ca:

$$\frac{v_0^2}{\nu} - r_0^2\nu = 0 \qquad \bar{r}_0\bar{v}_0 = 0, \qquad (7)$$

adică viteza inițială $\bar{v}_0$ să fie normală pe vectorul de poziție $\bar{r}_0$ din momentul inițial.

În momentul inițial punctul A găsindu-se în C_3 $\bar{r}_0 = x_0\,\bar{i} = \overline{OC_3}$, unde $OC_3 = O'C_3 - O'O = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ m, și este dirijat pe verticală, deci viteza inițială v_0 este cuprinsă într-un plan orizontal. Pulsația (23.3) este:

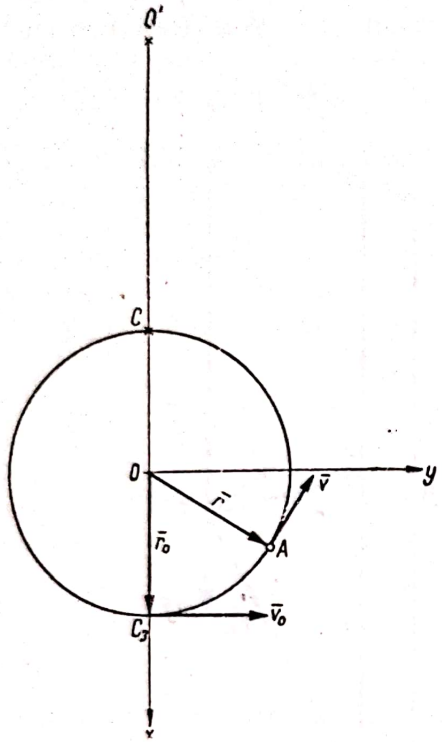


Fig. 23.3. *b*

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{\frac{3}{9{,}81}}\ \frac{\text{kgf/m}}{\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}}} = 6{,}28\ \text{s}^{-1}. \qquad (8)$$

Din prima relație (7):

$$v_0 = r_0\nu = 0{,}25 \times 6{,}28 = 1{,}57\ \text{m/s}$$

și alegînd axele Ox și Oy pe direcțiile lui $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$:

$$\bar{r} = 0{,}25\cos 6{,}28\,t\,\bar{i} + \frac{1{,}57}{6{,}28}\sin 6.28\,t\,j$$

și ecuațiile parametrice și cea carteziană a traiectoriei sînt:

$$x = 0{,}25\cos 6{,}28\,t \qquad y = 0{,}25\sin 6{,}28\,t$$
$$x^2 + y^2 = (0{,}25)^2,$$

raza cercului fiind de 0,25 m. Punctul descrie uniform cercul cu viteza:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1{,}57\ \text{m/s},$$

perioada și frecvența (23.4) fiind:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 1\ \text{s} \qquad f = \frac{\nu}{2\pi} = 1\ \text{s}^{-1}, \qquad (9)$$

adică executînd o rotație pe secundă.

Dacă $\bar{v}_0$ este orientat pe verticală în jos, $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$ fiind coliniare, mișcarea va fi o oscilație armonică pe verticala Ox, legea de mișcare (23.5) fiind:

$$x = x_0\cos\nu t + \frac{v_0}{\nu}\sin\nu t = 0{,}25\cos 6{,}28\,t + 0{,}25\sin 6{,}28\,t,$$

deoarece $x_0 = 0{,}25$ m, $\frac{v_0}{\nu} = \frac{1{,}57}{6{,}28} = 0{,}25$ m. Punînd-o sub forma (23.6):

$$x = 0{,}3535\cos\left(6{,}28\,t - \frac{\pi}{4}\right),$$

întrucît din (23.7) amplitudinea și faza inițială sînt date de:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\nu^2}} \approx 0{,}3535\ \text{m} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0}{\nu x_0} = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Pulsația, perioada și frecvența sînt date de relațiile (8) și (9), punctul executînd o oscilație completă pe secundă.

Scanned with OKEN Scanner

23.4. De un resort avînd lungimea în starea neîntinsă $l_0 = 12{,}5$ cm se atîrnă o greutate $G = 1$ kgf, resortul lungindu-se cu $\Delta l_s = 2{,}5$ cm. Se scoate greutatea din poziția de echilibru deplasînd-o cu $x_0 = 2$cm în jos și dîndu-i-se drumul fără viteză inițială.

Să se studieze mișcarea greutății determinîndu-se legea de mișcare, amplitudinea, faza inițială, pulsația, frecvența și perioada mișcării. Se neglijează rezistența mediului.

Rezolvare. Asupra corpului A acționează greutatea proprie $\bar{G} = m\bar{g}$ și tensiunea din resort $\bar{F}$ proporțională cu alungirea resortului Δl:

$$F = k\,\Delta\, l, \qquad (1)$$

k fiind constanta elastică a resortului. În poziția de echilibru aceste două forțe fiind egale:

$$k\Delta l_s = mg, \qquad (2)$$

de unde:

$$k = \frac{mg}{\Delta l_s} = \frac{1}{2{,}5}\ \text{kgf/cm}. \qquad (3)$$

Lungimea resortului în poziția de echilibru este:

$$l = l_0 + \Delta l_s = 15\text{cm}. \qquad (4)$$

Alegînd originea O în poziția de echilibru și axa Ox pe verticală în jos într-o poziție oarecare a corpului A (fig. 23.4,*a*), alungirea resortului va fi:

$$\Delta l = \Delta l_s + x,$$

deci (1) devine:

$$F = k(\Delta l_s + x). \qquad (5)$$

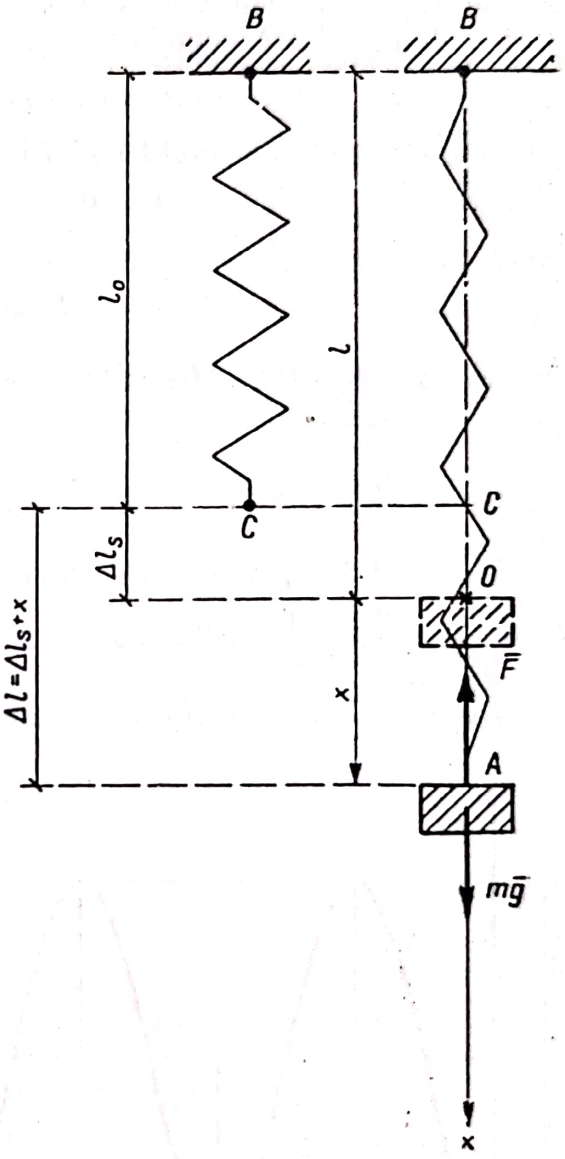


Fig. 23.4, *a*

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.3), proiectată pe axa Ox, va fi:

$$m\ddot{x} = mg - F$$

și ținînd seamă de (5) și (2) se obține succesiv:

$$m\ddot{x} = mg - k\Delta l_s - k\,x,$$

$$m\ddot{x} + k\,x = 0. \qquad (6)$$

Ținînd seamă de (3), pulsația (23.3) este:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l_s}} \qquad (7)$$

și ecuația (6) devine:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0, \tag{8}$$

ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 + \nu^2 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$ și a cărei integrală generală este:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t. \tag{9}$$

Condițiile inițiale ale problemei fiind:

$$t = 0 \quad x = x_0 \quad \dot{x} = 0, \tag{10}$$

cum:

$$\dot{x} = -\nu C_1 \sin \nu t + \nu C_2 \cos \nu t,$$

rezultă $x_0 = C_1$, $O = \nu C_2$, deci mișcarea corpului este oscilația armonică:

$$x = x_0 \cos \nu t \tag{11}$$

de amplitudine $A = x_0 = 2\text{cm}$, fază inițială — $\varphi = 0$, pulsație $\nu = \sqrt{\frac{g}{\Delta l_s}} = \sqrt{\frac{981}{2,5}} \approx 19,8\ \text{s}^{-1}$, frecvență (23.4) $f = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{19,8}{2 \times 3,14} \approx 3,15\bar{s}^1$, perioada $T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2 \times 3,14}{19,8} \approx 0,317\ \text{s}$.

Exprimată în unități din sistemul CGS, legea de mișcare (11) se va scrie:

$$x = 2 \cos 19,8t.$$

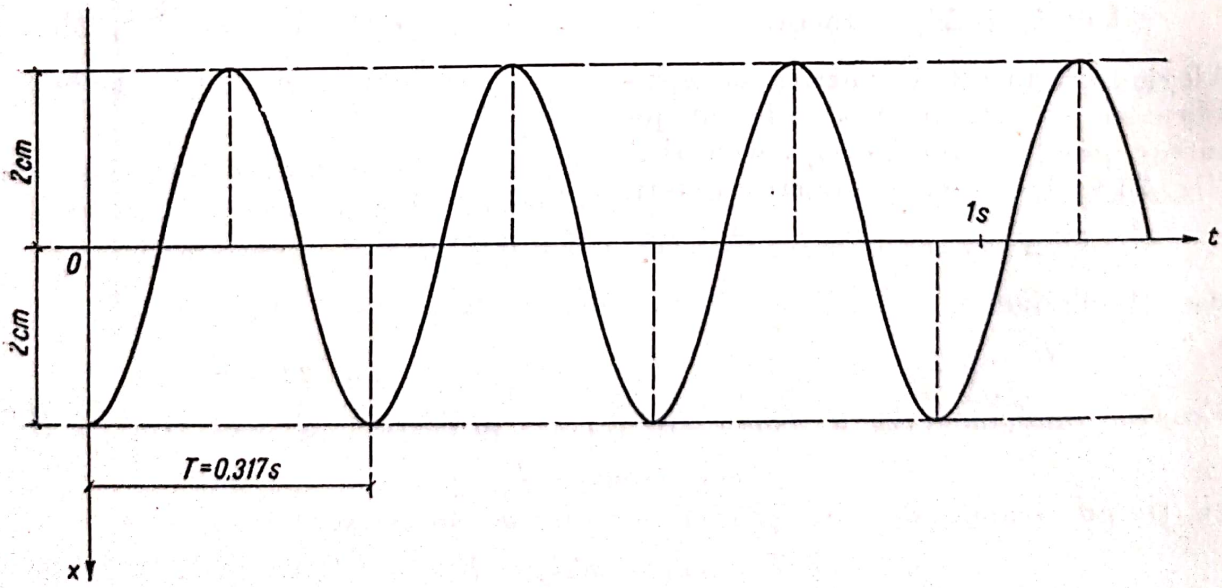


Fig. 23.4, *b*

În figura 23.4,*b* s-a reprezentat vibrograma mișcării. Se constată, ca și la problema precedentă, că oscilațiile au loc în jurul poziției de echilibru O la distanța $l = 15$ cm de punctul de suspensie superior B al resortului.

23.5. Două resorturi de constante k_1 și k_2 și de lungime în stare neîntinsă l_{10} și l_{20} sînt legate în paralel (fig. 23.5). Să se determine constanta k și lungimea în stare neîntinsă l_0 a unui resort unic echivalent. Generalizare.

Rezolvare. În poziția de echilibru este:

$$mg = F_1 + F_2, \qquad (1)$$

unde mg este greutatea corpului suspendat, iar:

$$F_1 = k_1(l - l_{10}) \quad F_2 = k_2(l - l_{20}) \qquad (2)$$

sînt tensiunile din cele două resorturi; l este lungimea resorturilor în poziția de echilibru, alungirile lor fiind $l - l_{10}$ și $l - l_{20}$. Înlocuind (2) în (1) rezultă:

$$mg = k_1(l - l_{10}) + k_2(l - l_{20}), \qquad (3)$$

$$l = \frac{k_1 l_{10} + k_2 l_{20} + mg}{k_1 + k_2}. \qquad (4)$$

Lungimea l_0 în stare neîntinsă a resortului unic, care înlocuiește sistemul de resorturi dat, se obține din relația (4) presupunînd greutatea corpului nulă $mg = 0$:

$$l_0 = \frac{k_1 l_{10} + k_2 l_{20}}{k_1 + k_2}. \qquad (5)$$

Alegînd sistemul de referință cu originea în poziția de echilibru O, iar axa Ox verticala descendentă și deplasînd corpul din poziția de echilibru, alungirile resorturilor sînt $(l - l_{10}) + x$ și $(l - l_{20}) + x$; deci:

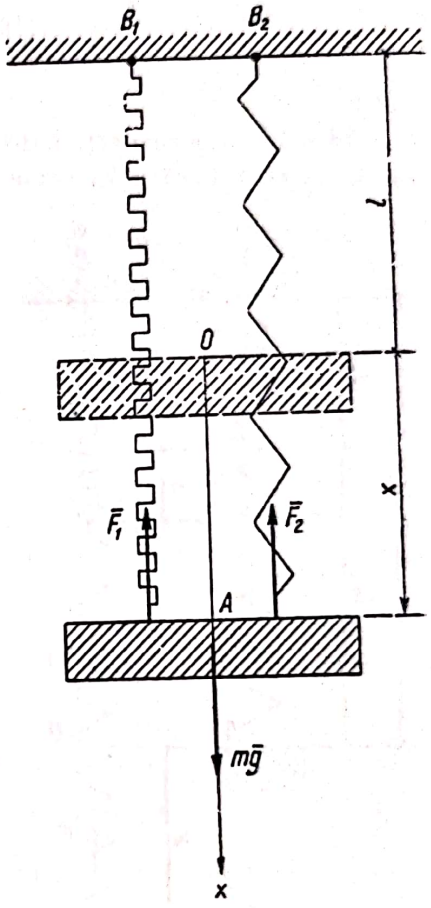


Fig. 23.5

$$F_1 = k_1 [(l - l_{10}) + x] \qquad F_2 = K_2 [(l - l_{20}) + x]. \qquad (6)$$

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe Ox este:

$$m\ddot{x} = mg - F_1 - F_2 = mg - k_1 [(l - l_{10}) + x] - k_2 [(l - l_{20}) + x]$$

și ținînd seamă de (3) rezultă:

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0. \qquad (7)$$

Comparînd această ecuație cu ecuația (6) din problema 23.4, ecuația diferențială de mișcare a unui corp suspendat de un resort:

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

conchidem că resortul unic care înlocuiește sistemul de resorturi dat are constanta elastică:

$$k = k_1 + k_2. \qquad (8)$$

În cazul a n resorturi legate în paralel, generalizînd relațiile (5) și (8) se va obține:

$$l_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i l_{i0}}{\sum_{i=1}^{a} k} \qquad k = \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{9}$$

23.6. Două resorturi de constante k_1 și k_2 și lungime în stare neîntinsă l_{10} și l_{20} sînt legate în serie (fig. 23.6). Să se determine constanta k și lungimea în stare neîntinsă l_0 a unui resort unic echivalent. Generalizare.

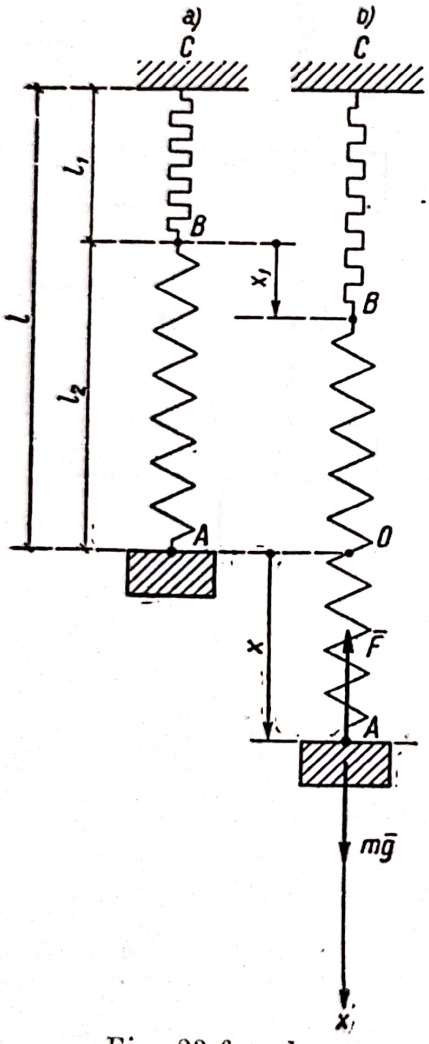


Fig. 23.6 *a*, *b*

Rezolvare. În poziția de echilibru (fig. 23.6,*a*) greutatea și forța elastică F (aceeași în ambele resorturi) sînt egale. Cum alungirile resorturilor sînt $l_1 - l_{10}$ și $l_2 - l_{20}$:

$$mg = k_1(l_1 - l_{10}) = k_2(l_2 - l_{20}), \tag{1}$$

deci lungimile resorturilor în poziția de echilibru sînt:

$$l_1 = l_{10} + \frac{mg}{k_1} \qquad l_2 = l_{20} + \frac{mg}{k_2}, \tag{2}$$

iar lungimea resortului unic care le înlocuiește este $l = l_1 + l_2$. În stare neîntinsă, lungimea acestui resort va fi:

$$l_0 = l_{10} + l_{20}. \tag{3}$$

(Se înlocuiește $mg = O$ în expresia lui l.)

Alegînd originea O în poziția de echilibru a corpului A, iar axa Ox verticala descendentă, ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe Ox este:

$$m\ddot{x} = mg - F. \tag{4}$$

Notînd cu x_1 deplasarea punctului B de fixare a resorturilor între ele (fig. 23.6,*b*), alungirile resorturilor sînt $(l_1 - l_{10}) + x_1$ și $(l_2 + l_{20}) + (x - x_1)$, iar forța elastică a resorturilor (aceeași pentru ambele resorturi) este:

$$F = k_1 [(l_1 - l_{10}) + x_1] = k_2 [(l_2 - l_{20}) + (x - x_1)]. \tag{5}$$

Ținînd seamă de (1) din (5) rezultă:

$$k_1 x_1 = k_2 (x - x_1) \qquad x_1 = \frac{k^2 x}{k_1 + k_2},$$

deci:

$$F = k_1 (l_1 - l_{10}) + \frac{k_1 k_2 x}{k_1 + k_2} = mg + \frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}. \tag{6}$$

Înlocuind în ecuația (4), ea devine:

$$m\ddot{x} + \frac{x}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = 0. \tag{7}$$

Comparînd-o cu ecuația diferențială de mișcare a unui resort unic [ecuația (6), problema 23.4]:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

rezultă:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{8}$$

În cazul a n resorturi legate în serie, generalizînd relațiile (3) și (8), se va obține:

$$l_0 = \sum_{i=1}^{n} l_{i0} \qquad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}. \tag{9}$$

23.7. De capătul liber B al grinzii orizontale BC încastrate în capătul C este fixat un resort AB de care este atîrnată o greutate P. Știind că săgeata grinzii în capătul liber este $w = \frac{Pl^3}{3EI}$ (fig. 23.7), unde $l = BC$, E modulul de elasticitate, iar I momentul de inerție al unei secțiuni normale pe axa grinzii și cunoscînd alungirea statică a resortului Δl_A să se determine perioada de oscilație a greutății P. Se neglijează masele grinzii și resortului.

Aplicație numerică: $P = 100$ kgf, grinda este un profil *I8* din oțel avînd $E = 2\,100\,000$ kgf/cm², $I = 78$ cm⁴, $l = 2$m, iar $k_2 = 22$ kgf/cm (constanta elastică a resortului).

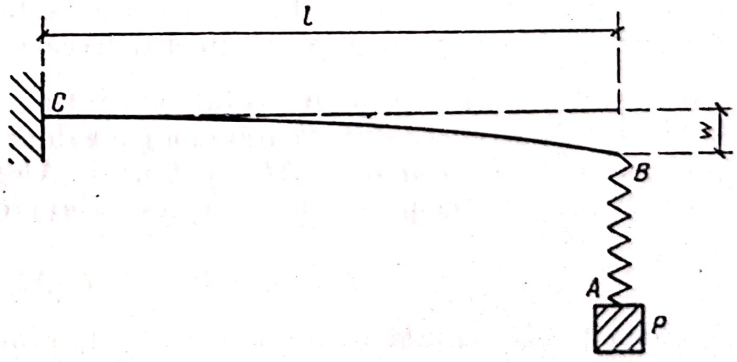


Fig. 23.7

Rezolvare. Între încărcarea P și deformarea w existînd o relație liniară, grinda poate fi asimilată cu un resort a cărui constantă elastică

$$k_1 = \frac{P}{w} = \frac{3EI}{l^3}. \tag{1}$$

De grindă fiind legat resortul BA a cărui constantă elastică este:

$$k_2 = \frac{P}{\Delta l_s} \tag{2}$$

sîntem în cazul studiat în problema 23.6, cazul a două resorturi legate în serie. Resortul care înlocuiește sistemul dat are constanta elastică dată de relația (8) a problemei 23.6:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{w + \Delta l_s}{P}. \tag{3}$$

Din (23.3) și (23.4) rezultă pulsația și perioada oscilațiilor greutății P:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{P}{w + \Delta l_s} \cdot \frac{g}{P}} = \sqrt{\frac{g}{w + \Delta l_s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{w + \Delta l_s}{g}}. \tag{4}$$

În cazul aplicației numerice, făcînd înlocuirile în sistemul MKfS, rezultă:

$$E = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 = 2{,}1 \times 10^{10} \text{kgf/m}^2, \quad I = 78\text{cm}^4 = 78 \times 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$k_2 = 22\text{kgf/cm} = 2\,200\text{kgf/m};$$

$$w = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{100 \times 2^3}{3 \times 2{,}1 \times 10^{10} \times 78 \times 10^{-8}} = 0{,}0163 \text{ m} \quad \Delta l_s = \frac{P}{k_2} = \frac{100}{2\,200} =$$

$$= 0{,}0455 \text{ m}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{w + \Delta l_s}{g}} = 2 \times 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}9163 + 0{,}0455}{9{,}81}} \frac{\text{m}}{\text{m/s}^2} \approx 0{,}5\text{s}.$$

23.8. O cabină de ascensor coboară cu viteza $v_0 = 56$ cm/s. La un moment dat, motorul este oprit brusc, capătul de sus C al cablului fiind blocat. Știind că alungirea statică a cablului de ascensor este $\Delta l_s = 0{,}8$ cm, să se studieze mișcarea cabinei. Se neglijează efectul frecărilor ($g \approx 9{,}8$ m/s^2).

Rezolvare. Atît timp cît cablul este întins, forțele care acționează asupra cabinei A de ascensor sînt greutatea $m\bar{g}$ a cabinei și forța elastică $\bar{F}$ a cablului, proporțională cu alungirea Δl a cablului. Alegînd originea O în poziția de echilibru și axa Ox pe verticală în jos, alungirea cablului va fi $\Delta l = \Delta l_s + x$; deci:

$$F = k\,\Delta\, l = \quad k\,(\Delta l_s + x). \tag{1}$$

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe verticală este:

$$m\,\ddot{x} = mg - k\,(\Delta l_s + x). \tag{2}$$

În poziția de echilibru:

$$mg = k\,\Delta l_{st}, \tag{3}$$

deci ecuația (2) devine:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = 0, \tag{4}$$

unde:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l_s}}. \tag{5}$$

Integrala generală a ecuației (4) și viteza sînt:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t \quad \dot{x} = -C_1 \nu \sin \nu t + C_2 \nu \cos \nu t. \tag{6}$$

Condițiile inițiale ale problemei sînt:

$$t = 0 \qquad x = 0 \qquad \dot{x} = v_0, \tag{7}$$

deoarece în momentul inițial, cînd s-a blocat capătul de sus C al cablului, cabina avea viteza v_0 și cum mișcarea anterioară fusese uniformă, forțele $m\bar{g}$ și $\bar{F}$ se echilibrau și alungirea cablului era cea statică $\Delta l = \Delta l_s$, adică $x = 0$. Din (6) și (7) rezultă $o = C_1$, $v_0 = C_2 \nu$; deci:

$$x = \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t \qquad v = \dot{x} = v_0 \cos \nu t. \tag{8}$$

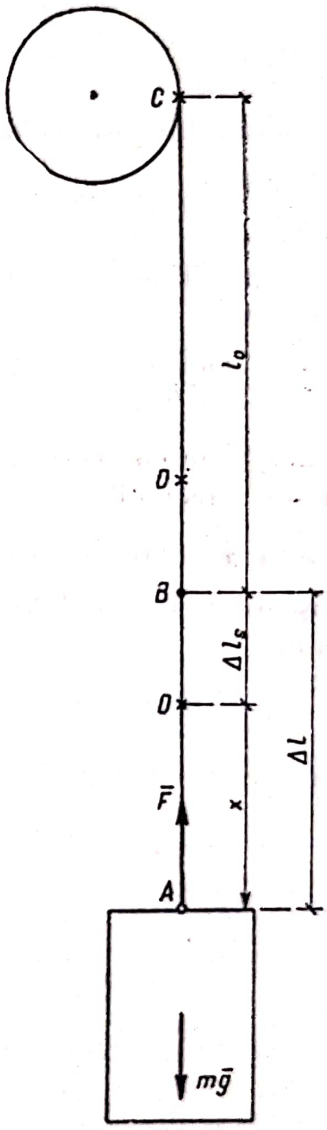


Fig. 23.8,*a*

Făcînd înlocuirile numerice în (5) și (8) rezultă:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{\Delta ls}} = \sqrt{\frac{980 \text{ cm/s}^2}{0{,}8 \text{ cm}}} = 35 \ s^{-1}$$

$$\frac{v_0}{\nu} = \frac{56}{35} \frac{\text{cm/s}}{1/\text{s}} = 1{,}6 \text{ cm}$$

$$x = 1{,}6 \sin 35 \text{ t} \qquad v = \dot{x} = 56 \cos 35 \ t. \tag{8'}$$

Cabina de ascensor coboară pînă în punctul E, $x_E = x_{max} = 1{,}6$ cm corespunzînd valorii $t_1 = \frac{\pi}{2\nu} =$ $= 0{,}04488$ s, apoi trece din nou prin punctul O pentru $t_2 = \frac{\pi}{\nu} = 0{,}08976 \ s$.

Legea de mișcare stabilită este valabilă atît timp cît firul este întins, adică:

$$\Delta l = \Delta l_s + x \geqslant 0 \qquad 0{,}8 + 1{,}6 \sin 35 \ t \geqslant 0$$

$$35 \ t \leqslant \pi + \frac{\pi}{6},$$

$$t \leqslant \frac{\pi}{30} s \approx 0{,}10472 \ s. \tag{9}$$

Pentru:

$$t_3 = \frac{\pi}{30} s = 0{,}10472 \text{ s} \qquad x_B = 1{,}6 \sin 35 \frac{\pi}{30} = -0{,}8 \text{ cm}$$

$$v_B = \dot{x} = 56 \cos 35 \frac{\pi}{30} = -56 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm/s}, \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

cabina ajunge în punctul B care corespunde poziției neîntinse a firului. Singura forță care acționează asupra cabinei este greutatea proprie; integrînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.3), se obține succesiv:

$$m\ddot{x} = mg \qquad \dot{x} = gt + C_3 \qquad x = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Vom nota $t' = t - t_3$; ținînd seamă de condițiile inițiale (10), se obține:

$$x = \frac{gt'^2}{2} + v_B t' + x_B \qquad v = \dot{x} = gt' + v_B \tag{11}$$

și făcînd înlocuirile numerice în sistemul CGS:

$$x = 490\ t'^2 - 56\frac{\sqrt{3}}{2} t' - 0{,}8 \qquad v = 980\ t' - 56\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{11'}$$

În punctul de înălțime maximă atins de cabina de ascensor $v = 0$ și din (11') rezultă:

$$t'_4 = \frac{56\sqrt{3}}{2 \times 980} \approx 0{,}04949 \text{ s} \qquad t_4 = t'_4 + t_3 \approx 0{,}15421 \text{ s} \qquad x_D = -2 \text{ cm}.$$

Timpul de coborîre a ascensorului pînă în punctul B este egal cu timpul de urcare, deci el ajunge în momentul $t'_5 = 2\ t'_4$ $t_5 = t'_5 + t_3 = 0{,}2037$ s cu viteza $\dot{x} = 56\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm/s. Din acest moment firul este întins, deci ecuația de mișcare (6) este valabilă. Vom nota $t'' = t - t_5$, condițiile inițiale ale mișcării fiind:

$$t'' = 0\ (t = t_5 = 0{,}2037\ s) \qquad x = -0{,}8 \text{ cm} \qquad \dot{x} = 56\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm/s}.$$

Punînd aceste condiții în ecuația de mișcare scrisă sub forma

$$x = A\cos(35\ t'' - \varphi), \text{ rezultă } A = 1{,}6 \text{ cm} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \quad \varphi = \frac{2\pi}{3};$$

deci:

$$x = 1{,}6\cos\left(35\ t'' - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad v = \dot{x} = -56\sin\left(35\ t'' - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Cabina de ascensor trece prin poziția de echilibru O pentru:

$$35\ t''_6 - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \qquad t''_6 = \frac{\pi}{210} \approx 0{,}01496 \text{ s} \qquad t_6 = t''_6 + t_5 \approx 0{,}21866 \text{ s}$$

cu viteza:

$$v = -56\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 56 \text{ cm/s} = v_0.$$

Cum cabina a revenit în poziția inițială cu viteza inițială, mișcarea va avea un caracter periodic, compunîndu-se din oscilații armonice și mișcări libere (uniform variate) pe verticală, perioada mișcării fiind:

$$T = t_6 = t_3 + 2t'_4 + t''_6 = \frac{\pi}{30} + 2\frac{56\sqrt{3}}{2 \times 980} + \frac{\pi}{210} \approx 0{,}21866 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura 23.8, *b* s-a reprezentat diagrama mișcării $x = x(t)$, alcătuită din arce de sinusoidă, pentru mișcarea oscilatorie, și arce de parabolă desenate cu linie întreruptă (pentru mișcarea liberă), tangente între ele, deoarece viteza în B este aceeași și pentru o lege și pentru cealaltă de mișcare.

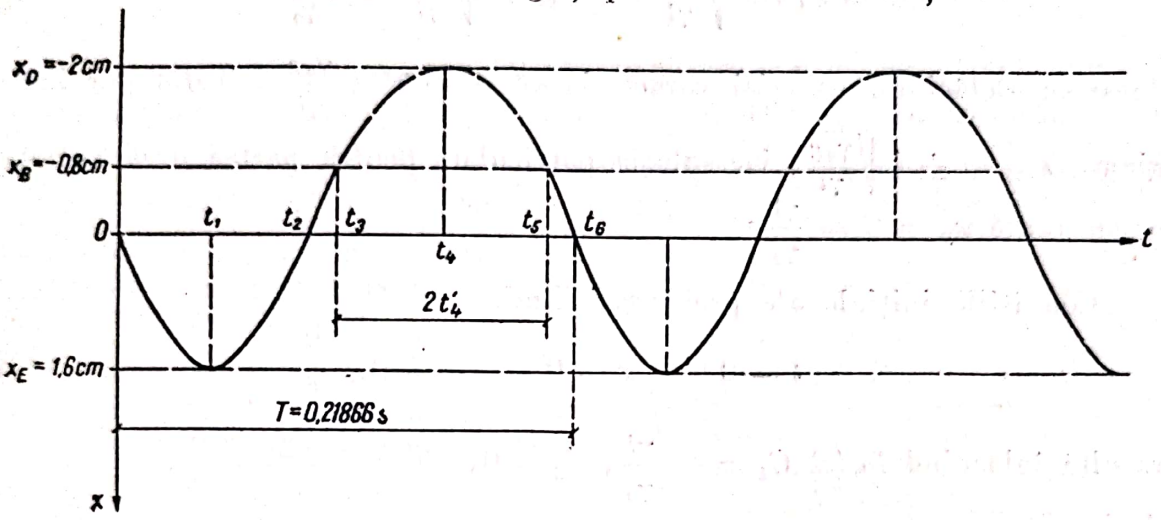


Fig. 23.8, *b*

Observație. Dacă viteza inițială ar fi fost mai mică, firul putea rămîne tot timpul întins, mișcarea fiind în acest caz o oscilație armonică. Pentru aceasta era nevoie ca $\Delta l = \Delta l_s + x \geqslant 0$ și, ținînd seamă de relația (8), condiția era îndeplinită pentru $\Delta l_s \geqslant \frac{v_0}{\nu}$, adică $v_0 \leqslant \Delta l_s \nu = 0{,}8 \times 35 = 28$ cm/s.

23.9. Un buștean de lungime l și secțiune A este lăsat să cadă în direcție verticală de la suprafața apei. Cunoscînd greutatea specifică γ_0 a apei și γ a bușteanului, să se studieze mișcarea lui. Se neglijează efectul rezistenței apei.

Rezolvare. Presupunînd că bușteanul nu s-a afundat complet și notînd cu x lungimea porțiunii afundate în apă (fig. 23.9, *a*), forțele care acționează asupra bușteanului sînt greutatea lui γAl și presiunea apei, egală cu greutatea volumului de apă dislocuit de buștean $\gamma_0 Ax$ orientată pe verticală în sus. Masa bușteanului fiind $m = \frac{\gamma}{g} Al$, ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe verticală va fi:

$$\frac{\gamma}{g} Al\ddot{x} = \gamma Al - \gamma_0 A x,$$

de unde:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma_0 g}{\gamma l} x = g. \qquad (1)$$

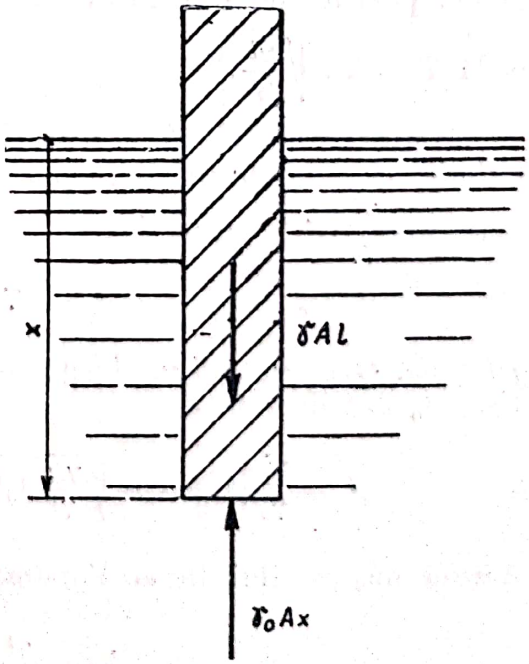


Fig. 23.9, *a*

Integrala generală a acestei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți și parte dreaptă este:

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t + \frac{\gamma l}{\gamma_0}, \tag{2}$$

deoarece rădăcinile ecuației caracteristice a ei $\lambda^2 + \frac{\gamma_0 g}{\gamma l} = 0$ sînt pur imaginare $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}$, iar soluția particulară pentru partea dreaptă este o constantă $x_p = C = \frac{\gamma l}{\gamma_0}$.

Condițiile inițiale ale problemei fiind:

$$t = 0 \qquad x = 0 \qquad \dot{x} = 0, \tag{3}$$

rezultă înlocuind în (2) $C_1 = -\frac{\gamma l}{\gamma_0}$, $C_2 = 0$;

deci:

$$x = \frac{\gamma l}{\gamma_0}\left(1 - \cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t\right). \tag{4}$$

Afundarea maximă a bușteanului este $2\frac{\gamma l}{\gamma_0}$, mișcarea bușteanului dată de ecuația (4) fiind o oscilație armonică în jurul punctului $x = \frac{\gamma l}{\gamma_0}$ care corespunde poziției de echilibru, de amplitudine $A = \frac{\gamma l}{\gamma_0}$, pulsație $\sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}$, perioadă $T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma l}{\gamma_0 g}}$.

Pentru ca ecuația (4) să reprezinte mișcarea bușteanului în orice moment t trebuie ca afundarea bușteanului să nu depășească lungimea sa, adică $x_{max} = 2\frac{\gamma l}{\gamma_0} \leqslant l$, respectiv:

$$\gamma \leqslant 0{,}5\, \gamma_0. \tag{5}$$

Discuție. Dacă $\gamma > 0{,}5\, \gamma_0$, bușteanul se afundă complet după un interval de timp t_0 dat de relația:

$$l = \frac{\gamma l}{\gamma_0}\left(1 - \cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t_0\right) \qquad t_0 = \sqrt{\frac{\gamma l}{\gamma_0 g}} \arccos \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma}. \tag{6}$$

Viteza bușteanului în acel moment este:

$$\dot{x}_0 = \frac{\gamma l}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}} \sin \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t_0$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seamă de valoarea t_0:

$$\dot{x}_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0} lg}\sqrt{1-\left(\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma}\right)^2} = \sqrt{\frac{gl}{\gamma}(2\gamma-\gamma_0)}.$$

După ce bușteanul s-a afundat complet în apă (fig. 23.9, *b*), asupra sa acționează forța constantă $\gamma Al - \gamma_0 Al = (\gamma-\gamma_0)Al$, iar din ecuația (21.3) rezultă că mișcarea este uniform variată cu accelerația $\ddot{x} = \frac{(\gamma-\gamma_0)}{\gamma} g$. Ținînd seamă de condițiile inițiale (cele din momentul în care bușteanul s-a afundat complet):

$$t = t_0, \quad x = l$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{gl}{\gamma}(2\gamma-\gamma_0)}, \qquad (7)$$

ecuația mișcării se scrie:

$$x = \frac{\gamma-\gamma_0}{2\gamma} gt'^2 + \sqrt{\frac{gl}{\gamma}(2\gamma-\gamma_0)}\, t' + l, \qquad (8)$$

unde $t' = t - t_0$.

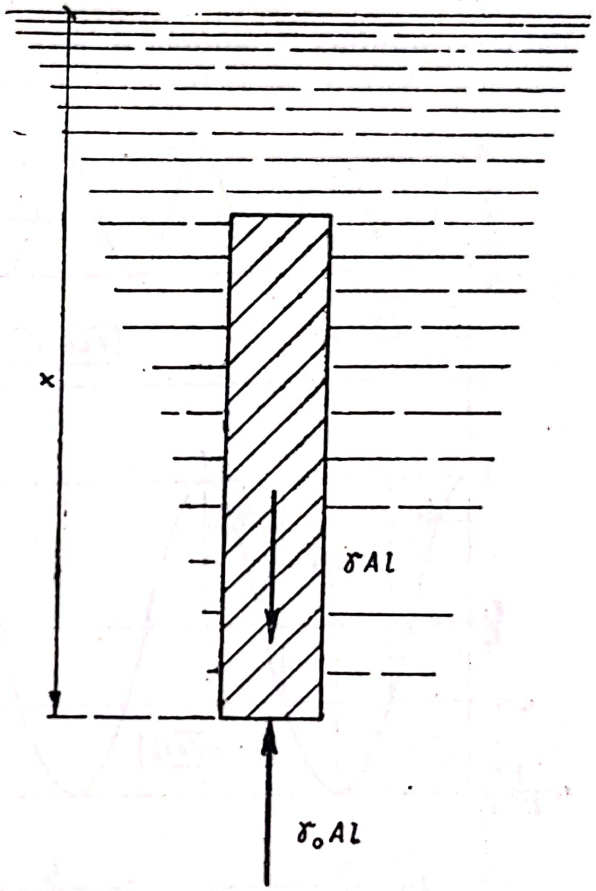


Fig. 23.9, *b*

Dacă $\gamma > \gamma_0$, mișcarea este uniform accelerată și bușteanul se afundă cu viteză din ce în ce mai mare.

Dacă $\gamma = \gamma_0$, bușteanul se afundă cu viteza constantă $\sqrt{\frac{gl}{\gamma}(2\gamma-\gamma_0)}$.

Dacă $0{,}5\,\gamma_0 < \gamma < \gamma_0$, atunci mișcarea bușteanului sub apă are două perioade: una întîrziată pînă în momentul $t_1 = t_0 + t_1'$, în care este atinsă afundarea maximă x_1 ($\dot{x}_1 = 0$), $t_1' = \sqrt{\frac{\gamma(2\gamma-\gamma_0)l}{(\gamma_0-\gamma)^2 g}}$, $x_1 = \frac{\gamma_0 l}{2(\gamma_0-\gamma)}$, și cealaltă uniform accelerată pînă în momentul $t_2 = t_0 + t'_2$, în care bușteanul atinge din nou suprafața apei cu viteza $\dot{x}_2 = -\dot{x}_0$:

$$t_2' = 2t_1' = 2\sqrt{\frac{\gamma(2\gamma-\gamma_0)l}{(\gamma_0-\gamma)^2 g}} \quad x_2 = l \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_0 = -\sqrt{\frac{gl}{\gamma}(2\gamma-\gamma_0)} \qquad (9)$$

Din acest moment, bușteanul ieșind din apă, este valabilă ecuația de mișcare (2). Punînd condițiile inițiale (9) rezultă:

$$x = \frac{\gamma l}{\gamma_0} + \frac{\gamma_0-\gamma}{\gamma_0} l\cos\sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t'' - l\sqrt{\frac{2\gamma-\gamma_0}{\gamma_0}}\sin\sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t'', \qquad (10)$$

unde $t'' = t - t_2 = t - (t_0 + t'_2)$. Din relațiile (6) rezultă:

$$\cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t_0 = \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma} \quad \sin \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\, t_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0 (2\gamma - \gamma_0)}{\gamma^2}}$$

și înlocuind în (10) se obține:

$$x = \frac{\gamma l}{\gamma_0}\left[1 - \cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\,(t'' - t_0)\right] = \frac{\gamma l}{\gamma_0}\left[1 - \cos \sqrt{\frac{\gamma_0 g}{\gamma l}}\,(t - 2t_0 - t'_2)\right] \qquad (11)$$

Valoarea minimă a afundării este $x = 0$ pentru $t_3 = 2t_0 + t'_2$. În acest moment, viteza $\dot{x}_3 = 0$, deci bușteanul a revenit în poziția inițială cu viteza inițială. Mișcarea are deci un caracter periodic (de același tip cu cea din problema precedentă), compunîndu-se din oscilații armonice pentru $nT - t_0 \leqslant t \leqslant nT + t_0$ și mișcări uniform variate pentru $nT + t_0 \leqslant t \leqslant (n+1)T - t_0$, $(n = 0,1,2,\ldots)$, perioada mișcării fiind:

$$T = 2t_0 + t'_2 = 2\sqrt{\frac{\gamma l}{\gamma_0 g}}\,\arccos\frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma} + 2\sqrt{\frac{\gamma(2\gamma - \gamma_0)\,l}{(\gamma_0 - \gamma)^2 g}}.$$

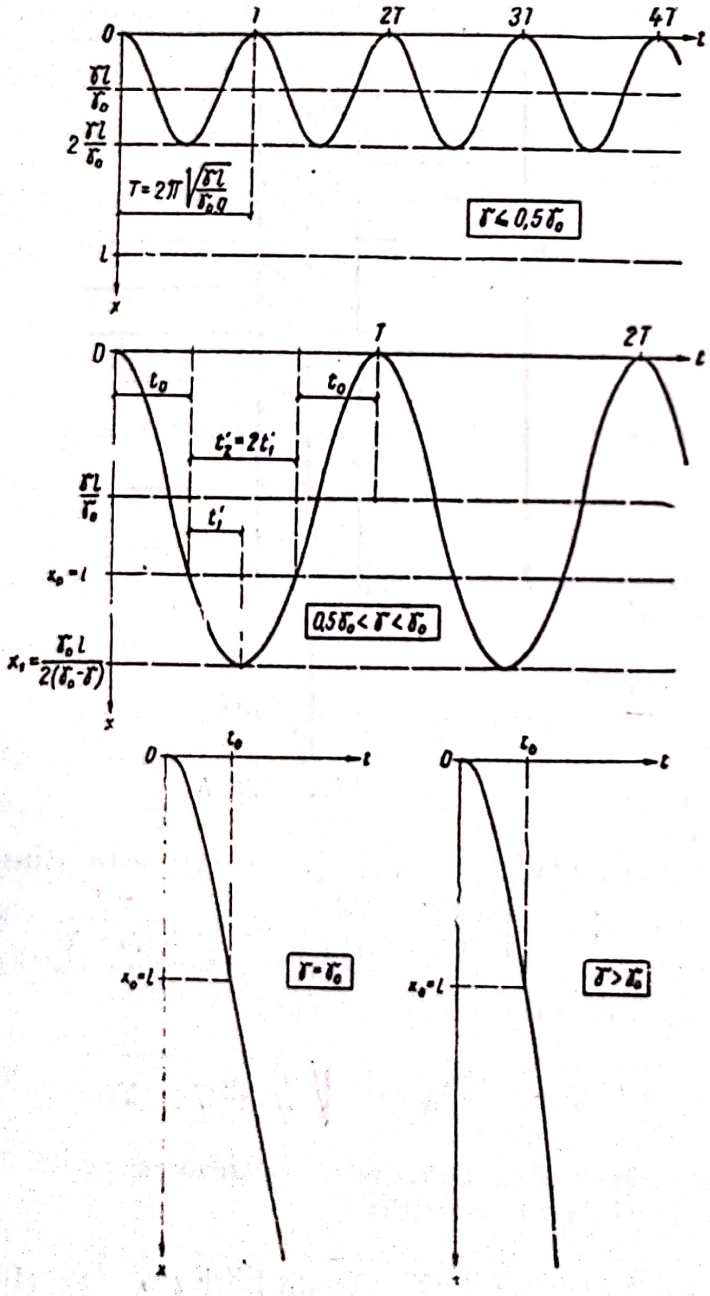


Fig. 23.9, *c*

În figura 23.9, *c* s-au reprezentat diagramele $x = x(t)$ pentru diferitele cazuri examinate.

23.10. De un resort avînd lungimea în stare neîntinsă $l_0 = 24{,}2$ cm, și constanta elastică $k = 1{,}69$ N/cm este suspendat un corp cu greutatea $G = 1$ kgf. Știind că în mișcarea sa corpul întîmpină rezistența mediului, proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\,\bar{v}$, unde $h = 10\,\frac{N \cdot s}{m}$, că în momentul inițial corpul se găsea în poziția sa de echilibru și avea viteza $v_0 = 1{,}2$ m/s îndreptată pe verticală în jos, să se determine legea de mișcare, precum

și pseudoperioada și decrementul logaritmic. Cît de mare trebuie să fie factorul de amortizare h pentru ca mișcarea să fie aperiodică?

Rezolvare. Dacă corpul se găsește în echilibru, tensiunea și greutatea fiind egale, rezultă:

$$k\Delta l_s = mg \quad \Delta l_s = \frac{mg}{k} = \frac{981\,000}{169\,000} \approx 5{,}8 \text{ cm} \qquad l = l_0 + \Delta l_s = 24{,}2 + 5{,}8 = 30 \text{ cm}, \tag{1}$$

unde Δl_s este alungirea și l — lungimea resortului în poziția de echilibru. Înlocuirile numerice s-au făcut în sistemul CGS, $G = mg = 1\ kgf = 981\ 000$ dyn, $k = 1{,}69\ N/\text{cm} = 169\ 000$ dyn/cm $= 169\ 000$ g/s², $h = 10\ N.\text{s/m} = 10\ 000$ dyn·s/cm $= 10\ 000$ g/s. Alegînd originea O în poziția de echilibru, x este deplasarea corpului față de această poziție (fig. 23.10, *a*), deci tensiunea $\bar{F}$ din resort este:

$$F = k\Delta l = k(\Delta l_s + x).$$

Celelalte forțe care acționează sînt greutatea proprie $m\bar{g}$ și rezistența mediului $\bar{R} = -h\bar{v}$. Ecuația (21.3) proiectată pe Ox este:

$$m\ddot{x} = mg - k(\Delta l_s + x) - h\dot{x} \tag{2}$$

și ținînd seamă de relația (1) se obține ecuația (23.9):

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \nu^2 x = 0, \tag{3}$$

unde s-a notat conform (23.10):

$$\alpha = \frac{h}{2m} = \frac{10\,000}{2 \times 1\,000}\,\frac{g/s}{g} = 5\ s^{-1}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{169\,000}{1\,000}\,\frac{g/s^2}{g}} = 13\ s^{-1}.$$

Cum $\nu > \alpha$, soluția (23.11) a ecuației (3) este:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \tag{4}$$

unde conform (23.12):

$$\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} = \sqrt{169 - 25} = 12\ s^{-1}.$$

Condițiile inițiale ale problemei sînt:

$$t = 0 \quad x = 0 \quad \dot{x} = v_0 = 120 \text{ cm/s} \tag{5}$$

și cum derivînd (4) rezultă:

$$\dot{x} = e^{-\alpha t}[\alpha C_1 \cos \beta t + \alpha C_2 \sin \beta t - \beta C_1 \sin \beta t + \beta C_2 \cos \beta t]$$

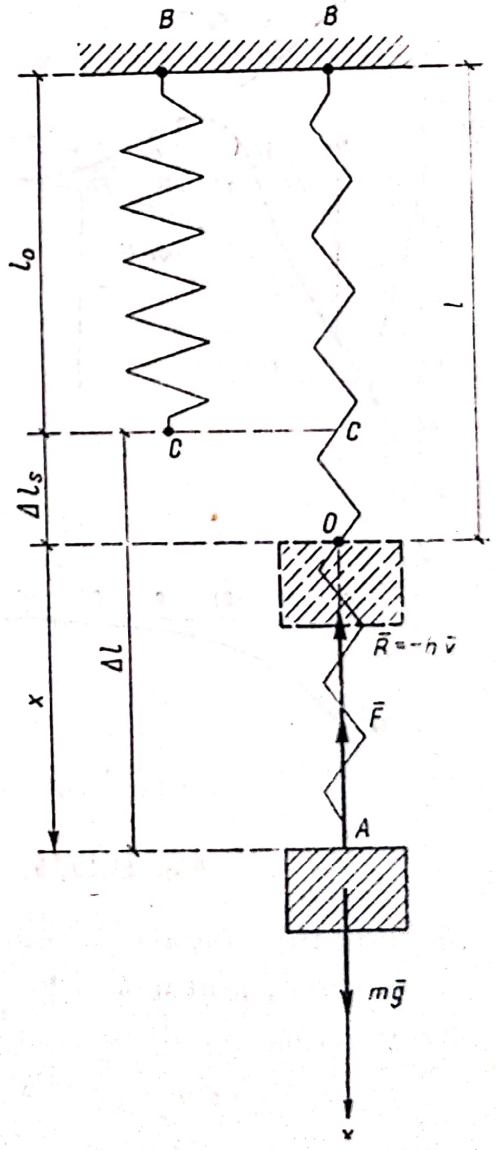


Fig. 23.10, *a*

rezultă:

$$O = C_1, \quad v_0 = \alpha C_1 + \beta C_2, \quad \text{deci } C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\beta} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$

Legea de mișcare este:

$$x = \frac{v_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t = 10\ e^{-5t} \sin 12\ t. \tag{6}$$

Mișcarea oscilatorie este amortizată, pseudoperioada T (23.13) și decrementul logaritmic D (23.14) fiind:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{12} \approx 0{,}5236 \text{ s}$$

$$D = \frac{2\pi\alpha}{\beta} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{12} = 2{,}618,$$

după o perioadă $\left(T \approx \frac{1}{2} \text{s}\right)$, amplitudinea oscilațiilor scăzînd de $e^D \approx 13{,}6$ ori. Mișcarea se amortizează deci foarte repede.

Pentru ca mișcarea să fie aperiodică trebuie ca $\nu \leqslant \alpha$, adică:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leqslant \frac{h}{2m}, \; h \geqslant 2\sqrt{k\,m} = 2\sqrt{169\,000 \times 1\,000 \frac{g}{s^2} \times g} =$$

$$= 26\,000 \text{ g/s} = 26 \frac{N \cdot s}{m}.$$

Pentru $h = 26 \frac{N \cdot s}{m}$, $\nu = \alpha = 13 \text{ s}^{-1}$, deci conform (23.17) legea de mișcare este:

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 + C_2 t) = 120\ e^{-13t}\ t$$

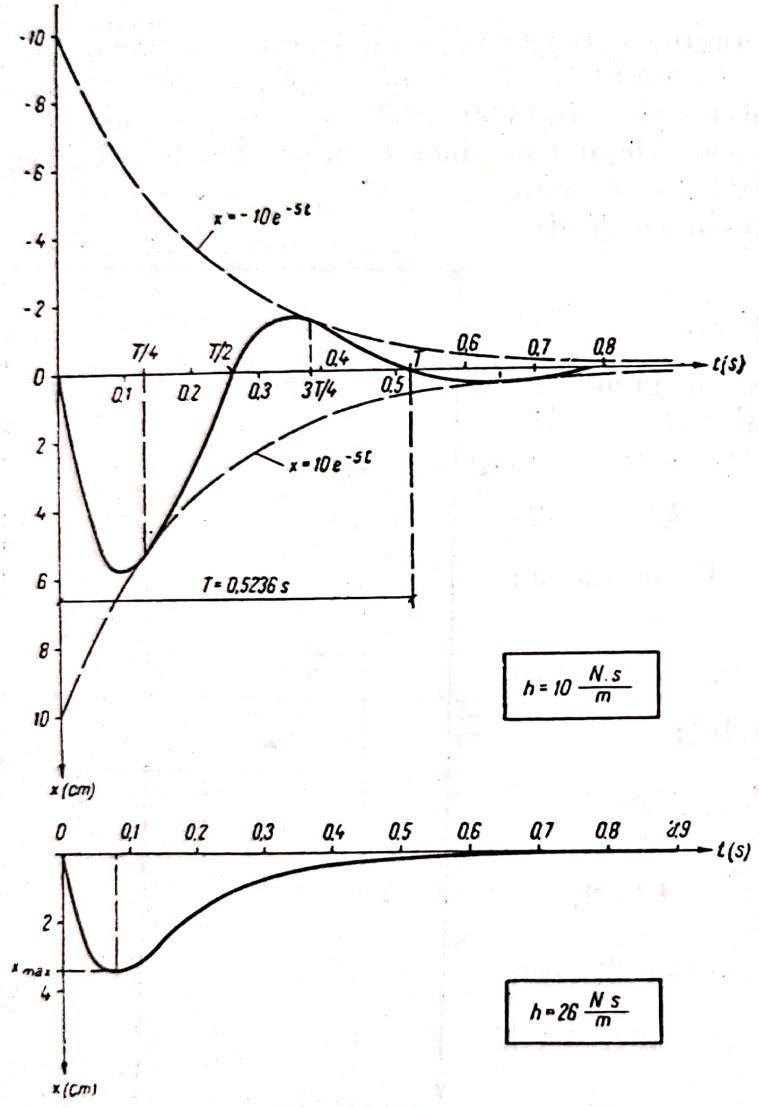


Fig. 23.10, *b*

[din condițiile inițiale (5) rezultă $C_1 = O$, $C_2 = 120$].

În sfîrșit, pentru $h > 26 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$, $\nu < \alpha$ conform (23.16) legea de mișcare este de forma:

$$x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t} = \frac{v_0}{r_1 - r_2}(e^{-r_2 t} - e^{-r_1 t})$$

$-r_1$ și $-r_2$ fiind rădăcinile ecuației caracteristice $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \nu^2 = 0$.

În figura 23.10, *b* s-au reprezentat vibrogramele pentru $h = 10 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$ și $h = 26 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$.

23.11. O greutate $G = 0{,}5$ kgf suspendată de un resort execută oscilații verticale amortizate în jurul poziției de echilibru $x = 0$ (rezistența mediului este proporțională cu viteza). Cunoscînd pseudoperioada de oscilație $T = \frac{\pi}{4}$ s, decrementul logaritmic $D = \frac{3\pi}{2}$ și știind că în momentul inițial $x = x_0 = 10$ cm și $v_0 = 20$ cm/s, să se determine legea de mișcare a greutății $x = x(t)$, precum și factorul de amortizare h și constanta elastică k a resortului. Să se stabilească apoi legea de mișcare dacă factorul de amortizare ar crește de trei ori.

Rezolvare. Legea de mișcare a greutății va avea expresia (23.11):

$$x = Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi), \tag{1}$$

unde conform (23.13) și (23.14) $T = \frac{2\pi}{\beta}$, $D = \alpha T$; deci:

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8\ s^{-1} \qquad \alpha = \frac{D}{T} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 6\ s^{-1}. \tag{2}$$

Expresiile legii de mișcare (1) și vitezei vor fi:

$$x = A\,e^{-\frac{D}{T}t} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right); \quad \dot{x} = A\,e^{-\frac{D}{T}t}\left[-\frac{D}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)\right] \tag{3}$$

și punînd condițiile inițiale:

$$t = 0 \quad x = x_0 = 10 \text{ cm} \quad \dot{x} = v_0 = 20 \text{ cm/s} \tag{4}$$

rezultă sistemul de ecuații:

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad v_0 = \frac{A}{T}(-D\cos\varphi + 2\pi\sin\varphi),$$

de unde:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{2\pi}\frac{v_0}{x_0} + \frac{D}{2\pi} = \frac{\pi/4}{2\pi}\cdot\frac{20}{10} + \frac{3\pi/2}{2\pi} = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{10}{\sqrt{2}/2} = 10\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

Legea de mișcare este deci:

$$x = 10\sqrt{2}\,e^{-6t}\cos\left(8t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{5}$$

Din (23.12) rezultă pulsația oscilației neamortizate:

$$\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} \quad \nu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{D}{T}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$$

și cum masa greutății este $m = \frac{G}{g} = \frac{0{,}5 \times 9{,}81}{9{,}81} = 0{,}5$ kg, din (23.10) rezultă factorul de amortizare h și constanta elastică a resortului k:

$$\alpha = \frac{h}{2m} \quad h = 2\alpha m = 2\frac{D}{T}m = 6\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}} = 6\,\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}};$$

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k = \nu^2 m = 50\ \mathrm{kg.s^{-2}} = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Dacă factorul de amortizare este de trei ori mai mare $h = 18\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, $\alpha = \frac{h}{2m} = \frac{18}{2\times 0{,}5} = 18\ \mathrm{s}^{-1}$. În acest caz, $\nu < \alpha$, ecuația diferențială de mișcare (23.9) $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \nu^2 x = 0$ are ecuația caracteristică (23.16):

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \nu^2 = 0 \qquad \lambda^2 + 36\lambda + 100 = 0 \tag{6}$$

cu rădăcinile:

$$\lambda_{1,2} = -18 \pm \sqrt{324 - 100} \quad \lambda_1 \approx -33 \quad \lambda_2 = -3,$$

deci legea de mișcare (23.15) și viteza sînt de forma:

$$x = C_1 e^{-33t} + C_2 e^{-3t} \quad \dot{x} = -33\,C_1 e^{-33t} - 3C_2 e^{-3t}. \tag{7}$$

Ținînd seamă de condițiile inițiale (4) rezultă $10 = C_1 + C_2$, $20 = -33C_1 - 3C_2$, $C_1 = -\frac{5}{3}$, $C_2 = \frac{35}{3}$, de unde:

$$x = -\frac{5}{3}e^{-33t} + \frac{35}{3}e^{-3}. \tag{8}$$

23.12. Un corp avînd greutatea $G = 10$ kgf este legat de un resort avînd constanta $k = 8$ kgf/cm. Asupra lui acționează o forță perturbatoare verticală $F_p = F_0 \cos \omega t$, unde $F_0 = 16$ kgf și $\omega = 12\ \mathrm{s}^{-1}$. Știind că în momentul inițial greutatea se află în stare de repaus, în poziția de echilibru, să se studieze mișcarea corpului. Ce se întîmplă dacă pulsația forței perturbatoare ar fi $\omega = 27\ s^{-1}$? Dar în cazul $\omega = 28\ \mathrm{s}^{-1}$? Să se determine pentru aceste valori ale lui ω și coeficientul de impact ψ.

Rezolvare. Notînd cu x deplasarea greutății în raport cu poziția de echilibru, alungirea resortului este $\Delta l = \Delta l_s + x$, unde Δl_s este alungirea în pozi-

ția de echilibru (*v.* problemele 23.4,23.10), forța elastică a resortului $F_e = k(\Delta l_s + x)$. Asupra corpului mai acționează greutatea lui proprie mg și forța perturbatoare, deci ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) este:

$$m\ddot{x} = mg - F_e + F_p \tag{1}$$

și cum $mg = k\Delta l_s$ rezultă:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t. \tag{2}$$

Notînd $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$ și $p = \frac{F_0}{m}$ se obține ecuația (23.18):

$$\ddot{x} + \nu^2 x = p \cos \omega t \tag{3}$$

și cum condițiile inițiale sînt $t = 0$, $x = 0$ (corpul este în poziția de echilibru), $\dot{x} = 0$, soluția (23.20) a acestei ecuații este:

$$x = \frac{p}{\nu^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \nu t). \tag{4}$$

Făcînd înlocuirile numerice în sistemul MKfs, cum $m = \frac{G}{g} = \frac{10}{9{,}8}\ \frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}$, $k = 800$ kgf/m:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 9{,}8}{10}\ \frac{\text{kgf/m}}{\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}}} = 28\ \text{s}^{-1} \qquad p = \frac{F_0}{m} = \frac{16 \times 9{,}8}{10}\ \frac{\text{kgf}}{\text{kgf}\cdot\text{s}^2/m} =$$

$$= 15{,}68\ \text{m/s}^2.$$

În primul caz, $\omega = 12\ \text{s}^{-1}$, $\frac{p}{\nu^2 - \omega^2} = \frac{15{,}68}{28^2 - 12^2}\ \frac{\text{m/s}^2}{1/\text{s}^2} = 0{,}0245\ \text{m} = 2{,}45\ \text{cm}$,

deci:

$$x = 2{,}45\ (\cos 12\ t - \cos 28\ t),$$

amplitudinea oscilației proprii fiind egală cu amplitudinea oscilației forțate $\mathcal{A} = 2{,}45$ cm. Cum alungirea statică sub acțiunea forței F_0 este $\frac{F_0}{k} = \frac{16}{8}\ \frac{\text{kgf}}{\text{kgf/cm}} = 2$ cm, coeficientul de impact

$$\psi = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225,$$

rezultat care se putea obține și cu ajutorul formulei (23.27) care în cazul nostru ($\alpha = 0$) era:

$$\psi = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right|} = \frac{1}{1 - \left(\frac{12}{28}\right)^2} = 1{,}225.$$

Alura vibrogramei este cea din figura 23, *c*.

În al doilea caz, $\omega = 27\ s^{-1}$ este foarte apropiat de $\nu = 28\ s^{-1}$; apare deci fenomenul de bătăi. Conform (23.21), notînd $\varepsilon = \nu - \omega = 1\ s^{-1}$,

$$x = \frac{p}{\varepsilon\left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \sin\left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right) t \sin\frac{\varepsilon t}{2} = 57{,}02 \sin 27{,}5t \sin 0{,}5t,$$ deoarece

$$\frac{p}{\varepsilon\left(\nu - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{15{,}68}{1 \times \left(28 - \frac{1}{2}\right)}\ m = 57{,}02\ cm.$$

Amplitudinea oscilațiilor variază după legea $x = 57{,}02 \sin 0{,}5t$, perioada bătăilor fiind $\frac{2\pi}{\varepsilon} = 2\pi s$. Alura vibrogramei este cea din figura 23, *d*.

Coeficientul de impact (23.27) este:

$$\psi = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right|} = \frac{1}{1 - \left(\frac{27}{28}\right)^2} = 14{,}25,$$

amplitudinea oscilației forțate fiind de aproape 15 ori mai mare decît alungirea statică $\left(\frac{F_0}{k} = 2\ cm\right)$. Amplitudinea maximă este dublul amplitudinii oscilației forțate (de aproape 30 de ori alungirea statică).

În cazul $\omega = 28\ s^{-1}$, cum $\nu = \omega$, apare fenomenul de rezonanță. Vibrograma are aspectul din figura 23, *e*; legea de mișcare (23.22) este:

$$x = \frac{p\,t}{2\nu} \sin \nu t = 28\ t \sin 28\ t,$$

x fiind exprimat în centimetri $\left(\frac{p}{2\nu} = \frac{15{,}68}{2 \times 28}\ \frac{m/s^2}{1/s} = 0{,}28\ m/s = 28\ cm/s\right)$. Amplitudinile cresc foarte repede, astfel numai după un minuat de la începutul mișcării, ele ating valoarea de $28 \times 60\ cm = 16{,}8\ m$. Coeficientul de impact $\psi = \infty$.

23.13. Un tub luciu drept OB se rotește într-un plan vertical în jurul unei axe orizontale O cu viteza unghiulară ω. În tub se găsește o sferă grea A de masă m fixată de resortul OA (fig. 23.13) avînd constanta elastică k și lungimea în starea neîntinsă l_0. În momentul inițial tubul este dirijat pe verticală în jos, sfera A se găsește la distanța $OA = r_0$ și nu are viteză relativă față de tub. Să se urmărească mișcarea sferei în tub. Discuție.

Rezolvare. Punctul A nu este liber, ci este supus la legături fiind obligat să rămînă în tub. Pe baza principiului forțelor de legătură, se înlătură legătura introducînd reacțiunea N normală pe tub. Celelalte forțe care acționează sînt forța elastică a resortului $F_e = k(r - l_0)$ (unde $r = OA$ este lungimea resortului) și greutatea punctului. Pentru studiul mișcării cel mai comod

este sistemul de coordonate polare (*Or* în lungul tubului și *On* normala pe tub), deoarece unghiul polar

$$\theta = \omega t \tag{1}$$

este cunoscut. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (21.8) pe *Or* se elimină reacțiunea și obține:

$$m\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_e + mg\cos\theta.$$

Ținînd seamă de (1) și de expresia forței elastice rezultă:

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = g\cos\omega t + \frac{k}{m} l_0. \tag{2}$$

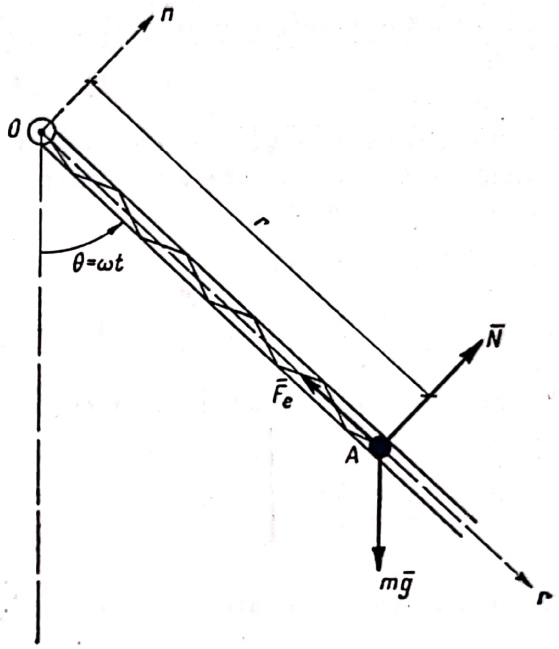


Fig. 23.13

Discuții. a) Presupunînd $\frac{k}{m} > \omega^2$ și notînd $\frac{k}{m} - \omega^2 = \nu^2$ ecuația caracteristică a ecuației diferențiale liniare (2) cu partea dreaptă este $\lambda^2 + \nu^2 = 0$, rădăcinile ei $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, iar integrala ei generală este:

$$r = C_1\cos\nu t + C_2\sin\nu t + r_p, \tag{3}$$

unde soluția particulară r_p, este de forma:

$$r_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C. \tag{4}$$

Cum $\ddot{r}_p = -\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t$, înlocuind în ecuația (2) și identificînd coeficienții lui cos ωt, sin ωt și termenii liberi, se obține sistemul:

$$-\omega^2 A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A = g \qquad -\omega^2 B + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) B = 0$$

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) C = \frac{k}{m} l_0,$$

deci $A = \dfrac{g}{\frac{k}{m} - 2\omega^2}$, $B = 0$, $C = \dfrac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$, deci legea de mișcare a sferei în tub este:

$$r = C_1\cos\nu t + C_2\sin\nu t + \frac{g}{\frac{k}{m} - 2\omega^2}\cos\omega t + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}. \tag{5}$$

Mișcarea se compune din două oscilații: una de pulsație $\nu = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_2}$ și a doua de pulsație ω, centrul de oscilație fiind în punctul de abscisă $\frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$.

Punînd condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad r = r_0 \qquad \dot{r} = 0 \tag{6}$$

(punctul neavînd viteză relativă în raport cu tubul, viteza lui în momentul inițial este ωr_0 și este normală pe tub, nu se proiectează pe Or), se determină constantele:

$$C_1 = r_0 - \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k^2}} - \frac{g}{\frac{k}{m} - 2\omega^2} \qquad C_2 = 0.$$

Dacă cele două pulsații ν și ω sînt apropiate și au aceeași amplitudine: $C_1 = -\frac{g}{\frac{k}{m} - 2\omega^2}$ [respectiv: $r_0 = \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k^2}}$, adică sfera se găsea în momentul inițial în centrul de oscilație] apare fenomenul de bătăi.

Pentru $\nu = \omega$, adică $\frac{k}{m} - \omega^2 = \omega^2$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ apare fenomenul de rezonanță. În acest caz trebuie căutată o soluție particulară de forma:

$$r_p = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t + C.$$

Se poate verifica ușor că, în acest caz, legea de mișcare care verifică condițiile inițiale (6) este:

$$r = (r_0 - 2l_0) \cos \omega t + \frac{gt}{2\omega} \sin \omega t + 2l_0, \tag{7}$$

deci pentru $t \to \infty$, amplitudinea $\frac{gt}{2\omega} \to \infty$.

b) Cazul $\frac{k}{m} = \omega^2$. Ecuația (2) devine:

$$\ddot{r} = g \cos \omega t + \omega^2 l_0, \tag{8}$$

iar integrala generală a ei este:

$$r = C_1 + C_2 t + r_p,$$

unde soluția particulară:

$$r_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t + Ct^2 = -\frac{g}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega^2 l_0 t^2}{2}.$$

Ținînd seamă și de condițiile inițiale (6) rezultă:

$$r = \left(r_0 + \frac{g}{\omega^2}\right) + \frac{\omega^2 l_0 t^2}{2} - \frac{g}{\omega^2}\cos \omega t, \tag{9}$$

sfera depărtîndu-se de punctul O, mișcarea tinzînd asimptotic spre o mișcare uniform accelerată.

c) Cazul $\frac{k}{m} < \omega^2$. În acest caz, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (2) are rădăcinile reale $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$ și deci integrala generală a ecuației (2) este:

$$r = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t - \frac{g}{2\omega^2 - \frac{k}{m}}\cos \omega t - \frac{l_0}{\frac{m\omega^2}{k} - 1},$$

soluția particulară (4) fiind aceeași ca în cazul *a)*. Din condițiile inițiale (6) rezultă:

$C_1 = r_0 + \frac{g}{2\omega^2 - \frac{k}{m}} + \frac{l_0}{\frac{m\omega^2}{k} - 1}$, $C_2 = 0$. Sfera se depărtează de punctul O, căci $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{ch} \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\, t = \infty$.

Observație. Legile de mișcare din cazurile *b)* și *c)* sînt valabile doar la începutul mișcării, deoarece alungirea unui resort nu poate crește oricît, resortul rupîndu-se.

23.14. De culisa B, cu mișcare verticală a mecanismului bielă-manivelă compus din manivela $OC = r$ care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω și din biela $BC = b$, este legat un resort BA avînd constanta elastică k și lungimea în stare neîntinsă l_0, iar de capătul lui este atîrnat corpul A de masă m. În momentul inițial culisa B se găsește în punctul mort inferior, iar corpul A este în repaus în poziția de echilibru. Să se studieze mișcarea corpului A știind că raportul $\frac{r}{b}$ este mic.

$$\left(\text{În practică } \frac{r}{b} = \frac{1}{4} \dots \frac{1}{10}\right).$$

Rezolvare. Ecuația fundamentală a dinamicii (21·3) proiectată pe Ox (fig. 23·14) este:

$$m\ddot{x} = mg - F, \tag{1}$$

unde forța elastică a resortului:

$$F = k(l - l_0),$$

iar $l = BA$ este lungimea resortului. Însă, $l = x - OB$, iar $OB = r\cos\theta + b\cos\beta$ și cum $\theta = \omega t$:

$$F = k(x - r\cos\omega t - b\cos\beta - l_0). \tag{2}$$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OCB rezultă $\frac{r}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\omega t}$, deci

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t\right)^{1/2}.$$

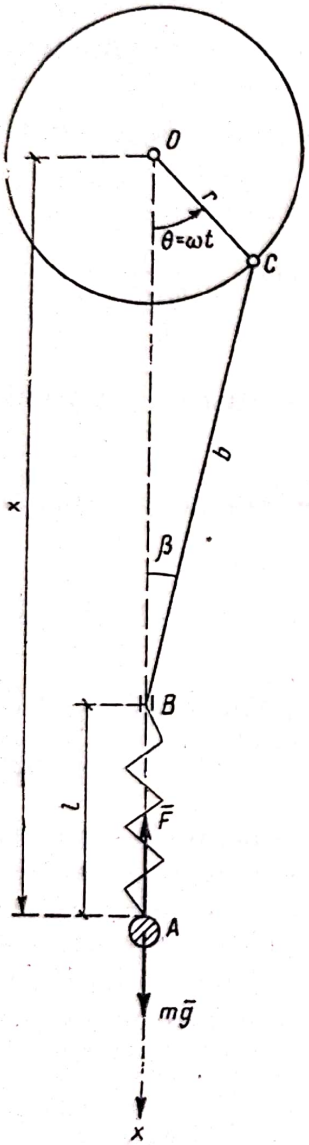


Fig. 23.14

Cum $\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t < 1$, se poate dezvolta expresia lui $\cos\beta$ după regula binomului lui Newton:

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{b^2}\sin^2\omega t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\times 2}\frac{r^4}{b^4}\sin^4\omega t - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\times 2\times 3}\frac{r^6}{b^6}\sin^6\omega t + \ldots \tag{3}$$

Într-o primă aproximație, păstrînd doar primii doi termeni ai dezvoltării (raportul dintre al treilea și al doilea termen al dezvoltării pentru $\frac{r}{b} = \frac{1}{5}$ este $\frac{1}{100}\sin^2\omega t$):

$$\cos\beta \approx 1 - \frac{r^2}{2b^2}\sin^2\omega t = 1 - \frac{r^2}{4b^2} + \frac{r^2}{4b^2}\cos 2\omega t. \tag{4}$$

Din (1), (2) și (4) se obține:

$$m\ddot{x} = mg - kx + kr\cos\omega t + \frac{kr^2}{4b}\cos 2\omega t + kb - \frac{kr^2}{4b} + kl_0. \tag{5}$$

și introducînd notațiile:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad p_1 = \frac{kr}{m} \qquad p_2 = \frac{kr^2}{4mb}$$

$$x_0 = l_0 + b - \frac{r^2}{4b} + \frac{mg}{k} \tag{6}$$

ecuația (5) devine:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = p_1\cos\omega t + p_2\cos 2\omega t + \nu^2 x_0. \tag{7}$$

Din forma acestei ecuații rezultă că asupra greutății, afară de forța elastică, acționează o forță perturbatoare din a cărei dezvoltare în serie s-au păstrat doi termeni, cel de pulsație ω și cel de pulsație 2ω, termenul constant arătînd că centrul de oscilație nu coincide cu originea. Ecuația (7) este o

ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică $\lambda^2 + \nu^2 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, deci integrala generală a ei este:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + x_p,$$

unde soluția particulară x_p este de forma:

$$x_p = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t + C.$$

Cum $\ddot{x}_p = -\omega^2 A_1 \cos \omega t - \omega^2 B_1 \sin \omega t - 4\omega^2 A_2 \cos 2\omega t - 4\omega^2 B_2 \cos 2\omega t$, înlocuind în ecuația (7) și identificînd coeficienții lui $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, $\cos 2\omega t$, $\sin 2\omega t$ și termenul constant, se obține:

$$A_1 = \frac{p_1}{\nu^2 - \omega^2} = \frac{\nu^2 r}{\nu^2 - \omega^2}, \qquad B_1 = 0, \qquad A_2 = \frac{p_2}{\nu^2 - 4\omega^2} = \frac{\nu r^2}{4(\nu^2 - 4\omega^2) b} r$$

$$B_2 = 0, \qquad C = x_0,$$

deci:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + \frac{\nu^2 r}{\nu^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{\nu^2 r^2}{4(\nu^2 - 4\omega^2) b} \cos 2\omega t + x_0. \qquad (8)$$

Punînd condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad x = r + b + l_0 + \frac{mg}{k} \qquad \dot{x} = 0.$$

$\left(\text{în poziția inițială } \theta = 0,\ OB = r + b, \text{ iar alungirea resortului } \Delta l_s = \frac{mg}{k}\right)$

și ținînd seamă de expresia (6) a lui x_0, rezultă $C_1 = \frac{\omega^2 r}{\omega^2 - \nu^2} + \frac{\omega^2 r^2}{(4\omega^2 - \nu^2) b}$ și $C_2 = 0$.

Mișcarea punctului este o mișcare oscilatorie în jurul centrului de oscilație $x = x_0$ și se obține din compunerea următoarelor oscilații: oscilația proprie de amplitudine $|C_1|$ și pulsație ν; prima oscilație forțată de amplitudine $|A_1| = \frac{\nu^2 r}{|\nu^2 - \omega^2|}$ și pulsație ω (armonica fundamentală); a doua oscilație forțată de amplitudine $|A_2| = \frac{\nu^2 r^2}{4|\nu^2 - 4\omega^2| b}$ și pulsație 2ω. Dacă se păstrează mai mulți termeni ai dezvoltării în serie (4) ar mai fi de ținut seamă și de armonicele superioare de pulsații $3\omega, 4\omega, \ldots, n\omega\ldots$ Amplitudinile acestor armonice superioare însă sînt în general foarte mici, afară de cazul cînd apare rezonanța. Pentru oscilația forțată fundamentală rezonanța apare pentru $\nu = \omega$, pentru armonica a doua dacă $\nu = 2\omega$. În general, rezonanța poate apărea pentru:

$$\nu = n\omega \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (9)$$

și dacă s-ar neglija frecările, amplitudinea armonicii respective $A_n \to \infty$ pentru $t \to \infty$. Dacă se ține însă seamă de amortizare, rezonanța nu va fi supărătoare, dacă apare la una dintre armonicele superioare.

Scanned with OKEN Scanner

23.15. Săgeata unei grinzi simplu rezemate (fig. 23.15), produsă de o forță aplicată la mijlocul ei, este $w = \frac{Pl^3}{48\,EI}$, unde l este distanța dintre reazeme, E — modulul de elasticitate și I — momentul de inerție al unei secțiuni normale pe axa grinzii. Știind că pe grindă se așază un motor avînd greutatea $P = 1\,000$ kgf, care are o turație $n = 270$ rot/min, să se spună dacă există pericol de rezonanță. Cît este în acest caz coeficientul de impact? Grinda este un profil I 20 din oțel avînd $E = 2\,100\,000$ kgf/cm², $I = 2\,140$ cm⁴, $l = 4$ m. Pentru ce turații există pericolul de rezonanță? Se va neglija masa grinzii.

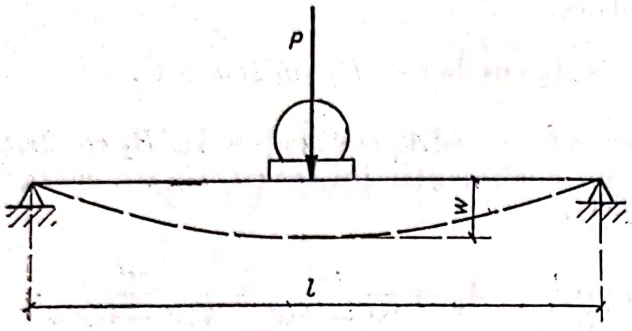


Fig. 23.15

Rezolvare. Existînd o relație liniară între forța P și deformare, să se asimileze grinda cu un resort a cărui constantă elastică este:

$$k = \frac{P}{w} = \frac{48\,EI}{l^3},$$

deci pulsația oscilațiilor proprii ale grinzii (23.3) este:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48\,EI\,g}{l^3 P}} = \sqrt{\frac{48\times 2{,}1\times 10^{10}\times 2{,}14\times 10^{-5}\times 9{,}81}{4^3\times 1\,000}\ \frac{\text{kgf/m}^2\cdot\text{m}^4\cdot\text{m/s}^2}{\text{m}^3\cdot\text{kgf}}} = 57{,}5\ \text{s}^{-1}$$

deoarece:

$E = 2\,100\,000$ kgf/m² $= 2{,}1\times 10^{10}$ kgf/m², $I = 2\,140$ cm⁴ $= 2{,}14\times 10^{-5}$ m⁴.

Pulsația oscilațiilor perturbatoare produse de părțile mobile ale motorului este:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\times 3{,}14\times 270}{60} = 28{,}26\ \text{s}^{-1}.$$

Pentru oscilația forțată fundamentală $\omega \ll \nu$ nu există pericol de rezonanță. Coeficientul de impact (23.27), neglijînd amortizarea ($\alpha = 0$), este:

$$\psi_1 = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right|} = \frac{1}{1-\left(\frac{28{,}26}{57{,}5}\right)^2} = 1{,}32.$$

Pentru a doua armonică de pulsație $2\omega = 56{,}52$ (v. problema 23.14), cum $2\omega \approx \nu$ poate apărea fenomenul de bătăi dacă amortizarea nu este puternică. Coeficientul de impact este în acest caz mult mai mare:

$$\psi_2 = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)\right|} = \frac{1}{1-\left(\frac{56{,}52}{57{,}5}\right)^2} = 29{,}6.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca să apară fenomenul de rezonanță pentru oscilația forțată fundamentală trebuie ca:

$$\omega = \nu = 57{,}5 \qquad n = \frac{60\nu}{2\pi} = \frac{60 \times 57{,}5}{2 \times 3{,}14} \approx 550 \text{ rot/min.}$$

Rezonanța apare pentru a doua armonică dacă:

$$2\,\omega = \nu \qquad n = \frac{1}{2}\frac{60\nu}{2\pi} \approx 275 \text{ rot/min.}$$

Pentru celelalte armonice pericolul de rezonanță care apare pentru $n = \frac{550}{m}\frac{\text{rot}}{\text{min}}$ (m = întreg) este neglijabil din cauza amortizării.

23.16. O sferă A de masă $m = 100$ g este suspendată de resortul AB având constanta elastică $k = 250\,000$ dyn/cm și lungimea în stare neîntinsă $l_0 = 29{,}6$ cm. Capătul de sus B al resortului execută oscilații pe verticală în jurul punctului C după legea $CB = a \sin \omega t$, unde $a = 14$ cm, $\omega = 50\ s^{-1}$. Să se studieze mișcarea sferei știind că rezistența mediului este proporțională cu viteza, factorul de amortizare fiind $h = 2\,800\ \frac{\text{dyn} \cdot \text{s}}{\text{cm}}$. În momentul inițial, sfera se găsește în punctul O (poziția ei de echilibru) și are viteza $v_0 = 350$ cm/s orientată pe verticală în sus.

Rezolvare. Se va alege drept origine poziția de echilibru O. În poziția de echilibru:

$$mg = k\,\Delta l_s, \tag{1}$$

deci lungimea resortului și distanța CO (în momentul inițial $t = 0$, $CB = 0$) sînt:

$$CO = l_0 + \Delta l_s = l_0 + \frac{mg}{k} = 29{,}6 + \frac{100 \times 981}{250\,000} \approx 30 \text{ cm.} \tag{2}$$

Forțele care acționează asupra sferei sînt greutatea proprie, forța elastică a resortului $\bar{F}$ și rezistența $\bar{R} = -h\bar{v}$ a mediului. Ecuația fundamentală a dinamicii (21.3) proiectată pe Ox (fig. 23.16) este:

$$m\ddot{x} = mg - F - h\dot{x}, \tag{3}$$

unde:

$$F = k(BA - l_0) = k\,(CO + OA - CB - l_0) = \\ = k(L_0 + \Delta l_s + x - a \sin \omega t - l_0). \tag{4}$$

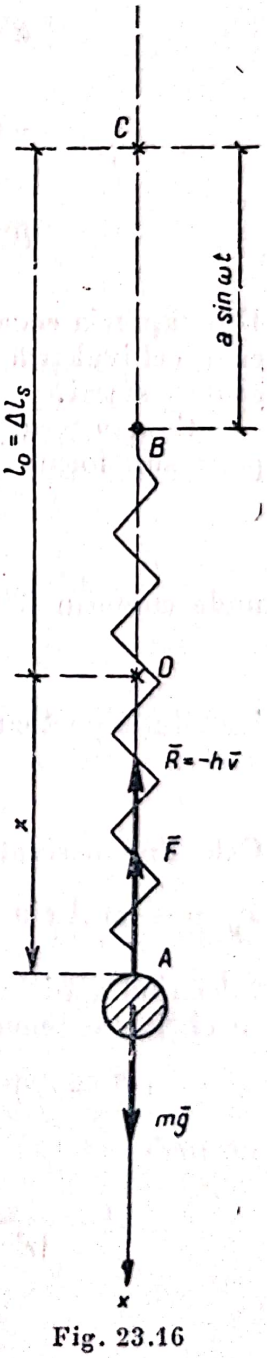


Fig. 23.16

Înlocuind pe (4) în (3) și ținînd seamă de (1) rezultă:

$$m\ddot{x} = -kx + ka \sin \omega t - h\dot{x}$$

și împărțind prin masa m se obține ecuația:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \nu^2 x = p \sin \omega t, \tag{5}$$

unde s-a notat conform (23.10):

$$\alpha = \frac{h}{2m} = \frac{2\,800}{2 \times 100} \frac{\text{g cm/s}^2 \cdot \text{s/cm}}{\text{g}} = 14\,\text{s}^{-1}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{250\,000}{100} \frac{\text{g cm/s}^2 \cdot 1/\text{cm}}{\text{g}}} = 50\ \text{s}^{-1}$$

$$p = \frac{ka}{m} = \nu^2 a = 50^2 \times 14 = 35\,000\ \ \text{cm/s}^2.$$

Din expresia ecuației (5) rezultă că mișcarea capătului de sus B al resortului este echivalentă cu introducerea forței perturbatoare $ka \sin \omega t$ acționînd asupra sferei.

Cum $\nu > \alpha$, conform (23.11), integrala generală a ecuației (5) se poate pune sub forma:

$$x = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + x_p, \tag{6}$$

unde conform (23.12):

$$\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48\ \text{s}^{-1},$$

iar soluția particulară este de forma:

$$x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Calculînd derivatele:

$$\dot{x}_p = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \qquad \ddot{x}_p = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t,$$

înlocuind apoi în ecuația (5) și identificînd coeficienții lui cos ωt și sin ωt se obține sistemul:

$$(\nu^2 - \omega^2) A + 2\alpha\omega B = 0 \qquad -2\alpha\omega A + (\nu^2 - \omega^2) B = p,$$

de unde:

$$A = \frac{-2\alpha\omega p}{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{-p}{2\alpha\omega} = \frac{-35\,000}{2 \times 14 \times 50} \frac{\text{cm/s}^2}{\text{s}^{-1}.\text{s}^{-1}} = -25\ \text{cm}$$

$$B = \frac{(\nu^2 - \omega^2)\ p}{(\nu^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = 0,$$

deoarece datele numerice sînt astfel alese, încît $\nu = \omega$, adică apare rezonanța. Legea de mișcare (6) și viteza sînt:

$$x = e^{-\alpha t}\,(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) - \frac{p}{2\alpha\omega}\cos \omega t \qquad (7)$$

$$\dot{x} = e^{-\alpha t}\,(-\alpha C_1 \cos \beta t - \alpha C_2 \sin \beta t - \beta C_1 \sin \beta t + \beta C_2 \cos \beta t) + \frac{p}{2\alpha}\sin \omega t.$$

Din condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0 \qquad x = 0 \qquad \dot{x} = -v_0 = -350 \text{ cm/s} \qquad (8)$$

rezultă:

$$C_1 = \frac{p}{2\alpha\omega} = 25 \text{ cm}, \qquad C_2 = \frac{1}{\beta}\left(\frac{p}{2\omega} - v_0\right) = \frac{1}{48}\left(\frac{35\,000}{2 \times 50} - 350\right) = 0.$$

Deci legea de mișcare, exprimată în unități ale sistemului *CGS*, este:

$$x = 25\, e^{-14t} \cos 48\, t - 25 \cos 50\, t.$$

Vibrația proprie $25\, e^{-14}\, t \cos 48\, t$ se amortizează foarte repede, după o secundă de la începutul mișcării, amplitudinile ei scăzînd de $e^{14} \approx 1\,200\,000$ de ori, faza tranzitorie fiind foarte scurtă. Oscilația forțată — $25 \cos 50\, t$ are însă o amplitudine mare ($|A| = 25$ cm), deoarece apare rezonanța. Coeficientul de impact (23.27) este și el mare:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}} = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{50}{2 \times 14} \approx 1{,}79.$$

Acest coeficient de impact se putea calcula și direct. Alungirea statică sub acțiunea forței perturbatoare maxime $F_0 = ka$ fiind $\frac{F_0}{k} = a = 14$ cm, rezultă:

$$\psi = \frac{|A|}{a} = \frac{25}{14} \approx 1{,}79.$$

23.17. Pe o grindă simplu rezemată de deschidere $l = 7{,}5$ m se așază la mijlocul ei un motor avînd greutatea $P = 800$ kgf (fig. 23.15). Săgeata grinzii este $w = \frac{Pl^3}{48\,EI}$, unde modulul de elasticitate al grinzii $E = 2\,100\,000$ kgf/cm², iar momentul de inerție al unei secțiuni normale pe axa grinzii este $I = 3060$ cm⁴ (grinda este un profil I 22 din oțel). În urma experiențelor făcute se constată că sistemul astfel alcătuit oscilează amortizat, și anume amplitudinea oscilațiilor proprii scade la a zecea parte din valoarea ei inițială după un minut. Știind că forța perturbatoare provocată de motor este:

$$F = F_1\left(\cos \omega t + \frac{1}{2^2}\cos 2\,\omega t + \frac{1}{3^2}\cos 3\,\omega t + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos n\omega t + \ldots\right) \qquad (1)$$

unde $F_1 = 40$ kgf, $\omega = 10\ s^{-1}$, să se determine amplitudinile $\mathcal{A}_n$ și coeficienții de impact ψ_n corespunzători armonicei de ordinul n al forței perturbatoare. Se va neglija masa grinzii.

Rezolvare. Deoarece între P și ω există o relație liniară, grinda poate fi asimilată cu un resort de constantă elastică:

$$k = \frac{P}{w} = \frac{48\,EI}{l^3}, \tag{2}$$

deci pulsația oscilației proprii neamortizate a grinzii este:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48\,EI\,g}{Pl^3}} = \sqrt{\frac{48 \times 2{,}1 \times 10^{10} \times 3{,}06 \times 10^{-5} \times 9{,}81}{800 \times 7{,}5^3}\ \frac{\text{kgf/m}^2 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{m/s}^2}{\text{kgf} \cdot \text{m}^3}} =$$

$$= 29{,}95\ s^{-1}, \tag{3}$$

deoarece: $E = 2{,}1 \times 10^6$ kgf/cm^2 $= 2{,}1 \times 10^{10}$ kgf/m^2, $I = 3\,060$ cm^4 $= 3{,}06 \times 10^{-5}$ m^4. Oscilația proprie a grinzii fiind amortizată din (23.11) sau din (23.24), ea poate fi pusă sub forma $x = A\,e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi)$, amplitudinea ei $A\,(t)$ variind după legea $A\,(t) = A\,e^{-\alpha t}$. Cum pentru $t = 1$ min $= 60$s, $A\,(60) = \frac{1}{10}A\,(O)$, rezultă:

$$Ae^{-60\alpha} = \frac{1}{10}A,$$

deci:

$$\alpha = \frac{1}{60}\ln 10 = \frac{1}{60} \times 2{,}3 = 0{,}0384\ s^{-1}. \tag{4}$$

Ținînd seamă de expresia (1) a forței perturbatoare, ecuația diferențială a mișcării poate fi pusă sub forma (23.23):

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \nu^2 x = p_1 \cos\omega\,t + p_2 \cos 2\,\omega t + p_3 \cos 3\,\omega t + \ldots + p_n \cos n\omega t + \ldots, \tag{5}$$

unde:

$$p_n = \frac{F_n}{m} = \frac{F_1 g}{n^2 P},$$

iar integrala generală (23.24) a ei este:

$$x = A\,e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi) + \mathcal{A}_1 \cos(\omega t - \Phi_1) + \mathcal{A}_2 \cos(2\,\omega t - \Phi_2) +$$

$$+ \mathcal{A}_3 \cos(3\,\omega t - \Phi_3) + \ldots + \mathcal{A}_n (\cos n\omega t - \Phi_n) + \ldots, \tag{6}$$

unde amplitudinile oscilațiilor forțate au expresia (23.25):

$$\mathcal{A}_n = \frac{pn}{\sqrt{[\nu^2 - (n\omega)^2]^2 + 4\alpha^2 (n\omega)^2}} = \frac{F_1 g}{n^2 P\sqrt{[\nu^2 - (n\omega)^2]^2 + 4\alpha^2 (n\omega)^2}}. \tag{7}$$

Valorile numerice ale forțelor perturbatoare maxime F_n, amplitudinilor $\mathcal{A}_n$ și coeficienților de impact (23.27):

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n\omega}{\nu}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2\left(\frac{n\omega}{\nu}\right)^2}},$$

pentru $n = 1, 2, \ldots, 10$ sînt trecute în tabela următoare:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n [kgf]	40	10	4,44	2,50	1,60	1,11	0,82	0,62	0,49	0,40
$\mathcal{A}_n$ [cm]	0,062	0,024	1,44	0,00436	0,00122	0,00050	0,00025	0,00014	0,00009	0,00006
ψ_n	1,125	1,805	237,1	1,276	0,560	0,332	0,224	0,163	0,125	0,099

Din această tabelă reiese că pentru a treia armonică ($n = 3$) pulsația $3\omega = 30\ s^{-1}$ este practic egală cu pulsația oscilațiilor proprii ale grinzii $\nu = 29{,}95\ s^{-1}$. Apare deci fenomenul de rezonanță, ceea ce explică valoarea mare a amplitudinii $\mathcal{A}_3$ și a coeficientului de impact ψ_3. Dacă valorile ν și 3ω ar fi fost chiar egale, s-ar fi obținut $\psi = 390$. Dacă rezonanța ar fi apărut pentru prima armonică (adică $\nu = 10\ s^{-1}$), rezulta $\mathcal{A}_1 \approx 64$ cm, și dacă ar fi apărut pentru a doua armonică (adică $\nu = 20\ s^{-2}$) s-ar fi obținut $\mathcal{A}_2 \approx 8$ cm. Astfel de valori ale amplitudinii oscilațiilor forțate ar fi fost supărătoare și ar fi putut duce la distrugerea grinzii.

23.18. Pe un bloc de fundație avînd baza un dreptunghi cu dimensiunile $a = 50$ cm, $b = 80$ cm este așezat un motor, greutatea motorului și a blocului

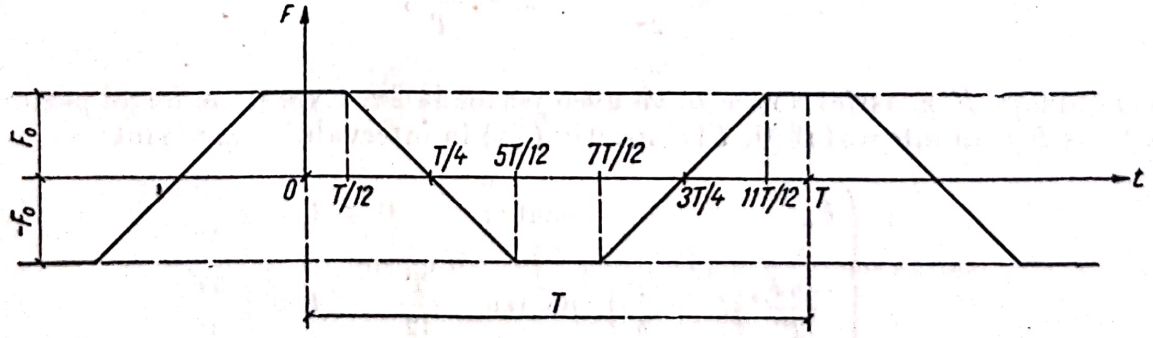


Fig. 23.18

de fundație fiind $G = 6\,400$ kgf. Forța perturbatoare a motorului variază după legea din figura 23.18, unde forța perturbatoare maximă $F_0 = 320$ kgf, iar perioada ei $T = \frac{\pi}{5}$ s. Tasarea terenului Δl este proporțională cu presiunea σ, $\Delta l = \frac{\sigma}{k_1}$, unde coeficientul $k_1 = 8$ kgf/cm³. Știind că dacă motorul nu

funcționează, amplitudinile oscilațiilor blocului de fundație se reduc la jumătate după două secunde, să se studieze oscilațiile blocului de fundație cînd motorul funcționează.

Rezolvare. Între greutatea G și tasarea terenului Δl există o relație liniară, deoarece presiunea $\sigma = \frac{G}{a\,b} = 1{,}6$ kgf/cm², iar $\Delta l = \frac{\sigma}{k_1} = \frac{G}{k_1\,a\,b} = 0{,}2$ cm. Deci se poate asimila sistemul format din blocul de fundație și motor cu un resort a cărui constantă elastică:

$$k = \frac{G}{\Delta l} = k_1\,ab$$

și a cărui pulsație pentru oscilația proprie neamortizată (23.3):

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1\,ab}{\frac{G}{g}}} = \sqrt{\frac{k_1\,a\,b\,g}{G}} = \sqrt{\frac{8 \times 50 \times 80 \times 980}{6\,400}\ \frac{\text{kgf/cm}^3 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm/s}^2}{\text{kgf}}} =$$

$$= 70\ \text{s}^{-1}. \tag{1}$$

Oscilația proprie a sistemului este amortizată, amplitudinea ei fiind $A(t) = A\,e^{-\alpha t}$ [formulele (23.11) sau (23.24)]. Cum pentru $t = 2\,s$, $A(2) = \frac{1}{2}A(0)$,

$$A\,e^{-2\alpha} = \frac{1}{2}A \qquad \alpha = \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}0{,}694 = 0{,}347\ \text{s}^{-1}. \tag{2}$$

Forța perturbatoare poate fi dezvoltată într-o serie Fourier (trigonometrică), deoarece este o funcție periodică și îndeplinește condițiile lui Dirichlet. Făcînd schimbarea de variabilă:

$$t = \frac{x\,T}{2\pi} \qquad x = \frac{2\pi t}{T}, \tag{3}$$

noua funcție $F(x)$ astfel obținută va avea perioada 2π. Expresiile forței perturbatoare $F(t)$ în intervalul $[0, T)$ respectiv $F(x)$ în intervalul $[0, 2\pi)$ sînt:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t < \frac{T}{12} \\ \frac{-6F_0}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right) & \text{pentru} \quad \frac{T}{12} \leqslant t < \frac{5T}{12} \\ -F_0 & \text{pentru} \quad \frac{5T}{12} \leqslant t < \frac{7T}{12} \\ \frac{6F_0}{T}\left(t - \frac{3T}{4}\right) & \text{pentru} \quad \frac{7T}{12} \leqslant t < \frac{11T}{12} \\ F_0 & \text{pentru} \quad \frac{11T}{12} \leqslant t < 2T \end{cases} \tag{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_0 & \text{pentru} \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \\ \frac{-3F_0}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{pentru} \quad \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{5\pi}{6} \\ -F_0 & \text{pentru} \quad \frac{5\pi}{6} \leqslant x < \frac{7\pi}{6} \\ \frac{3F_0}{\pi}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{pentru} \quad \frac{7\pi}{6} \leqslant x < \frac{11\pi}{6} \\ F_0 & \text{pentru} \quad \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi \end{cases} \tag{4}$$

Cum funcția $F(x)$ este pară, adică $F(x) = F(-x)$, ea se poate pune sub forma sumei unei funcții în cosinus:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{5}$$

unde coeficienții a_0 și a_n au expresiile:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx.$$

În cazul nostru:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} F_0\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{3F_0}{\pi}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(-F_0)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{3F_0}{\pi}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)dx + \int_{\frac{11\pi}{6}}^{2\pi} F_0\,dx\right] = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} F_0 \cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(-\frac{3F_0}{\pi}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos nx\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(-F_0)\cos nx\,dx + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{3F_0}{\pi}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\cos nx\,dx + \int_{\frac{11\pi}{6}}^{2\pi} F_0 \cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{3F_0}{\pi^2 n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{6} - \cos\frac{5\pi n}{6} - \cos\frac{7\pi n}{6} + \cos\frac{11\pi n}{6} = -\frac{12F_0}{\pi^2 n^2}\cos\pi n \sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{3}.\right.$$

Din expresia lui a_n rezultă că pentru n par sau pentru n multiplu de trei $a_n = 0$, iar:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{3}F_0}{\pi^2 n^2} & \text{pentru } n = 12k \pm 1 \\ \dfrac{-6\sqrt{3}F_0}{\pi^2 n^2} & \text{pentru } n = 12k \pm 5 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dezvoltarea în serie Fourier (5) a forței perturbatoare $F(t)$ este:

$$F(t) = \frac{6\sqrt{3}F_0}{\pi^2}\left[\cos\omega t - \frac{1}{5^2}\cos 5\omega t - \frac{1}{7^2}\cos 7\omega t + \frac{1}{11^2}\cos 11\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{13^2}\cos 13\omega t - \ldots\right], \qquad (6)$$

folosind relațiile (3) s-a trecut la vechea variabilă t și s-a notat:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10\ \text{s}^{-1}. \qquad (7)$$

Ținînd seamă de expresia (6) a forței perturbatoare, ecuația diferențială a mișcării blocului de fundație se poate pune sub forma (23.23):

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \nu^2 x = p_1\cos\omega t - p_5\cos 5\omega t - p_7\cos 7\omega t + p_{11}\cos 11\omega t +$$
$$+ p_{13}\cos 13\omega t - \ldots, \qquad (8)$$

unde:

$$p_n = \frac{F_n}{m} = \frac{6\sqrt{3}F_0}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{g}{G},$$

iar integrala generală (23.24) a ei este:

$$x = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi) + \Sigma\mathcal{A}_n\cos(n\omega t - \Phi_n) \qquad (n = 1, 5, 7, 11, 13, \ldots). \qquad (9)$$

Amplitudinile oscilațiilor forțate au expresia (23.25):

$$\mathcal{A}_n = \frac{p_n}{\sqrt{[\nu^2 - (n\omega)^2]^2 + 4\alpha^2(n\omega)^2}} = \frac{6\sqrt{3}F_0 g}{\pi^2 n^2 G\sqrt{[\nu^2 - (n\omega)^2]^2 + 4\alpha^2(n\omega)^2}}. \qquad (10)$$

În tabela următoare sînt trecute valorile forțelor perturbatoare maxime $F_n = \dfrac{6\sqrt{3}F_0}{\pi^2 n^2}$, accelerațiilor p_n, amplitudinilor $\mathcal{A}_n$ și coeficienților de

impact (23.27) $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{n\omega}{\nu}\right)^2\right]+4\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^2\left(\frac{n\omega}{\nu}\right)^2}}$ pentru $n = 1, 5, 7, 11$ și 13.

n	1	5	7	11	13
$F_{n[\text{kgf}]}$	336,95	13,48	6,88	2,79	1,99
$p_{n[\text{cm/s}^2]}$	51,6	2,06	1,05	0,43	0,31
$\mathcal{A}_{n[\text{cm}]}$	0,0108	0,00086	0,0217	0,000059	0,000025
ψ_n	1,021	2,042	100,9	0,681	0,408

Cu toate că forța perturbatoare ia valori foarte mari (motorul este prost echilibrat), amplitudinile oscilațiilor forțate sînt mici chiar pentru armonica $n = 7$ pentru care apare rezonanța, deoarece $\nu = 7\omega = 70\ \text{s}^{-1}$. Dacă rezonanța ar fi apărut pentru armonica fundamentală $\mathcal{A}_1 = 7{,}5$ cm, blocul de fundație s-ar fi distrus.

Din această problemă ca și din cea precedentă reiese că, în general, este suficient dacă ne ocupăm de studiul oscilațiilor produse de armonica fundamentală și eventual de armonica a doua.

23.19. Un punct material M de masă m se mișcă pe o dreaptă Ox sub acțiunea unei forțe elastice (centrul atractiv în O, constanta elastică k) și întîmpină o forță de rezistență constantă F_0 (de tipul forței de frecare coulombiene). Să se studieze mișcarea punctului pentru condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad x = x_0 \qquad \dot{x} = 0. \tag{1}$$

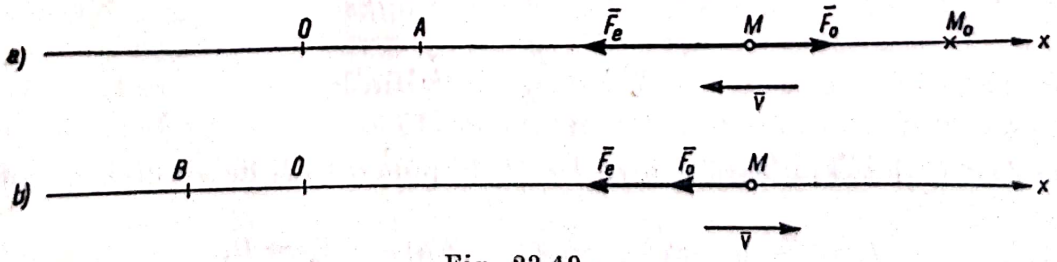


Fig. 23.19,*a*

Aplicație numerică: Punctul de masă $m = 0{,}1$ kg se mișcă pe o dreaptă orizontală avînd coeficientul de frecare $\mu = 0{,}1$, centrul atractiv C se găsește pe verticala punctului O la $c = 15$ cm sub punctul O, constanta elastică $k = 2$ kgf/m, iar $x_0 = 15$ cm (fig. 23.19, *b*).

Rezolvare. Asupra punctului M acționează forța elastică $\bar{F}_e = -k\bar{r} = -kx\bar{i}$ și forța de frecare $\bar{F}_0$, sensul ei fiind invers sensului vitezei punctului. Ecuația fundamentală a dinamicii este deci:

$$m\ddot{x} = -kx - F_0 \operatorname{sign} \dot{x}, \tag{2}$$

unde funcția sign x este definită prin:

$$\operatorname{sign} \dot{x} = \begin{cases} 1 & \dot{x} > 0 \\ -1 & \dot{x} < 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Vor fi examinate separat următoarele două cazuri (fig. 23.19,*a*):

a) $\dot{x} < 0$ punctul se mișcă în sens invers axei Ox. Din (1) și (2) rezultă:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \qquad \ddot{x} + \nu^2 x = \nu^2 a, \tag{2a}$$

unde s-a notat:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \frac{F_0}{k} = a, \quad \text{deci } \frac{F_0}{m} = \frac{k}{m} \cdot \frac{F_0}{k} = \nu^2 a. \tag{4}$$

Integrala generală a ecuației (2 a) este:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t + a. \tag{5 a}$$

Punctul pornește din M_0 fără viteză inițială, deci la începutul mișcării $\dot{x} < 0$, ecuația de mișcare (5 a) fiind valabilă. Ținînd seamă de condițiile inițiale (1) rezultă $C_1 = x_0 - a$, $C_2 = 0$, deci legea de mișcare și viteza sînt:

$$x = (x_0 - a) \cos \nu t + a \qquad \dot{x} = -\nu (x_0 - a) \sin \nu t \qquad t \geqslant 0, \tag{6}$$

mișcarea fiind o oscilație armonică în jurul punctului A de abscisă a, de amplitudine $x_0 - a = AM_0$. Acest rezultat era de așteptat, deoarece, conform relației (23.8), un punct acționat de o forță elastică și o forță constantă oscilează în jurul unui punct A al cărui vector de poziție este:

$$\overline{OA} = \frac{\bar{F}_0}{k} = a\bar{i}. \tag{7 a}$$

Viteza $\dot{x} < 0$ și se anulează pentru $t = t_1$ în punctul M_1 de abscisă x_1, unde:

$$t_1 = \frac{\pi}{\nu} \qquad x_1 = -(x_0 - 2a) \qquad \dot{x}_1 = 0, \tag{8}$$

apoi pornește spre dreapta ($\dot{x} > 0$).

b) $\dot{x} > 0$. Ecuația (2) devine:

$$m\ddot{x} = -kx - F_0 \qquad \ddot{x} + \nu^2 x = -\nu^2 a, \tag{2 b}$$

cu integrala generală:

$$x = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t - a \tag{5 b}$$

și ținînd seamă de condițiile inițiale (8) din punctul M_1 rezultă:

$$x = (x_0 - 3a) \cos \nu t - a \qquad \dot{x} = -\nu (x_0 - 3a) \sin \nu t \quad t \geqslant \frac{\pi}{\nu}. \tag{9}$$

Mișcarea este o oscilație armonică în jurul centrului de oscilație B avînd vectorul de poziție (23.8):

$$\overline{OB} = \frac{\overline{F}_0}{k} = -a\vec{i}, \tag{7 b}$$

avînd amplitudinea BM_1.

Mobilul se oprește din nou în punctul M_2 pentru:

$$t_2 = \frac{2\pi}{\nu} \; x_2 = x_0 - 4a \qquad \dot{x}_2 = 0. \tag{10}$$

Apoi punctul M pornește din nou spre stînga, $\dot{x} < 0$, punînd condițiile inițiale (10) în ecuația (5 a) rezultă:

$$x = (x_2 - a) \cos \nu t + a = (x_0 - 5a) \cos \nu t + a, \qquad t \geqslant \frac{2\pi}{\nu},$$

ecuație similară cu (6) în care, în loc de x_0, apare abscisa x_2. Mișcarea este o oscilație în jurul punctului A de abscisă AM_2.

Continuînd raționamentele va rezulta că mobilul execută oscilații alternativ în jurul punctului $A(a)$, respectiv $B\ (-a)$, oprindu-se în punctele M_0, M_1, M_2, ..., M_n, de abscise x_0, $x_1 = -(x_0 - 2a)$, $x_2 = x_0 - 4a$,..., $x_n = (-1)^n\ (x_0 - 2na)$, amplitudinile acestor oscilații $x_0 - a$, $x_0 - 3a$, $x_0 - 5a$, ... descrescînd într-o progresie aritmetică de rație $2a$.

Mobilul se va opri definitiv în punctul M_n în care forța elastică nu va putea învinge forța de frecare (deoarece sub acțiunea forței de frecare punctul nu se poate pune în mișcare). În acest punct va rezulta $|F_e| \leqslant F_0$, $k\,|x_n| \leqslant F_0$:

$$|x_n| = |x_0 - 2na| \leqslant \frac{F_0}{k} = a. \tag{11}$$

Numărul de semioscilații pînă la oprire va fi:

$$\frac{x_0}{2a} - \frac{1}{2} \leqslant n < \frac{x_0}{2a} + \frac{1}{2}\ (n = \text{întreg}). \tag{12}$$

Fiecare semioscilație durează $\frac{\pi}{\nu}$ s, deci pseudoperioada mișcării T și timpul pînă la oprire t_n sînt:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \qquad t_n = \frac{n\pi}{\nu}. \tag{13}$$

În cazul aplicației numerice (fig. 23.19, *b*), forța elastică este $\bar{F}_e = -k\,\bar{C}\bar{M} = -k(x\bar{i} - c\bar{j})$; ecuația fundamentală a dinamicii $m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}_e + \bar{N} + \bar{F}_0$ ($\bar{N}$ — reacțiunea normală, $\bar{F}_0$ — forța de frecare) proiectată pe Oy este:

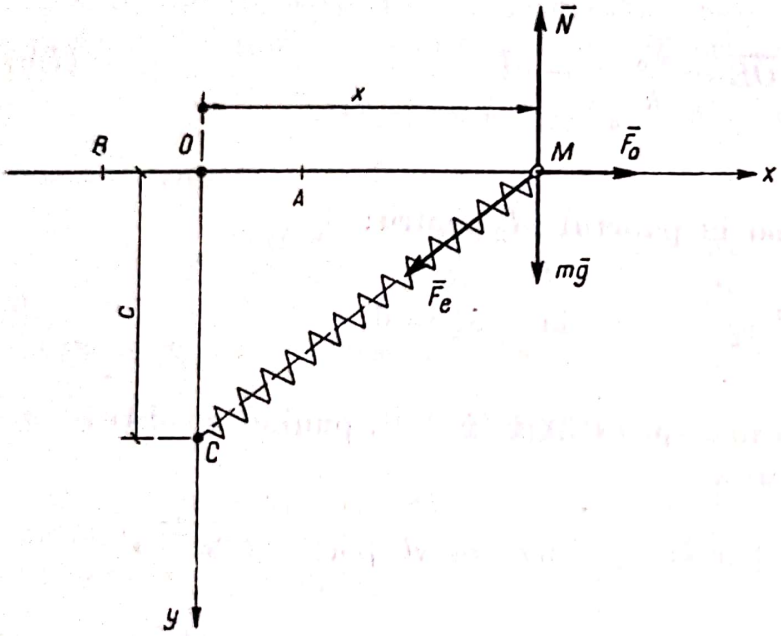


Fig. 23.19,*b*

$$O = mg + kc - N,$$

întrucît mișcarea fiind rectilinie $a_y = 0$. Rezultă:

$$N = mg + kc$$

$$F_0 = \mu N = \mu\,(mg + kc).$$

Proiectînd aceeași ecuație pe Ox se obține:

$$m\ddot{x} = -kx \pm F_0 = -$$

$$-kx - F_0 \operatorname{sign} \dot{x} \tag{2}$$

(după cum mișcarea se face într-un sens sau în celălalt), ecuație care a fost studiată.

Făcînd înlocuirile numerice în (4) rezultă:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}1/9{,}81}\ \frac{\text{kgf/m}}{\text{kgf}\cdot s^2/\text{m}}} \approx 14\ \text{s}^{-1}$$

$$a = \frac{F_0}{k} = \mu\left(\frac{mg}{k} + c\right) = 0{,}1\left(\frac{0{,}1}{2} + 0{,}15\right)\text{m} = 2\ \text{cm}.$$

Centrele de oscilație A și B au abscisele $a = 2$ cm și $-a = -2$ cm. Pînă la oprire punctul execută conform relației (12):

$$\frac{x_0}{2a} - \frac{1}{2} \leqslant n < \frac{x_0}{2a} + \frac{1}{2} \qquad 3{,}25 \leqslant n < 4{,}25$$

$n = 4$ semioscilații, punctele de oprire M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 avînd abscisele $x_0 = 15$ cm, $x_1 = -(x_0 - 2a) = -11$ cm, $x_2 = x_0 - 4a = 7$ cm, $x_3 = -(x_0 - 6a) = -3$ cm, $x_4 = x_0 - 8a = -1$ cm, amplitudinile osci-

lațiilor fiind $x_0 - a = 13$ cm, $x_0 - 3a = 9$ cm, $x_0 - 5a = 5$ cm, $x_0 - 7a = 1$ cm. Pseudoperioada și timpul pînă la oprire (13) sînt:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\pi}{7}\,\text{s} \qquad t_n = \frac{n\pi}{\nu} = \frac{4\pi}{14}\,\text{s} \approx 0{,}9\,\text{s}.$$

În figura 23.19, *c* s-a reprezentat vibrograma mișcării.

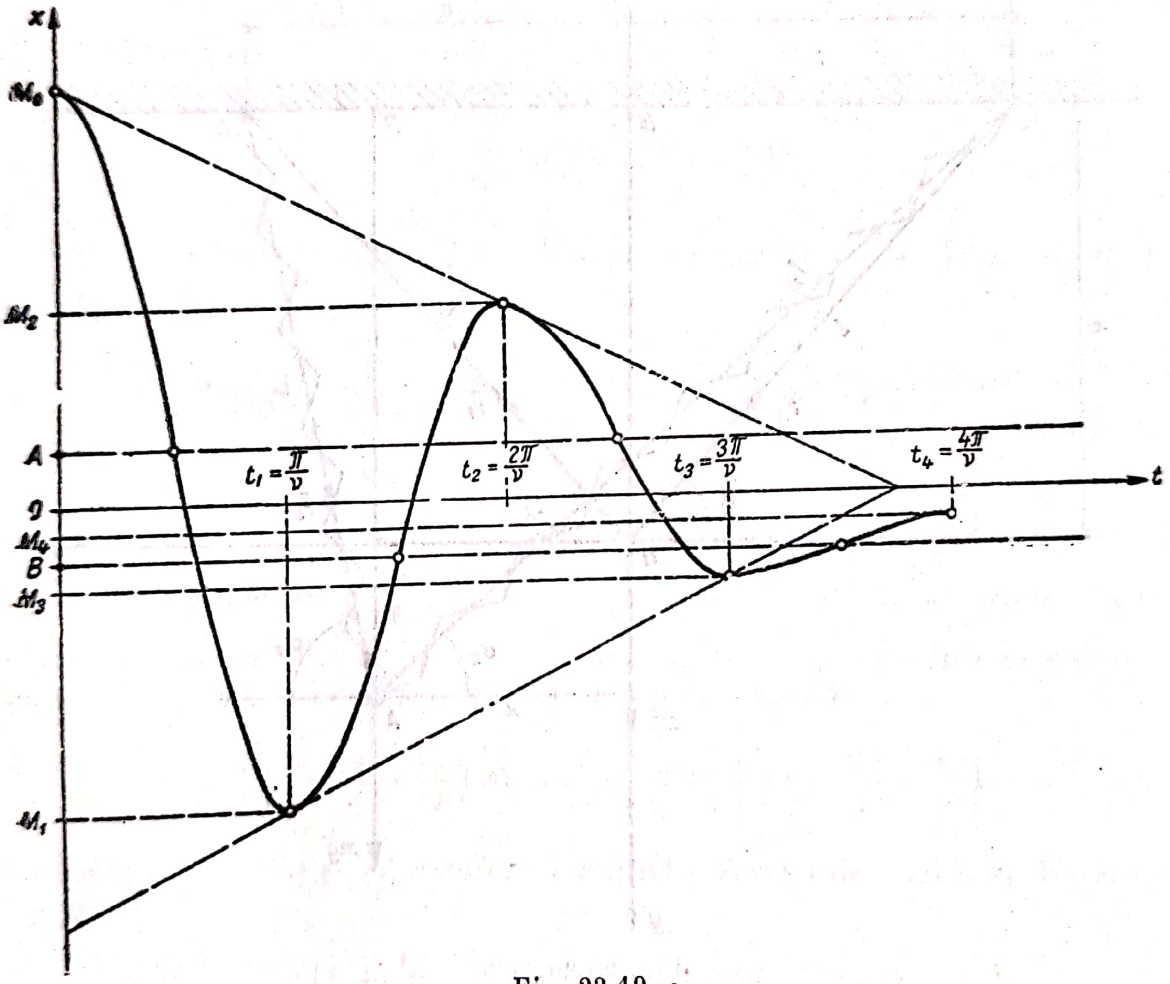


Fig. 23.19, *c*

23.20. O sferă A de masă m este suspendată prin două resorturi avînd aceeași constantă elastică k și aceeași lungime în stare neîntinsă l_0 de tavan în punctele C_1 și C_2 situate la distanța $C_1C_2 = 2a$. Să se studieze micile oscilații din planul vertical OC_1C_2 ale sferei A în jurul poziției de echilibru O.

Rezolvare. În poziția de echilibru O, simetrică în raport cu punctele de suspensie, scriind o ecuație de proiecție pe verticală se obține:

$$mg = 2F_1 \sin\alpha, \qquad (1)$$

unde $F_1 = F_2 = k(l - l_0)$ sînt tensiunile din resorturi, egale între ele, $l = OC_1 = OC_2$ este lungimea resorturilor în poziția de echilibru, iar α este unghiul dintre resorturi și orizontală. Cum $\sin\alpha = \frac{h}{l}$ ($h = BO$ fiind distanța de la poziția de echilibru pînă la tavan), relația (1) devine:

$$mg = 2kh\left(1 - \frac{l_0}{l}\right). \qquad (2)$$

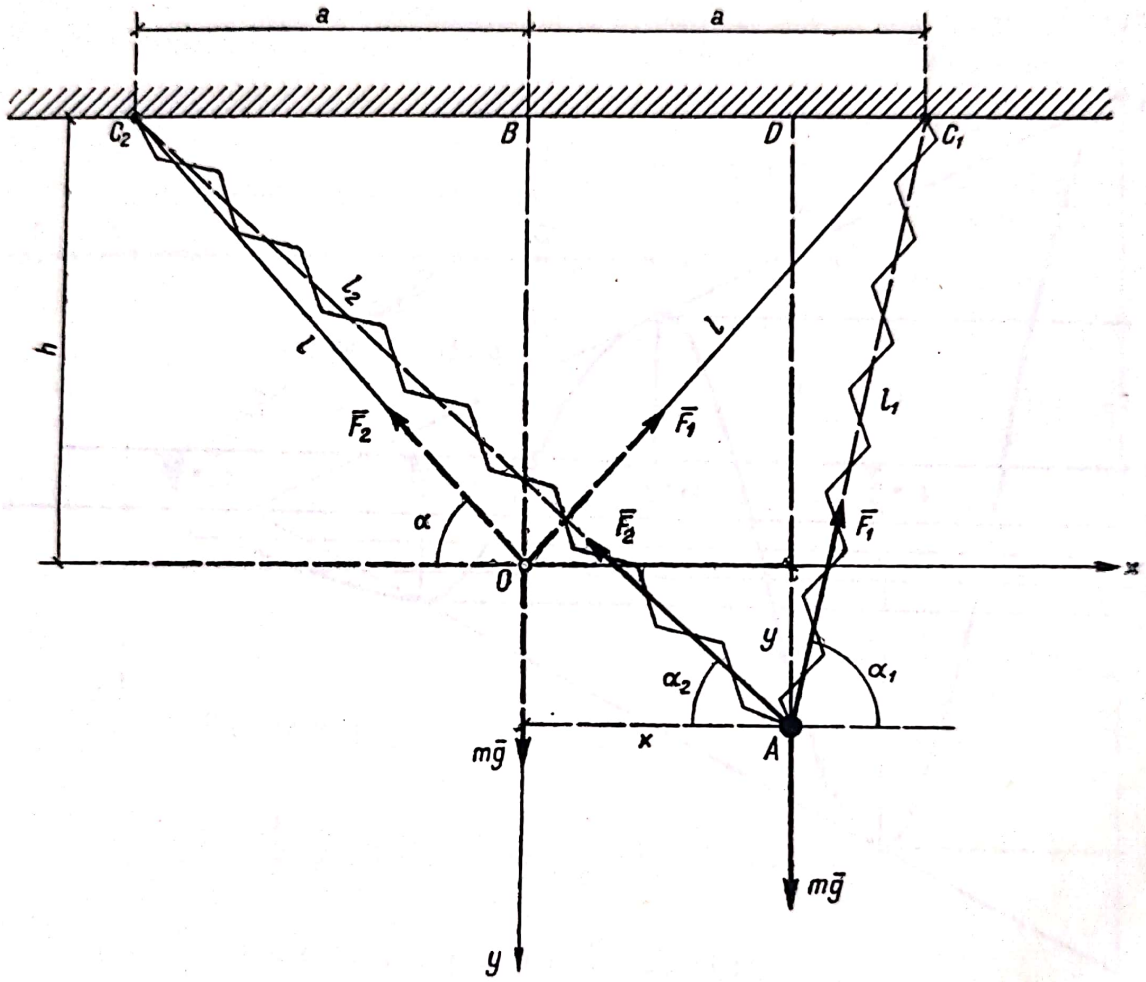


Fig. 23.20, *a*

Din ecuația (2) și relația:

$$l = \sqrt{a^2 + h^2} \qquad (3)$$

se poate determina distanța h care definește poziția de echilibru O.

Ecuația fundamentală a dinamicii (21.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2,$$

proiectată pe axele sistemului de coordonate din figura 23.20, *a*, va servi la studiul mișcării. Se va obține:

$$m\ddot{x} = F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 \qquad m\ddot{y} = mg - F_1\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2, \qquad (4)$$

α_1 și α_2 fiind unghiurile formate de resorturile $AC_1 = l_1$ și $AC_2 = l_2$ cu orizontala. Însă:

$$F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 = k (l_1 - l_0) \frac{a - x}{l_1} - k (l_2 - l_0) \frac{a + x}{l_2} =$$

$$= - kx \left(2 - \frac{l_0}{l_1} - \frac{l_0}{l_2}\right) + ka \left(\frac{l_0}{l_2} - \frac{l_0}{l_1}\right), \tag{5}$$

$$F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 = k (l_1 - l_0) \frac{h + y}{l_1} + k (l_2 - l_0) \frac{h + y}{l_2} =$$

$$= k (h + y) \left(2 - \frac{l_0}{l_1} - \frac{l_0}{l_2}\right).$$

Să calculăm expresiile $\frac{l_0}{l_1}$ și $\frac{l_0}{l_2}$. Din triunghiurile AC_1D și AC_2D și din (3) rezultă:

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{l_0}{\sqrt{(a - x)^2 + (h + y)^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{l^2 - 2ax + 2hy + x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{l_0}{l} \left(1 - \frac{2ax}{l^2} + \frac{2hy}{l^2} + \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

și cum pentru mici oscilații $\left| - \frac{2ax}{l^2} + \frac{2hy}{l^2} + \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right| < 1$, se poate folosi dezvoltarea în serie după binomul lui Newton și neglija termenii care conțin deplasările x și y la puteri superioare lui unu. Rezultă:

$$\frac{l_0}{l_1} \approx \frac{l_0}{l} \left(1 + \frac{ax}{l^2} - \frac{hy}{l^2}\right) \text{ și analog } \frac{l_0}{l_2} \approx \frac{l_0}{l} \left(1 - \frac{ax}{l^2} - \frac{hy}{l^2}\right). \tag{6}$$

Din ecuațiile (4), (5) și (6) rezultă, neglijînd termenii de gradul al doilea în x și y:

$$m\ddot{x} = - 2kx \left(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{a^2 l_0}{l^3}\right) \qquad m\ddot{y} = mg - 2kh \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) -$$

$$- 2ky \left(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{h^2 l_0}{l^3}\right). \tag{7}$$

Ținînd seamă de condiția de echilibru (3) ecuațiile (7) se pot pune sub forma:

$$\ddot{x} + \nu_1^2 x = 0 \qquad \ddot{y} + \nu_2^2 y = 0, \tag{8}$$

unde:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{a^2 l_0}{l^3}\right)} \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{h^2 l_0}{l^3}\right)}, \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuații ale căror integrale generale sînt:

$$x = A_1 \cos(\nu_1 t - \varphi_1) \qquad y = A_2 \cos(\nu_2 t - \varphi_2), \tag{10}$$

constantele A_1, φ_1 și A_2, φ_2 depinzînd de condițiile inițiale.

Pentru $\nu_1 = \nu_2$, adică $a = h$, traiectoria este o elipsă. Pentru $\nu_1 \neq \nu_2$ traiectoria, în general, nu este o curbă închisă. Ea rămîne în interiorul dreptunghiului $-A_1 \leqslant x \leqslant A_1 \quad -A_2 \leqslant y \leqslant A_2$ (fig. 23.20, *b*), ceea ce arată că

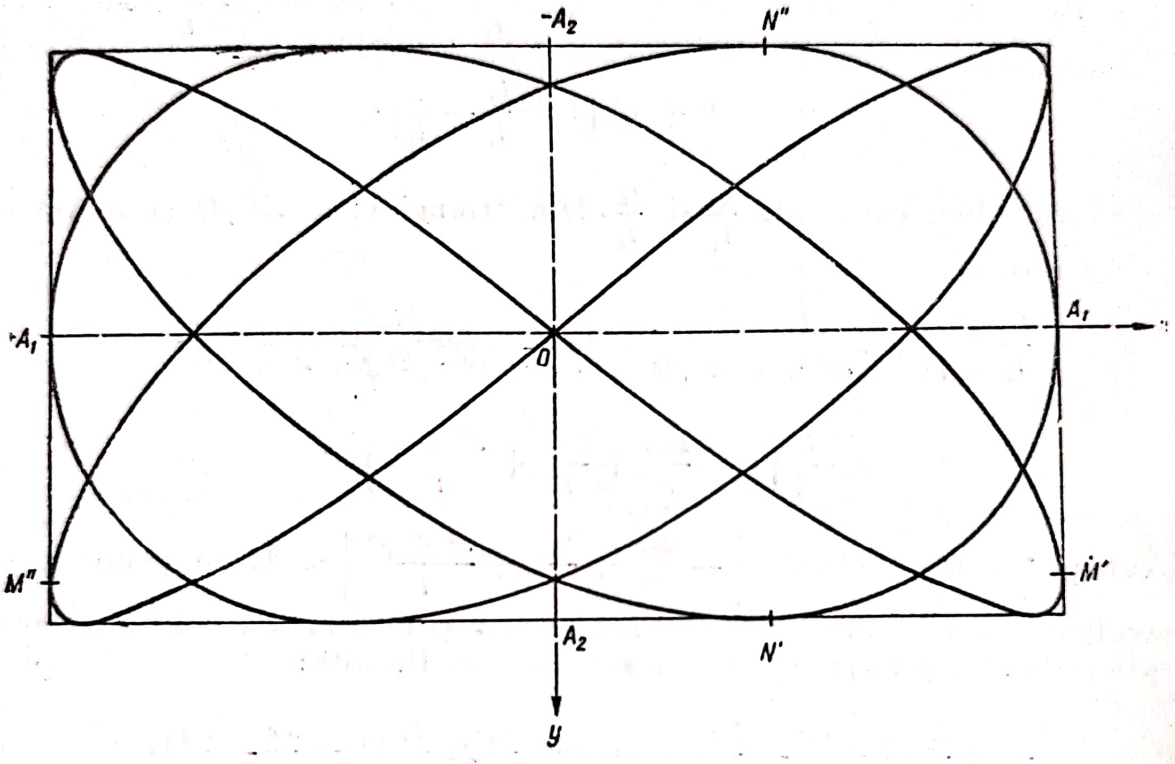


Fig. 23.20, *b*

micile oscilații ale punctului sînt stabile (v. cap. XXXV). Traiectoria punctului este tangentă la dreptunghi. În adevăr, din expresiile componentelor vitezei $\dot{x} = -\nu_1 A_1 \sin(\nu_1 t - \varphi_1)$ $\dot{y} = -\nu_2 A_2 \sin(\nu_2 t - \varphi_2)$ rezultă că pentru punctele M' sau M'', $x = \pm A_1$, $\nu_1 t - \varphi_1 = k_1 \pi$, $\dot{x} = 0$, adică viteza este paralelă cu Oy, deci tangentă la dreptunghi, iar pentru punctele N' sau N'', $y = \pm A_2$, $\nu_2 t - \varphi_2 = k_2 \pi$, $\dot{y} = 0$, adică viteza este paralelă cu Ox, deci tangentă la dreptunghi.

Pentru ca traiectoria să fie o curbă închisă trebuie ca mobilul să treacă prin aceeași poziție $P(x,y)$ la intervale de timp T, egale, adică:

$$A_1 \cos(\nu_1 t - \varphi_1) = A_1 \cos[\nu_1 (t + T) - \varphi_1]$$

$$A_2 \cos(\nu_2 t - \varphi_2) = A_2 \cos[\nu_2 (t + T) - \varphi_2]$$

$$(\nu_1 t - \varphi_1) + 2 k_1 \pi = \nu_1 (t + T) - \varphi_1 \quad \nu_2 t - \varphi_2 + 2 k_2 \pi = \nu_2 (t + T) - \varphi_2,$$

de unde:

$$T = \frac{2k_1\pi}{\nu_1} = \frac{2k_2\pi}{\nu_2} \qquad (k_1,\ k_2 \text{ — numere întregi}). \tag{11}$$

Din relația (11) rezultă condiția:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{k_1}{k_2} = \text{rațional}, \tag{12}$$

adică raportul pulsațiilor să fie un număr rațional. În acest caz, traiectoria este o curbă Lissajous. În figura 23.20, *b* s-a trasat o curbă Lissajous pentru

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{3}{4}, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}.$$

Dacă condiția (12) nu este îndeplinită, traiectoria este o curbă deschisă, mobilul nu va mai trece prin punctul $P(x, y)$ prin care a mai trecut. Se poate arăta că traiectoria este o curbă care „umple" tot dreptunghiul, adică trece prin orice vecinătate a unui punct oarecare al dreptunghiului.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

23.21. De un resort având constanta elastică $k = 3\,200$ dyn/cm este suspendată o greutate $G = 200$ gf. Știind că în momentul inițial greutatea se afla pe verticala Ox a poziției de echilibru O la distanța $x_0 = 5$ cm și avea viteza $v_0 = 20$ cm/s îndreptată pe verticală în jos, se cere legea de mișcare $x = x(t)$, amplitudinea A a mișcării, faza inițială $-\varphi$, pulsația ν, perioada T și frecvența f.

Răspuns. În unități ale sistemului CGS $x = 5\cos 4t + 5\sin 4t$, $A = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\nu = 4\ s^{-1}$, $T = \frac{\pi}{2}$ s, $f = \frac{2}{\pi} = 0{,}636\ s^{-1}$.

23.22. O greutate $G = 0{,}4$ kgf este legată de un fir elastic suspendat în punctul O de lungime $l_0 = 15$ cm în stare neîntinsă și având alungirea statică $\Delta l_s = 2$ cm sub acțiunea greutății G. Lăsînd greutatea să cadă liber din punctul O, să se afle alungirea maximă Δl_{max} și tensiunea maximă F_{max} a firului.

Răspuns: $\Delta l_{max} = \Delta l_s + \sqrt{\Delta l_s^2 + 2l_0\Delta l_s} = 10$ cm,

$$F_{max} = \frac{G\Delta l_{max}}{\Delta l_s} = 2 \text{ kgf}.$$

23.23. Corpul A de greutate $G = 100$ kgf este suspendat prin două resorturi de punctele B și C situate pe aceeași verticală, la distanța $a = 1$ m, constantele elastice ale resorturilor fiind $k_1 = 60$ N/cm, $k_2 = 40$ N/cm și

lungimile lor în stare neîntinsă, $l_{10} = 40$ cm, $l_{20} = 30$ cm. Știind că în momentul inițial corpul se găsește în poziția de echilibru și are viteza $v_0 = 90$ cm/s (fig. 23.23), se cere să se determine poziția de echilibru și să se studieze mișcarea corpului în jurul poziției de echilibru. Care este perioada de oscilație T?

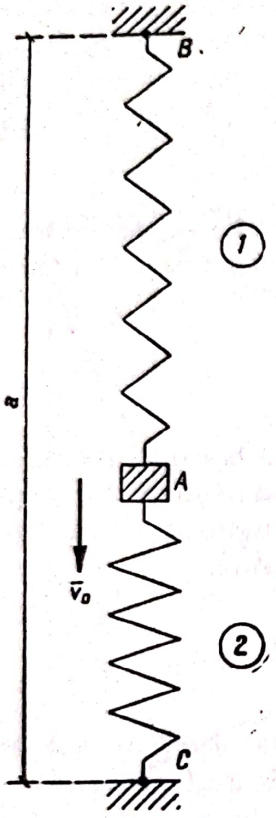


Fig. 23.23

Răspuns: În poziția de echilibru: $BA = \frac{k_1 l_{10} + k_2(a - l_{20}) + G}{k_1 + k_2} = 61{,}81$ cm. Alegînd originea în poziția de echilibru și axa Ox verticala descendentă, legea de mișcare este $x = A \sin \nu t$, unde $A = \frac{v_0}{\nu} = 9$ cm, $\nu = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)g}{G}} = 10\text{s}^{-1}$, iar $T = \frac{2\pi}{\nu} = 0{,}628$ s.

23.24. Să se rezolve problema precedentă știind că corpul A în mișcare întîmpină rezistența aerului proporțională cu viteza și că după fiecare oscilație completă amplitudinea scade de 21 de ori.

Răspuns: $x = Ae^{-\alpha t} \sin \beta t$, unde $\alpha = \frac{\nu \ln 21}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 21}} = 4{,}36\text{s}^{-1}$, $\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} = 9\text{s}^{-1}$, $\nu = 10\text{s}^{-1}$, $A = \frac{v_0}{\beta} = 10$cm, $T = \frac{2\pi}{\beta} = 0{,}698$ s.

23.25. Asupra unui corp de greutate $G = 3$ kgf, suspendat de un resort avînd constanta elastică $k = 15$ kgf/m, acționează o forță perturbatoare verticală $F_p = F_0 \cos \omega t$, unde $F_0 = 9$ N și $\omega = 5\text{s}^{-1}$. Să se studieze mișcarea corpului știind că în momentul inițial el se găsea în stare de repaus, în poziția de echilibru.

Răspuns: Dacă x este deplasarea pe verticală a corpului față de poziția de echilibru, $x = A(\cos \omega t - \cos \nu t)$, unde $A = \frac{F_0 g}{G(\nu^2 - \omega^2)} = 12{,}5$ cm, $\nu = \sqrt{\frac{kg}{G}} \approx 7\text{s}^{-1}$.

23.26. O grindă suportă la mijlocul ei un motor cu greutatea $G = 4\,000$ kgf. Coeficientul de elasticitate al grinzii $k = 10\,000$ kgf/cm. Făcîndu-se experiențe s-a constatat că dacă motorul nu funcționează, amplitudinea oscilațiilor care la început era $A_0 = 1$ cm scade după $t_1 = 2$ min, la $A_1 = 0{,}5$ cm. Să se studieze oscilația grinzii în cazul cînd motorul s-ar pune în funcțiune, iar turația lui ar fi $n = 473$ rot/min, forța perturbatoare $F_p = F_0 \cos \omega t$, unde $F_0 = 30$ kgf.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns: Apare rezonanța, deoarece $\nu = \sqrt{\frac{kg}{G}} = 49{,}5\ s^{-1}$, $\omega = \frac{n\pi}{30} = 49{,}5 s^{-1}$, legea de mișcare este deci conform (23.26): $x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) + \mathcal{A} \sin \omega t$, unde $\alpha = \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1} = 0{,}00578\ s^{-1}$, $\beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2} \approx \nu$, $\mathcal{A} = \frac{F_0 g}{2\alpha\nu G} = 12{,}85$ cm, și coeficientul de impact $\psi = \frac{\nu}{2\alpha} = 4\,282$. Motorul nu funcționează în bune condiții pe grindă.

Capitolul XXIV

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

În studiul mișcării punctului material supus la legături se admite *axioma legăturilor* care permite să se înlăture legătura (curba sau suprafața) și să se introducă în locul ei o forță de legătură (reacțiune) după care punctul este considerat liber. Se poate deci aplica ecuația fundamentală a dinamicii:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{24.1}$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta tuturor forțelor aplicate punctului (forțe efectiv aplicate și reacțiunea). Dacă legătura este lucie, reacțiunea $\bar{N}$ este normală (pe suprafață sau cuprinsă în planul normal la curbă); dacă se ține seamă de frecare, componenta tangențială a reacțiunii, forța de frecare $\bar{T}$ este:

$$T = \mu N, \tag{24.2}$$

μ fiind coeficientul de frecare.

În general se va căuta să se separe problema determinării mișcării punctului de cea a determinării reacțiunii. Cum poziția unui punct material pe o curbă depinde de un parametru, și poziția lui pe o suprafață — de doi parametri, pentru determinarea mișcării va trebui să se găsească o ecuație (respectiv două) în care să nu intervină reacțiunea necunoscută. În acest scop se pot folosi cele trei teoreme generale: teorema impulsului, teorema momentului cinetic și teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic.

Impulsul $\bar{H}$, al unui punct material, este produsul dintre masa și viteza sa:

$$\bar{H} = m\bar{v}. \tag{24.3}$$

Teorema impulsului se enunță astfel: *Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forțelor care acționează asupra punctului*, adică:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F}. \tag{24.4}$$

Dacă masa punctului este constantă, teorema impulsului coincide cu ecuația fundamentală a dinamicii (24.1).

Dacă reacţiunea nu se proiectează pe o anumită direcţie, proiectînd ecuaţia (24.1) sau (24.4) pe acea direcţie se obţine o ecuaţie de mişcare. Proiecţiile ecuaţiei (24.4) pe axele unui triedru de referinţă fix $Oxyz$ sînt

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = X, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = Y, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = Z, \tag{24.5}$$

unde X, Y, Z sînt proiecţiile rezultantei forţelor $\bar{F}$ pe aceleaşi axe. Proiecţiile ecuaţiei (24.1) pe axele triedrului intrinsec sînt:

$$m\ddot{\Delta} = m\dot{v} = F_\tau, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = F_\nu, \qquad O = F_\beta, \tag{24.6}$$

unde F_τ, F_ν, F_β sînt proiecţiile rezultantei $\bar{F}$, pe tangentă, normala principală şi binormală, iar ρ este raza de curbură a traiectoriei.

În sfîrşit, în coordonate cilindrice aceste ecuaţii de proiecţii sînt:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_n \quad m\ddot{z} = F_z, \tag{24.7}$$

unde F_r, F_n, F_z sînt proiecţiile rezultantei $\bar{F}$ pe direcţia razei polare Or, a normalei On la raza polară din planul xOy şi pe axa Oz (fig. 21, *a*).

Momentul cinetic $\bar{K}$ al unui punct material faţă de un punct fix O este momentul impulsului său faţă de punctul O, adică:

$$\bar{K} = \bar{r} \bullet m\bar{v}. \tag{24.8}$$

Teorema momentului cinetic se enunţă astfel: *Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic faţă de un punct fix O este egală cu momentul rezultantei forţelor care acţionează asupra punctului faţă de O*, adică:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \overline{\mathfrak{M}}_0. \tag{24.9}$$

Dacă reacţiunea are momentul nul faţă de un punct O sau de o axă Δ, aplicînd teorema momentului cinetic faţă de O sau faţă de Δ se obţin ecuaţii de mişcare ale punctului.

Proiecţiile ecuaţiei momentului cinetic (24.9) pe un sistem de axe fixe sînt:

$$\frac{d}{dt}K_x = \mathfrak{M}_x \qquad \frac{d}{dt}K_y = \mathfrak{M}_y \qquad \frac{d}{dt}K_z = \mathfrak{M}_z, \tag{24.10}$$

unde:

$$K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \qquad K_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \qquad K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{24.11}$$

sînt momentele cinetice faţă de axele Ox, Oy, Oz, şi $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ — momentele rezultantei faţă de aceleaşi axe.

În coordonate cilindrice:

$$K_z = mr^2\dot{\theta}, \tag{24.12}$$

unde $r^2\dot{\theta} = 2\Omega$ reprezintă dublul vitezei areolare a punctului A', proiecţia pe planul xOy a punctului A (fig. 21, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Energia cinetică E a unui punct material este:

$$E = \frac{1}{2} mv^2, \tag{24.13}$$

lucrul mecanic elementar $d\mathfrak{L}$ fiind:

$$d\mathfrak{L} = \bar{F} \cdot d\bar{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{24.14}$$

Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic se enunță astfel: *Variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar*, adică:

$$dE = d\mathfrak{L}. \tag{24.15}$$

Integrînd ecuația (24.15) se obține:

$$E - E_0 = \mathfrak{L}, \tag{24.16}$$

unde lucrul mecanic $\mathfrak{L}$ este dat de integrala curbilinie:

$$\mathfrak{L} = \int_{A_0 A} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \tag{24.17}$$

care depinde în general de traiectoria punctului.

Dacă forța $\bar{F}$ derivă dintr-o funcție de forță U, adică atunci cînd:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{24.18}$$

lucrul mecanic nu depinde decît de extremitățile traiectoriei, deoarece, în acest caz:

$$\mathfrak{L} = \int_{A_0 A} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{A_0 A} dU = U - U_0, \tag{24.19}$$

iar ecuația (24.16) devine:

$$E + V = E_0 + V_0 = \text{const.}, \tag{24.20}$$

unde $V = -U$ este *energia potențială*, iar $E + V$ *energia mecanică* a punctului. Ecuația (24.20) este cunoscută sub numele de *teorema conservării energiei mecanice*.

Exemple de forțe care derivă dintr-o funcție de forță.

Greutatea punctului $\bar{G} = m\bar{g}$, pentru care:

$$U = -mgz \qquad \mathfrak{L} = -mg(z - z_0) = -mgh \tag{24.21}$$

(axa Oz este verticală și orientată în sus, iar diferența de nivel dintre poziția inițială și cea finală este $h = z - z_0$).

Forța elastică $\bar{F} = -k\bar{r}$ pentru care:

$$U = -\frac{1}{2} kr^2 \qquad \mathfrak{L} = -\frac{1}{2} k(r^2 - r_0^2), \tag{24.22}$$

unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, iar k este constanta elastică.

Scanned with OKEN Scanner

Forța de atracție universală $\bar{F} = -f\frac{Mm}{r^2}\bar{\rho} = -f\frac{Mm}{r^3}\bar{r}$ pentru care:

$$U = \frac{fMm}{r} \qquad \mathfrak{L} = fMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), \tag{24.23}$$

unde f este constanta de atracție universală, M și m — masele corpurilor care se atrag, $\bar{\rho} = \text{vers}\,\bar{r}$, iar $\bar{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic elimină totdeauna reacțiunea normală $\bar{N}$, lucrul mecanic al acesteia fiind nul. Relația obținută aplicînd această teoremă este scalară, determinînd în general legătura dintre viteza punctului și poziția lui pe traiectorie.

Problemele acestui capitol se rezolvă astfel:

Pentru determinarea mișcării se folosesc acele teoreme generale care elimină reacțiunea necunoscută. Se integrează ecuațiile astfel obținute (sînt de preferat ecuații care admit integrale prime) și se determină, cu ajutorul condițiilor inițiale, constantele de integrare.

Cunoscînd mișcarea, se poate determina ulterior și reacțiunea, și problema este astfel complet rezolvată.

B. PROBLEME REZOLVATE

24.1. Să se studieze mișcarea unui punct material greu A, aruncat pe linia de cea mai mare pantă a unui plan luciu, înclinat sub unghiul α față de orizontală.

Rezolvare. Asupra punctului A acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, singura forță efectiv aplicată. Se eliberează punctul de legături introducînd reacțiunea $\bar{N}$, normală la plan, deoarece planul este luciu. Alegînd sistemul de axe din figura 24.1 cu originea O în poziția inițială a punctului, se poate determina mișcarea proiectînd ecuația impulsului (24.4) pe axa Ox, $\bar{N}$ neavînd proiecție decît pe axa Oy. Rezultă:

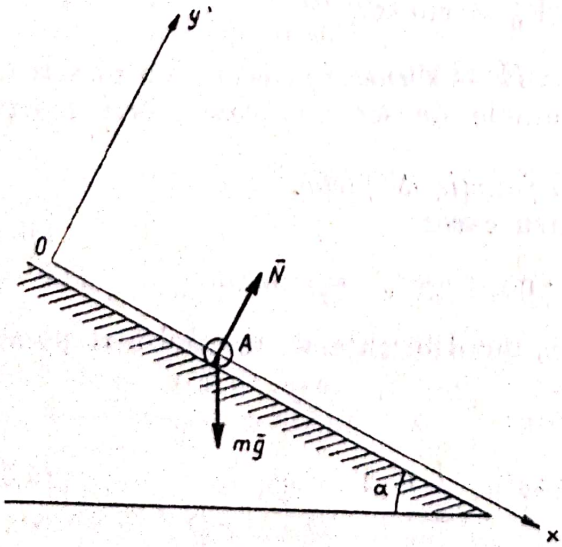


Fig. 24.1

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m\bar{g} + \bar{N},$$

ecuațiile de proiecție (24.5) fiind:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = mg\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg\cos\alpha + N. \tag{2}$$

Integrînd ecuația (1) după simplificarea cu m, se află legea de mișcare a mobilului pe planul înclinat:

$$\dot{x} = gt\sin\alpha + C_1$$

$$x = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha + C_1 t + C_2. \tag{3}$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0. \end{cases}$$

Legea de mișcare a punctului și viteza x sînt:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha + v_0 t \qquad x = gt \sin \alpha + v_0, \tag{4}$$

adică mișcarea unui punct material pe un plan înclinat luciu este uniform variată.

Discuție. Dacă $v_0 \geqslant 0$, adică punctul pleacă din repaus sau i se imprimă o viteză inițială în sens descendent, mișcarea este uniform accelerată. Dacă $v_0 < 0$, adică se imprimă punctului o viteză inițială în sens ascendent, mișcarea este la început uniform întîrziată (mișcarea ascendentă), pînă cînd viteza se anulează $t = -\frac{v_0}{g \sin \alpha} = \frac{|v_0|}{g \sin \alpha}$ și apoi mișcarea este descendentă, uniform accelerată. Înălțimea maximă atinsă de punct corespunde abscisei $x = -\frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$.

Accelerația punctului $\ddot{x} = g \sin \alpha$ este mai mică decît accelerația gravitației. Dacă $\alpha = 0$ (planul este orizontal), accelerația este nulă $\ddot{x} = 0$ și punctul are o mișcare rectilinie și uniformă cînd $v_0 = 0$ sau stă în repaus dacă $v_0 = 0$.

Pentru determinarea reacțiunii N se folosește ecuația (2). Cum în tot timpul mișcării punctul rămîne pe planul înclinat $y = 0$, $\dot{y} = 0$, deci:

$$N = mg \cos \alpha, \tag{5}$$

reacțiunea fiind constantă.

Problema se putea rezolva și folosind teorema energiei care elimină reacțiunea normală. Cum greutatea derivă dintr-o funcție de forță, se poate folosi teorema conservării energiei mecanice (24.20):

$$E + V = E_0 + V_0. \tag{6}$$

Cum din (24.13):

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \qquad E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

și din (24.21):

$$V = -U = -mg x \sin \alpha \qquad V_0 = 0,$$

diferența de nivel fiind $x \sin \alpha$, ecuația (6) devine, după simplificări:

$$v^2 = v_0^2 + 2gx \sin \alpha. \tag{7}$$

Din această expresie rezultă că viteza depinde numai de poziția punctului (de abscisa lui, x), fiind aceeași ca mărime atît la urcare, cît și la coborîre.

Derivînd ecuația (6) se obține accelerația punctului, aceeași cu cea obținută prin aplicarea teoremei impulsului.

Scanned with OKEN Scanner

24.2. Un punct material greu A este aruncat în sus cu viteza v_0 pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat, sub unghiul α față de orizontală. Planul este aspru, coeficientul de frecare fiind μ.

Rezolvare. Asupra punctului material A acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, singura forță efectiv aplicată, cum și reacțiunea care are o componentă $\bar{N}$ normală la plan și o componentă tangentă la plan, forța de frecare $\bar{T}$ care

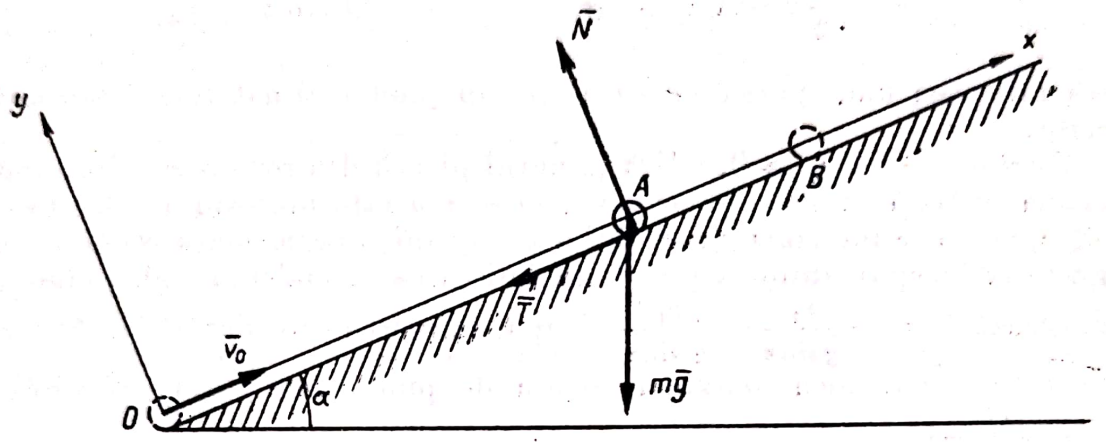


Fig. 24.2, *a*

se opune mișcării. În prima parte a mișcării, mișcarea ascendentă, forța de frecare va fi dirijată în jos (fig. 24.2, *a*). Problema se va rezolva cu ajutorul teoremei impulsului (24.4):

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{T}.$$

Alegînd sistemul de axe ca în figura 24.2, *a*, cu originea în poziția inițială a punctului, și proiectînd aceste ecuații se obține (24.5):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -mg\sin\alpha - T, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg\cos\alpha + N. \tag{2}$$

Pentru a determina legea de mișcare se va integra ecuația (1) în care, conform (24.2), $T = \mu N$. Din ecuația (2), ținînd seamă că $y = 0$, rezultă $N = mg\cos\alpha$ și

$$T = \mu mg\cos\alpha. \tag{3}$$

Făcînd toate înlocuirile și ținînd seamă de condițiile inițiale,

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$ se obțin legea de mișcare și viteza:

$$x = -\frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + v_0 t$$

$$\dot{x} = -gt(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + v_0. \tag{4}$$

Mişcarea ascendentă a punctului este uniform întîrziată cu acceleraţia $\ddot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, viteza punctului descreşte anulîndu-se pentru $t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$. Punctul de înălţime maximă B are deci abscisa $x = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

Cînd se studiază mişcarea descendentă a punctului, forţa de frecare $\bar{T}$ îşi va schimba sensul fiind orientată ca în figura 24.2, *b*. Proiectînd ecuaţia impulsului (24.5) pe axele Bx şi By se obţine:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = mg\sin\alpha - T \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -mg\cos\alpha + N \qquad (5)$$

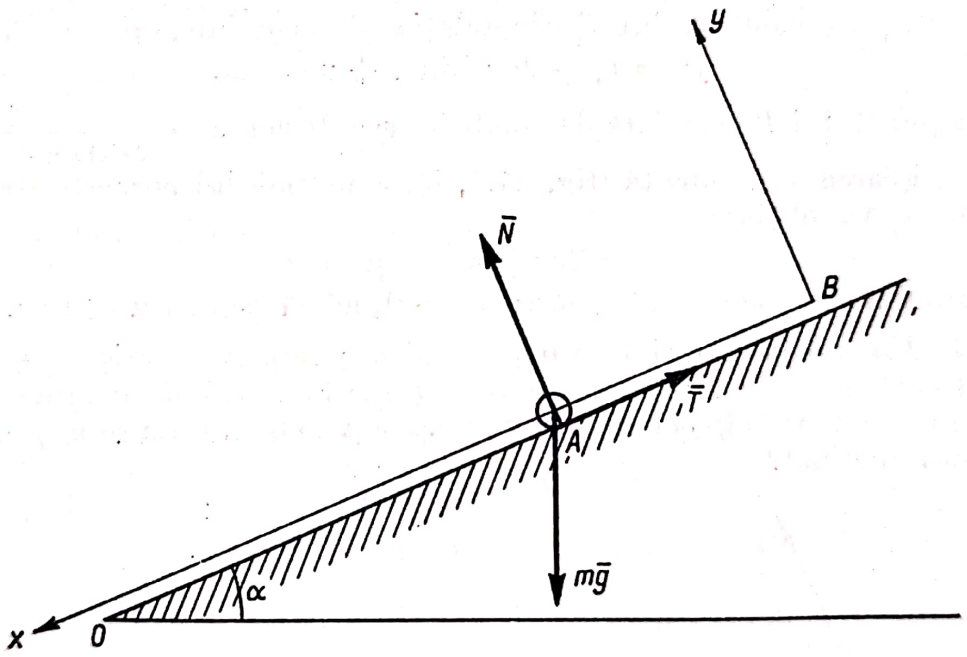


Fig. 24.2,*b*

şi cum $y = 0$ rezultă din a doua ecuaţie (5):

$$N = mg\cos\alpha \qquad T = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

prima ecuaţie (5) devine:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (6)$$

Se vede că acceleraţia mobilului este constantă, mişcarea fiind:

uniform accelerată dacă $(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > 0$, adică $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi < \alpha$;

uniformă dacă $(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0$, adică $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi = \alpha$;

uniform întîrziată dacă $(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) < 0$, adică $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, $\varphi > \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi = \text{arc tg}\mu$ este unghiul de frecare. Cum în momentul inițial (al mișcării descendente) $v = 0$, punctul nu va porni decît în primul caz $\alpha > \varphi$, în celelalte două cazuri forța de frecare menținînd punctul în echilibru.

Integrînd ecuația (6) și punînd condițiile inițiale din punctul B.

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$ se obțin legea de mișcare și viteza:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad \dot{x} = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

În rezolvarea problemei se putea folosi și teorema energiei (24.15). Pentru mișcarea ascendentă (fig. 24.2,*a*) rezultă:

$$d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = -mg\sin\alpha\, dx - T\, dx$$

și înlocuind cu valoarea lui T din relația (3) prin integrare se obține:

$$v^2 = v_0^2 - 2gx(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Abscisa punctului B este dată de condiția $v = 0$ sau $x = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

În mișcarea descendentă (fig. 24.2, *b*), cum mobilul pornește fără viteză inițială, se va obține:

$$v^2 = 2gx(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

și mișcarea nu are sens decît pentru $v^2 > 0$, adică pentru $\mu < \text{tg}\,\alpha$.

24.3. Un punct material greu pornind din repaus se mișcă pe un plan înclinat sub un unghi α. Planul are o porțiune lucie AB de lungime l și apoi o porțiune aspră avînd coeficientul de frecare $\mu > \text{tg}\,\alpha$. Cum se mișcă punctul pe planul înclinat?

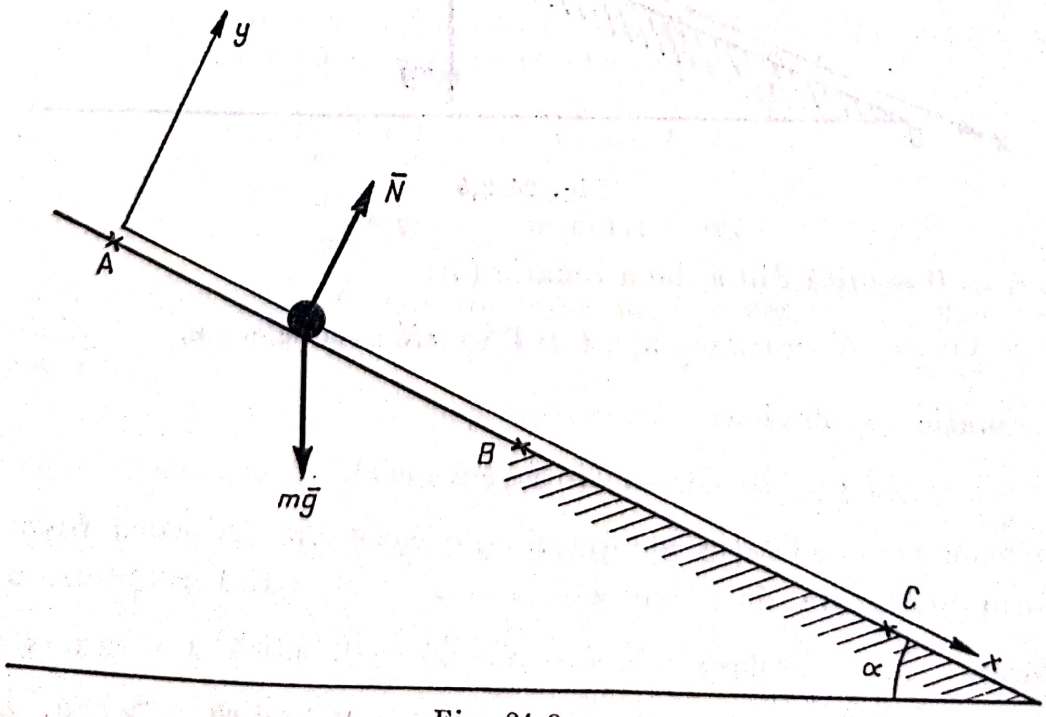


Fig. 24.3, *a*

Rezolvare. Mișcarea punctului pe porțiunea AB (fig. 24.3,*a*). Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$$

pe axa Ox

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha$$

și integrînd-o se obține legea de mișcare pe porțiunea lucie:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \qquad (1)$$

(mișcare uniform accelerată). Mișcarea se poate studia și cu teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic (24.16). Cum lucrul mecanic al reacțiunii normale este egal cu zero, se obține:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = mgx \sin \alpha.$$

Viteza mobilului în punctul B va fi:

$$v_B = \sqrt{2gl \sin \alpha}. \qquad (2)$$

În mișcarea pe planul aspru BC (fig. 24.3, *b*), pe lîngă forțele $m\bar{g}$ și $\bar{N}$, mai acționează asupra punctului și forța de frecare $\bar{T}$.

Aplicînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{T}$$

și proiectînd-o pe axele de coordonate Bx și By se obține:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T \qquad O = -mg \cos \alpha + N. \qquad (3)$$

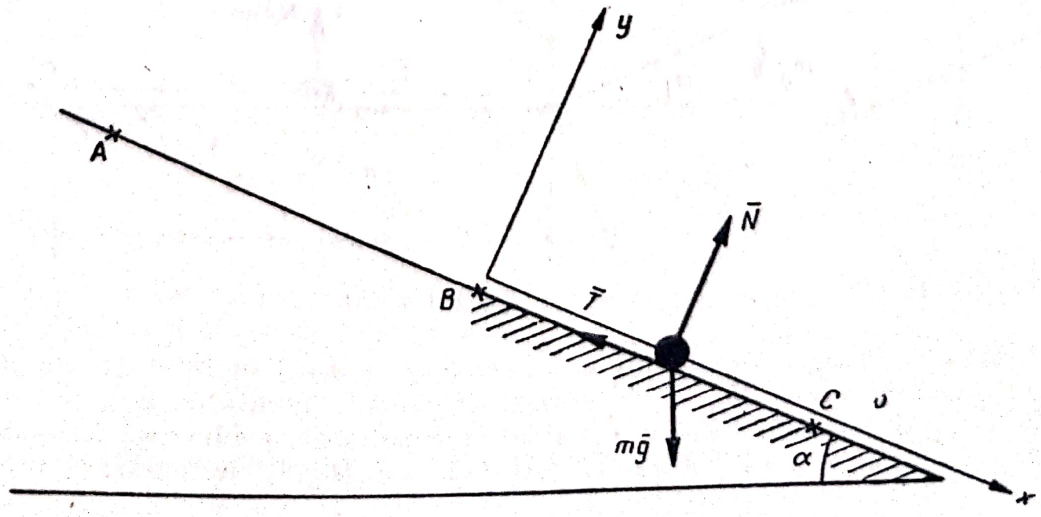


Fig. 24.3,*b*

Cum $T = \mu N$ și $N = mg \cos \alpha$, integrînd prima ecuație (3) și punînd condițiile inițiale: $t = 0 \begin{cases} x = 0 \\ v = v_B \end{cases}$ se obține legea de mișcare:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + v_B t, \tag{4}$$

mișcarea fiind uniform încetinită, deoarece din $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ rezultă accelerația $\ddot{x} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < O$.

Se putea aplica și teorema energiei (24.15):

$$d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = mg \sin \alpha \, dx - T dx.$$

Înlocuind valoarea lui T și integrînd rezultă:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_B^2 = mgx (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

În punctul C în care se oprește mobilul $v_C = 0$, deci abscisa lui, ținînd seamă și de (2), este:

$$x_C = \frac{v_B^2}{2g (\mu \cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{l \sin \alpha}{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

24.4. Un punct greu pornind din punctul A al unui plan înclinat luciu AB cu unghiul de înclinare α se mișcă pe acest plan și apoi pe un plan orizontal aspru BC pînă în punctul C unde se oprește (fig. 24.4). Să se determine coeficientul de frecare μ al planului orizontal dacă $AB = l_1$ și $BC = l_2$.

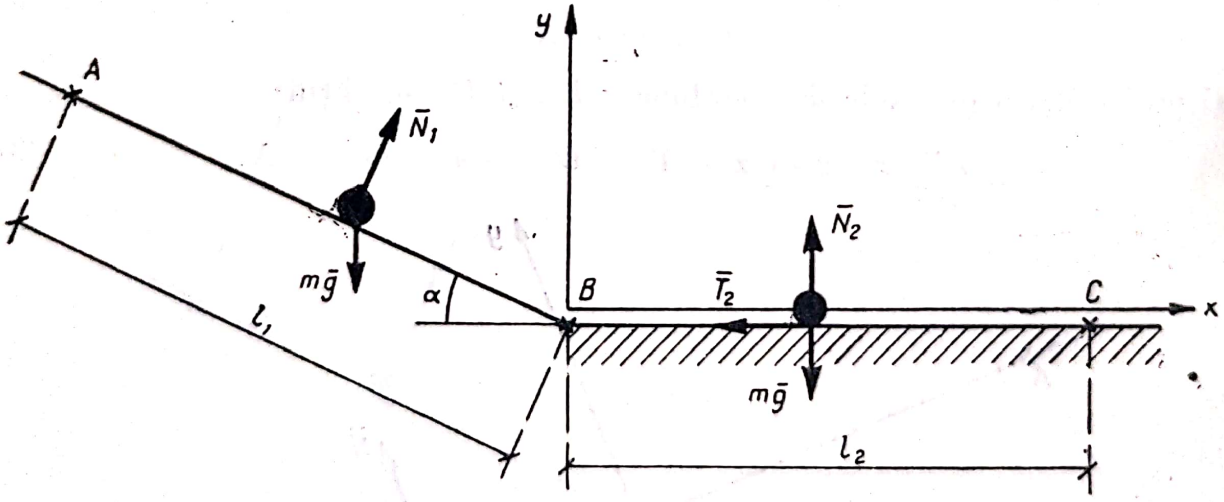


Fig. 24.4

Rezolvare. Asupra punctului acționează pe planul înclinat greutatea $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}_1$, și pe planul orizontal, greutatea $m\bar{g}$, reacțiunea normală $\bar{N}_2$ și forța de frecare $\bar{T}_2$. Pentru rezolvarea problemei se va folosi teorema energiei (24.16), deoarece elimină reacțiunea normală:

$$\frac{1}{2} mv_C^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = \mathfrak{L}_{AB} + \mathfrak{L}_{BC}, \tag{1}$$

unde $v_A = v_C = 0$ (punctul pornește fără viteză inițială din A și se oprește în C).

Pe porțiunea AB singura forță care dă lucru mecanic este greutatea proprie $m\bar{g}$, deci conform (24.21):

$$\mathfrak{L}_{AB} = mgl_1 \sin \alpha. \qquad (2)$$

Pe porțiunea BC numai forța de frecare $\bar{T}_2$ dă lucru mecanic. Pentru a determina forța T_2 trebuie să se determine reacțiunea normală N_2. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe axa verticală By se obține:

$$0 = N_2 - mg,$$

de unde $N_2 = mg$ și $T_2 = \mu N_2 = \mu\, mg$ și, deci, conform (24.17):

$$\mathfrak{L}_{BC} = \int_{BC} -T_2\, dx = -\int_0^{l_2} \mu\, mg\, dx = -\mu\, mg\, l_2. \qquad (3)$$

Făcînd înlocuirile în ecuația (1) se obține:

$$0 = mg\, l_1 \sin \alpha - \mu\, mgl_2$$

$$\mu = \frac{l_1 \sin \alpha}{l_2}.$$

24.5. Un pendul matematic A de lungime l și masă m este adus în poziție orizontală și apoi i se imprimă o viteză inițială verticală $\bar{v}_0$. Să se determine viteza pendulului și tensiunea din fir.

Rezolvare. Asupra pendulului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și tensiunea N din fir (fig. 24.5). Pentru determinarea vitezei se va folosi teorema energiei (24.16):

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgl \sin \varphi$$

[lucrul mecanic al tensiunii $\bar{N}$ fiind nul, iar lucrul mecanic al greutății fiind dat de relația (24.21)]. Rezultă:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\, gl \sin \varphi}. \qquad (1)$$

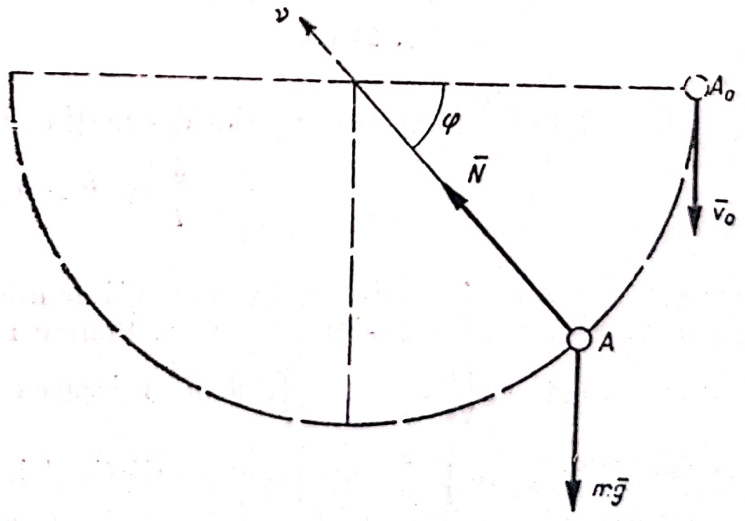


Fig. 24.5

Pentru a determina tensiunea se va proiecta ecuația fundamentală pe normala principală (24.6). Va rezulta:

$$m \frac{v^2}{l} = N - mg \sin \varphi$$

sau înlocuind cu valoarea lui v din relația (1) se obține:

$$N = mg\left(3 \sin \varphi + \frac{v_0^2}{gl}\right). \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $v_A = v_C = 0$ (punctul pornește fără viteză inițială din A și se oprește în C).

Pe porțiunea AB singura forță care dă lucru mecanic este greutatea proprie $m\bar{g}$, deci conform (24.21):

$$\mathcal{L}_{AB} = mgl_1 \sin \alpha. \qquad (2)$$

Pe porțiunea BC numai forța de frecare $\bar{T}_2$ dă lucru mecanic. Pentru a determina forța T_2 trebuie să se determine reacțiunea normală N_2. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe axa verticală By se obține:

$$O = N_2 - mg,$$

de unde $N_2 = mg$ și $T_2 = \mu N_2 = \mu\, mg$ și, deci, conform (24.17):

$$\mathcal{L}_{BC} = \int_{BC} -T_2\, dx = -\int_0^{l_2} \mu\, mg\, dx = -\mu\, mg\, l_2. \qquad (3)$$

Făcînd înlocuirile în ecuația (1) se obține:

$$0 = mg\, l_1 \sin \alpha - \mu\, mgl_2$$

$$\mu = \frac{l_1 \sin \alpha}{l_2}.$$

24.5. Un pendul matematic A de lungime l și masă m este adus în poziție orizontală și apoi i se imprimă o viteză inițială verticală $\bar{v}_0$. Să se determine viteza pendulului și tensiunea din fir.

Rezolvare. Asupra pendulului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și tensiunea N din fir (fig. 24.5). Pentru determinarea vitezei se va folosi teorema energiei (24.16):

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgl \sin \varphi$$

[lucrul mecanic al tensiunii $\bar{N}$ fiind nul, iar lucrul mecanic al greutății fiind dat de relația (24.21)]. Rezultă:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl \sin \varphi}. \qquad (1)$$

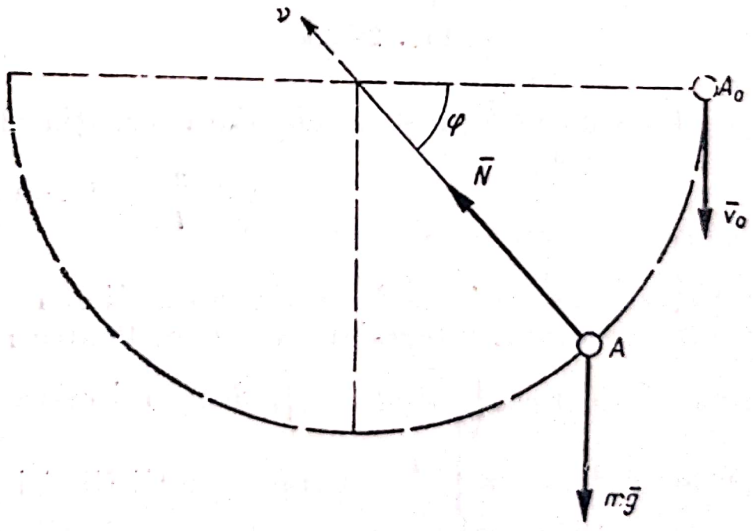


Fig. 24.5

Pentru a determina tensiunea se va proiecta ecuația fundamentală pe normala principală (24.6). Va rezulta:

$$m \frac{v^2}{l} = N - mg \sin \varphi$$

sau înlocuind cu valoarea lui v din relația (1) se obține:

$$N = mg \left(3 \sin \varphi + \frac{v_0^2}{gl}\right). \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

24.6. Un pendul matematic alcătuit dintr-un fir de lungime l și un punct material greu A, de masă m, primește în poziția de echilibru o viteză inițială v_0. Să se studieze mișcarea pendulului și să se determine tensiunea din fir.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și tensiunea $\bar{N}$ din fir (fig. 24.6, *a*). Problema se poate rezolva folosind ecuația fundamentală a dinamicii (24.):

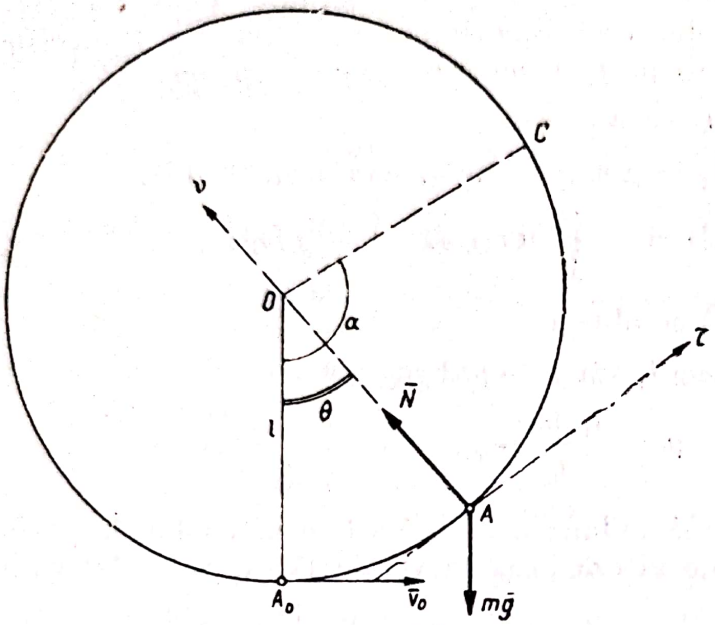


Fig. 24.6,*a*

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}, \qquad (1)$$

care, proiectată pe tangenta la cerc (24.6):

$$m\dot{v} = -mg \sin \theta, \qquad (2)$$

servește la determinarea legii de mișcare și, proiectată pe normala principală (24.6):

$$m\frac{v^2}{l} = -mg \cos \theta + N, \qquad (3)$$

servește la determinarea tensiunii din fir.

Cum $v = l\dot{\theta}$ (mișcare circulară) ecuația (2) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \qquad (4)$$

ecuație care servește la determinarea legii de mișcare și care nu se poate integra decît cu ajutorul integralelor eliptice. Pentru mici oscilații $\sin \theta \approx \theta$ și integrînd $\theta = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi\right)$, deci mișcarea este oscilatorie armonică de perioadă $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, micile oscilații fiind izocrone.

Un studiu calitativ al marilor oscilații se poate face integrînd o dată ecuația (4) și determinînd variația vitezei unghiulare sau a vitezei v în funcție de unghiul θ. Această ecuație se poate obține și direct prin aplicarea teoremei energiei cinetice și a lucrului mecanic (24.16):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgl(1 - \cos\theta) \quad v^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos\theta), \qquad (5)$$

deoarece lucrul mecanic al greutății (24.21) este $-mgh$, $h = l - l\cos\theta$. Cu cît pendulul se depărtează de verticală (cu cît crește unghiul θ), viteza scade. Viteza se poate anula cînd $v_0^2 - 2gl(1 - \cos\alpha) = 0$, unde s-a notat cu α

valoarea unghiului θ, corespunzătoare momentului în care se anulează viteza. Se obține:

$$\cos \alpha = \frac{2gl - v_0^2}{2gl}, \tag{6}$$

unde trebuie ca $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$, adică $0 \leqslant v_0^2 \leqslant 4\,gl$. În acest caz, mișcarea este oscilatorie. Dacă $v_0^2 > 4\,gl$, punctul material nu se mai oprește și mișcarea pendulului este rotatorie.

Rezultatele obținute sînt valabile în cazul legăturii bilaterale; de exemplu cînd pendulul este realizat cu ajutorul unui tub în interiorul căruia s-ar mișca punctul material sau cu ajutorul unei bare fără greutate. În problema noastră, pendulul fiind realizat cu un fir, există posibilitatea ca pendulul să părăsească cercul spre interior (legătură unilaterală). Se va determina reacțiunea N; atît timp cît firul este întins, reacțiunea din fir este pozitivă, fiind orientată ca în figura 24.6, a; dacă reacțiunea se anulează sau este negativă, firul este comprimat și punctul se desprinde de pe cerc. Din ecuațiile (3) și (5) rezultă reacțiunea:

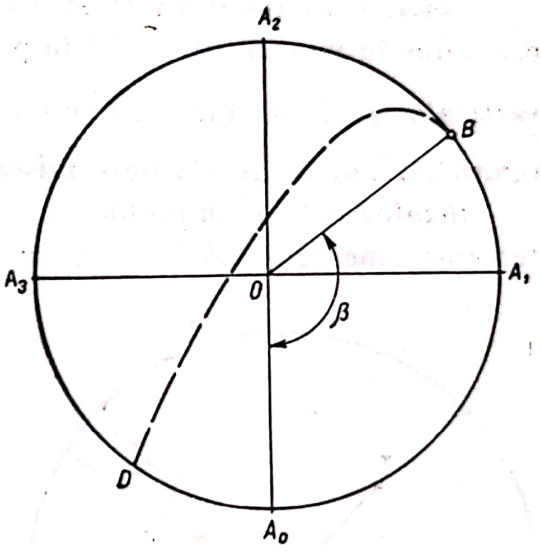


Fig. 24.6,b

$$N = \frac{mv_0^2}{l} + mg\,(3\cos\theta - 2). \tag{7}$$

Reacțiunea este maximă în punctul A_0 pentru $\theta = 0$, $N = \frac{mv_0^2}{l} + mg$ și scade cînd pendulul se depărtează de verticală. Poziția punctului B în care se desprinde pendulul de pe cerc se va obține din ecuația (7) anulînd reacțiunea ($N = 0$). Se obține:

$$\cos \beta = \frac{2gl - v_0^2}{3gl}, \tag{8}$$

unde s-a notat cu β valoarea unghiului θ, corespunzătoare punctului B. Examinînd expresiile (6) și(8) ale lui $\cos \alpha$ și $\cos \beta$, cum $\cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha$ se pot trage următoarele concluzii:

1) Dacă $0 \leqslant v_0^2 < 2gl$, $\cos \alpha > \cos \beta > 0$, deci $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$;

așadar, viteza punctului se anulează înainte ca reacțiunea să se anuleze. Pendulul nu poate părăsi cercul și va executa oscilații de amplitudine α în jurul poziției de echilibru. Pentru $v_0^2 = 2gl$, $\alpha = \beta = 90°$ pendulul va oscila între punctele A_1 și A_3 (fig. 24.6, b); în aceste puncte reacțiunea se anulează fără ca pendulul să se desprindă de pe cerc.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă $2gl < v_0^2 < 5\,gl$, $\cos\alpha < \cos\beta$, deci $\beta < \alpha$, unde $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Reacțiunea se anulează înainte ca viteza pendulului să se anuleze, pendulul se va desprinde de pe cerc în punctul B și va descrie apoi o parabolă BD tangentă cercului în punctul B.

3) Dacă $v_0^2 > 5\,gl$, atît pentru $\cos\alpha$ cît și pentru $\cos\beta$ se obțin valori mai mici decît -1, pendulul poate trece prin punctul A_2 fără ca viteza sau reacțiunea să se anuleze. Deci pendulul are o mișcare rotatorie.

24.7. Un pendul matematic P realizat cu ajutorul unui fir de lungime l este adus în momentul inițial în punctul A, firul formînd un unghi de 60° cu verticala și i se imprimă viteza inițială $v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}\,gl}$ îndreptată ca în figura 24.7, *a*. Să se studieze mișcarea pendulului.

Rezolvare. Ca și în problema precedentă, pentru studiul mișcării se aplică teorema energiei (24.16), singura forță care dă lucru mecanic fiind greutatea $m\bar{g}$:

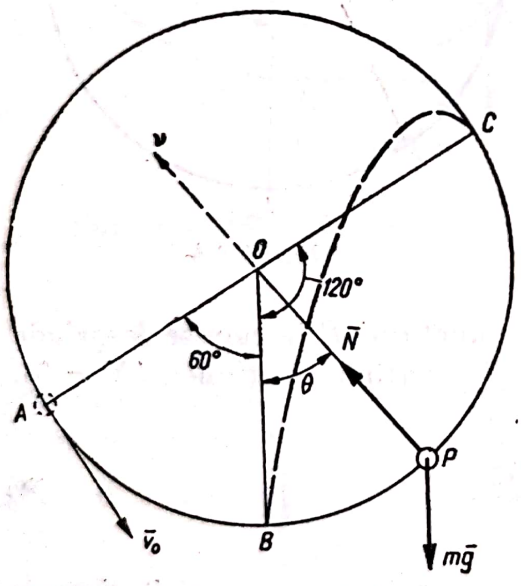


Fig. 24.7,*a*

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = mgl\,(\cos\theta - \cos 60°), \tag{1}$$

iar pentru determinarea tensiunii $\bar{N}$ a firului se proiectează ecuația fundamentală a dinamicii pe normala principală (24.6):

$$m\frac{v^2}{l} = N - mg\cos\theta. \tag{2}$$

Făcînd înlocuirile se obțin:

$$v^2 = gl\left(2\cos\theta + \frac{3}{2}\right) \tag{3}$$

și

$$N = mg\left(3\cos\theta + \frac{3}{2}\right). \tag{4}$$

Viteza pendulului este maximă în punctul B, poziția de echilibru, cînd $\theta = 0$ și $v_B^2 = \frac{7}{2}\,gl$. Cum $2gl < v_B^2 < 5gl$, pendulul se va desprinde de pe cerc înainte ca viteza să se anuleze (v. problema 24.6). Reacțiunea se anulează în punctul C:

$$N = 0 \qquad \cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \theta = 120°,$$

iar viteza (3) în acel punct este $v_C = \sqrt{\frac{gl}{2}}$. În punctul C pendulul se desprinde de pe cerc. Singura forță care mai acționează asupra lui este greutatea proprie $m\bar{g}$. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.1) pe axele din figura 24.7,*b* se obține:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -mg. \tag{5}$$

Integrînd aceste ecuații și punînd condițiile inițiale din punctul C:

$$t = 0 \begin{cases} x = \frac{l\sqrt{3}}{2} & \dot{x} = -v_C \sin 30° = -\sqrt{\frac{1}{8} gl} \\ y = \frac{3l}{2} & \dot{y} = v_C \cos 30° = \sqrt{\frac{3}{8} gl} \end{cases} \tag{6}$$

se obțin ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$x = -\sqrt{\frac{1}{8} gl}\, t + \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + \sqrt{\frac{3}{8} gl}\, t + \frac{3l}{2} \tag{7}$$

și eliminînd timpul t între ecuațiile (7) se obține ecuația carteziană a traiectoriei, parabola:

$$y = -4\frac{x^2}{l} + 3\sqrt{3}\, x, \tag{8}$$

care intersectează cercul în punctul $B(x = 0, y = 0)$.

Deci pendulul se mișcă pe arcul de cerc AC, apoi se desprinde de pe cerc și descrie arcul de parabolă CB. În punctul B firul este brusc întins. Folosind teoremele generale în cazul mișcărilor impulsive (cap. XXXI) se poate determina viteza pendulului în punctul B după ce firul este întins. Se obține: $v_B = \sqrt{\frac{1}{8} gl}$ și cum $v_B^2 < 2gl$ mișcarea ulterioară este oscilatorie.

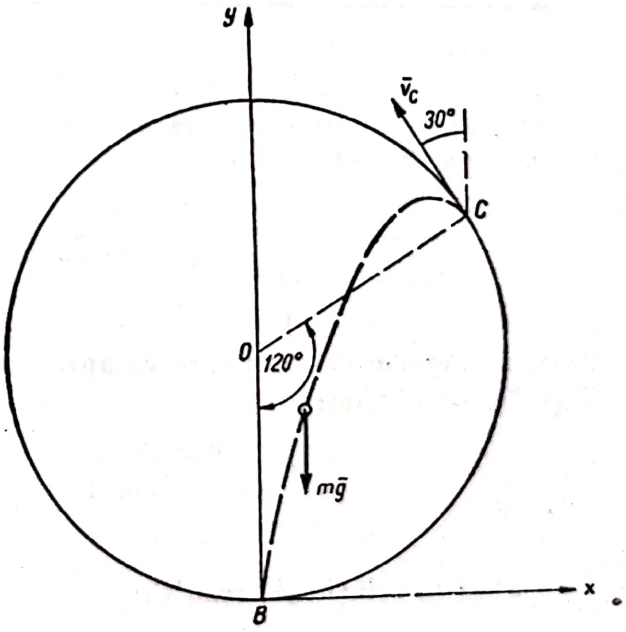


Fig. 24.7,*b*

24.8. O sferă se poate mișca într-un jgheab așezat într-un plan vertical și formînd bucla circulară $ABA'B'$ de rază r. Sfera pornește, fără viteză inițială, din punctul C aflat la înălțimea h față de punctul cel mai de jos A al buclei. Neglijînd frecările se cere înălțimea h astfel încît sfera să descrie circumferința $ABA'B'$, fără să sară din jgheab.

Rezolvare. Asupra sferei acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$. Atît timp cît reacțiunea este îndreptată ca în figura 24.8 ($N>0$), sfera apasă pe jgheab. Cînd $N \leqslant 0$, sfera sare din jgheab. Vom determina reacțiunea N proiectînd pe normala principală ν ecuația (24.6):

$$m\frac{v^2}{r} = N - mg\cos\theta$$

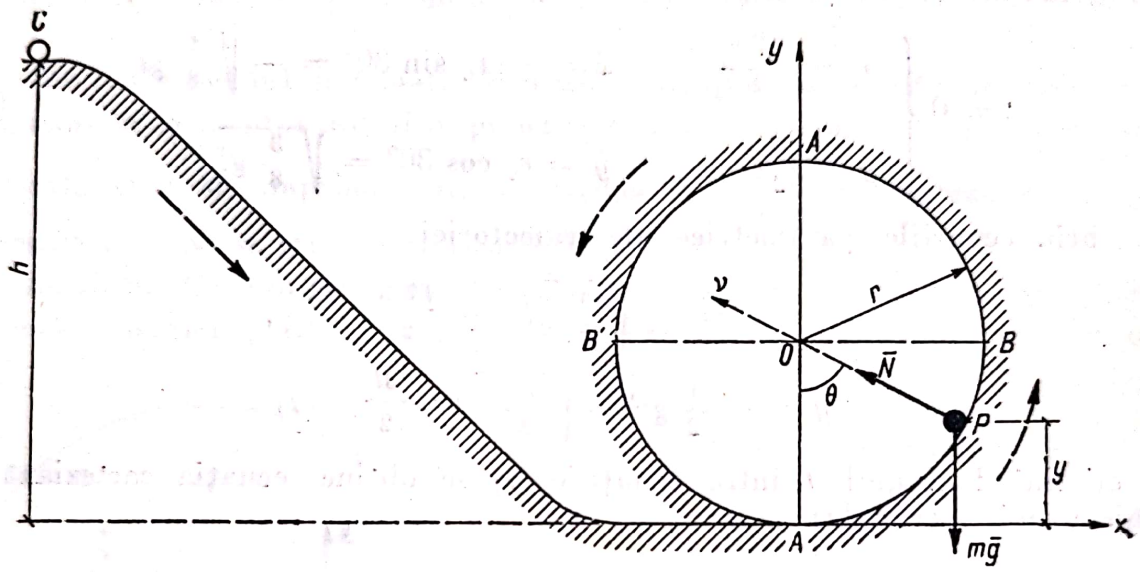


Fig. 24.8

și cum $\cos\theta = 1 - \frac{y}{r}$,

$$N = m\frac{v^2}{r} + mg - \frac{mgy}{r}. \qquad (1)$$

Pentru a determina viteza, se va aplica teorema energiei (24.16) între punctele C și P; se obține:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y) \qquad v^2 = 2g(h-y). \qquad (2)$$

Înlocuind în relația (1) rezultă:

$$N = \frac{mg}{r}(2h + r - 3y). \qquad (3)$$

Sfera se oprește cînd $v = 0$, adică pentru $y_1 = h$. Sfera sare din jgheab cînd $N = 0$, adică pentru $y_2 = \frac{2h+r}{3}$. Sfera se oprește înainte de a sări din jgheab,

dacă $y_1 < y_2$, adică $h < r$ (sfera se întoarce din drum). Ca sfera să nu se oprească și nici să nu sară din jgheab, cum $y_{max} = 2r$ (în punctul A'), rezultă $h > 2r$ și $\frac{2h+r}{3} > 2r$, adică $h > \frac{5}{2} r$.

Dacă $r < h < \frac{5}{2} r$, sfera sare din jgheab.

24.9. Un pendul matematic, realizat cu ajutorul unui fir, execută oscilații cu amplitudinea α în jurul poziției de echilibru. La un moment dat, cînd firul formează cu verticala unghiul β, el este fixat într-un punct O_1 situat la distanța h de punctul O de suspensie al pendulului. Știind că după fixarea firului pendulul are o mișcare rotatorie, se cere să se determine unghiul α. Care este variația de tensiune din fir?

Rezolvare. În prima situație, aplicînd teorema energiei (24.16), între punctele A și B rezultă:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = mgl (\cos \beta - \cos \alpha)$$

sau:

$$v_B = \sqrt{2gl (\cos \beta - \cos \alpha)} \tag{1}$$

(forțele care acționează sînt greutatea $m\bar{g}$ și tensiunea $\bar{N}$ a firului, și $v_A = 0$).

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe normala principală din punctul B (24.6) și ținînd seamă de (1) se obține tensiunea din fir în punctul B:

$$N_B = mg (3 \cos \beta - 2 \cos \alpha). \tag{2}$$

În a doua situație, aplicînd teorema energiei cinetice (24.16) și ecuația (24.6) proiectată pe normala principală, cum forțele care acționează sînt $m\bar{g}$ și noua tensiune $\bar{N}_1$, rezultă:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = mg(l - h) (\cos \theta - \cos \beta)$$

$$m \frac{v^2}{l - h} = N_1 - mg \cos \theta$$

și ținînd seamă de (1):

$$v^2 = 2g(l - h)\cos \theta + 2gh \cos \beta - 2gl \cos \alpha, \tag{3}$$

$$N_1 = mg \left(3 \cos \theta + \frac{2h}{l - h} \cos \beta - \frac{2l}{l - h} \cos \alpha\right). \tag{4}$$

Pentru ca mișcarea să fie rotatorie, trebuie ca pentru orice valoare a unghiului θ, $v^2>0$ și $N_1>0$ (firul să fie întins); cum v^2 și N_1 sînt minime în punctul C, pentru $\theta=\pi$ (v. fig. 24.9) rezultă:

$$v_C^2 = -2g(l-h) + 2gh\cos\beta - 2gl\cos\alpha > 0,$$

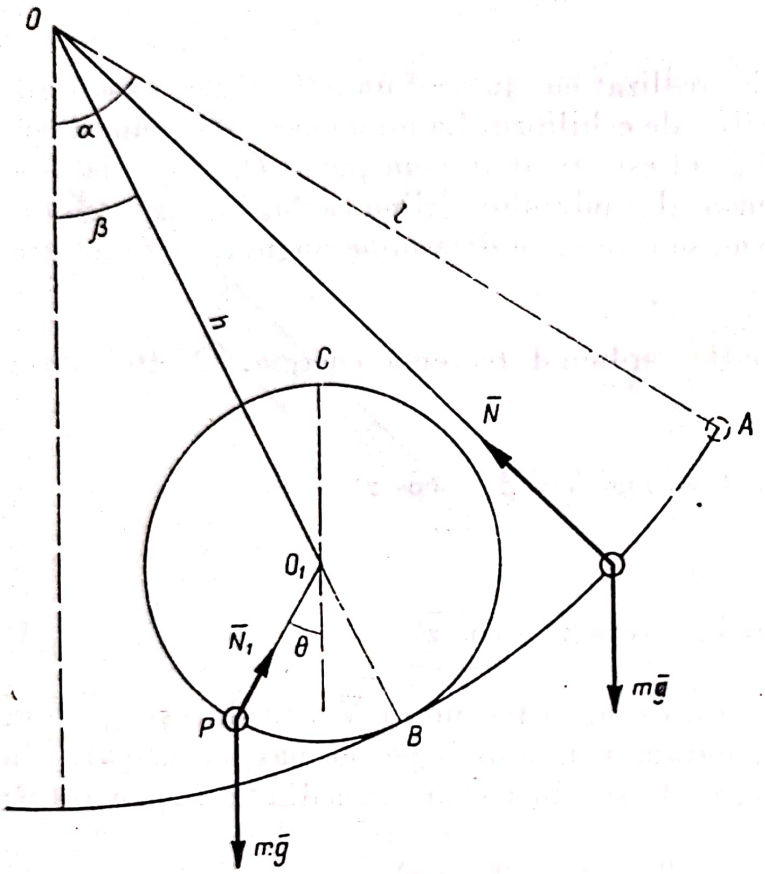


Fig. 24.9

adică:

$$\cos\alpha < \frac{h}{l}\cos\beta - \frac{l-h}{l} \quad (5)$$

și

$$N_1 = mg\left(-3 + \frac{2h}{l-h}\cos\beta - \frac{2l}{l-h}\cos\alpha\right) \geqslant 0,$$

adică:

$$\cos\alpha \leqslant \frac{h}{l}\cos\beta - \frac{3}{2}\frac{l-h}{l}. \quad (6)$$

Însă cum inegalitatea (6) implică inegalitatea (5), unghiul α va fi dat de inegalitatea (6), adică:

$$\alpha \geqslant \arccos\left[\frac{h}{l}\cos\beta - \frac{3}{2}\frac{l-h}{l}\right]. \quad (7)$$

Pentru a determina variația de tensiune din fir, se va determina tensiunea N_{1B} după ce firul a fost fixat făcînd pe $\theta=\beta$ în relația (4):

$$N_{1B} = mg\left(\frac{3l-h}{l-h}\cos\beta - \frac{2l}{l-h}\cos\alpha\right). \quad (8)$$

Variația de tensiune va fi:

$$\Delta N = N_{1B} - N_B = \frac{2mgh}{l-h}(\cos\beta - \cos\alpha), \quad (9)$$

și în situația-limită pentru care apare mișcarea rotatorie, adică $\cos\alpha = \frac{h}{l}\cos\beta - \frac{3}{2}\frac{l-h}{l}$, atunci:

$$\Delta N = 2\,mg\,\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right).$$

24.10. Pe exteriorul unei emisfere lucii de rază R se lansează, din punctul cel mai înalt A, un punct material greu P cu viteza $\bar{v}_0$ orizontală. Să se studieze mișcarea punctului.

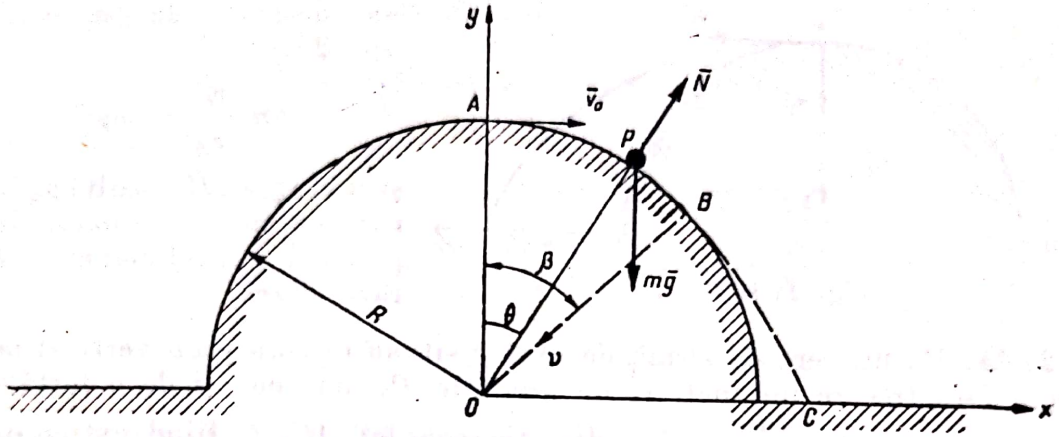


Fig. 24.10,*a*

Rezolvare. Eliberînd punctul de legături, asupra lui acționează reacțiunea normală $\bar{N}$ a emisferei și greutatea proprie $m\bar{g}$ (fig. 24.10, *a*). Aplicînd teorema energiei (24.16) se elimină reacțiunea normală. Se obține:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR\,(1 - \cos\theta),$$

de unde:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR\,(1 - \cos\theta). \tag{1}$$

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe normala principală (24.6) se obține:

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N. \tag{2}$$

Cînd reacțiunea se anulează, punctul se desprinde de pe emisferă. Notînd cu β unghiul corespunzător punctului B de desprindere, rezultă:

$$m\frac{v_B^2}{R} = mg\cos\beta \tag{3}$$

și ținînd seamă de (1) se obține:

$$\cos\beta = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}, \tag{4}$$

unde $\cos\beta \leqslant 1$, adică: $v_0^2 \leqslant gR$.

Dacă $v_0^2 < gR$, punctul parcurge un arc AB și se desprinde de pe emisferă în punctul B, apoi se mișcă pe arcul de parabolă BC ca un punct greu în vid, care pornește din B cu viteza $\bar{v}_B$ tangentă la emisferă.

Dacă $v_0^2 = gR$, $\cos\beta = 1$ și $\beta = 0$, adică punctul se desprinde chiar din punctul A, și dacă $v_0^2 > gR$, punctul se desprinde tot din A descriind o parabolă. În acest caz, proiectînd ecuația (24.6), pe normala principală ν la traiectorie, cum $\bar{N} = 0$, deoarece punctul s-a desprins de pe emisferă (fig. 24.10, *b*):

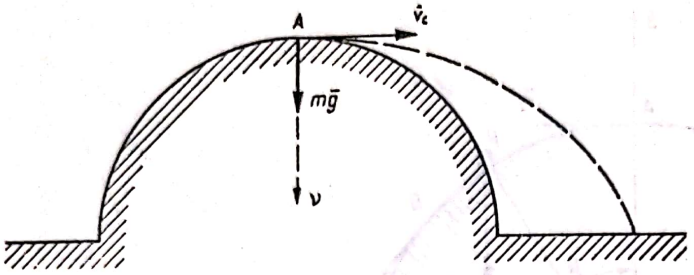


Fig. 24.10,*b*

$$m\frac{v_0^2}{\rho_A} = mg$$

și cum $v_0^2 \geqslant gR$, rezultă $\rho_A \geqslant R$, raza de curbură a parabolei în punctul A fiind mai mare decît raza sferei.

24.11. Pe un cerc de sîrmă de rază r situat într-un plan vertical poate aluneca fără frecare un inel A, de greutate P, acționat și de o forță constantă ca modul $Q = \frac{P}{5}$, avînd direcția coardei AC, C fiind extremitatea diametrului orizontal (fig. 24.11).

Știind că inelul pornește din C fără viteză inițială, să se determine viteza inelului v și reacțiunea N a cercului, cum și poziția în care N este maxim.

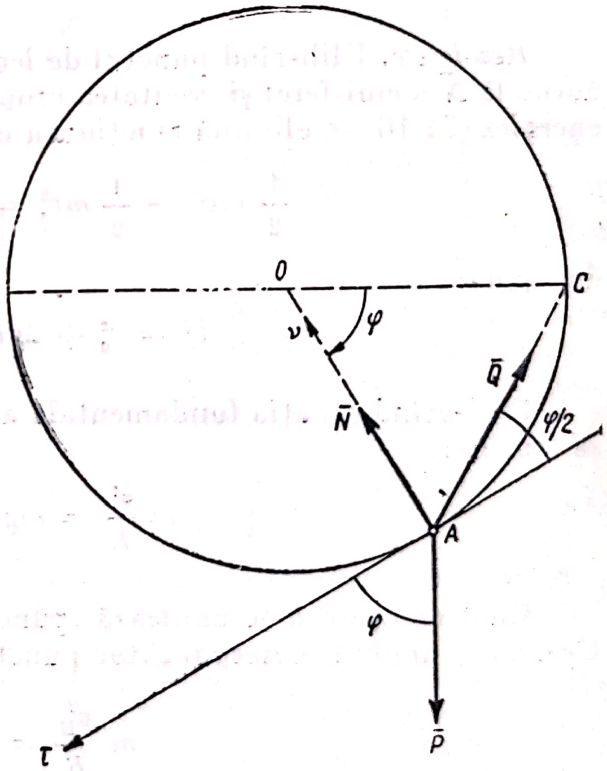


Fig. 24.11

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei (24.16) se elimină reacțiunea normală:

$$\frac{mv^2}{2} = Pr\sin\varphi - \int_0^{\varphi} Q\cos\frac{\varphi}{2}\,rd\varphi. \qquad (1)$$

Însă $P = mg$ $Q = \frac{mg}{5}$ și relația (1) devine:

$$\frac{mv^2}{2} = mgr\sin\varphi - \frac{2}{5}mgr\sin\frac{\varphi}{2},$$

de unde:

$$v^2 = 2gr\left(\sin\varphi - \frac{2}{5}\sin\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (2)$$

Pentru ca mișcarea să aibă loc trebuie ca $v^2 > 0$, de unde rezultă: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\arccos\frac{1}{5}$.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.6) pe normala principală ν se determină reacțiunea normală:

$$\frac{mv^2}{r} = N - P\sin\varphi + Q\sin\frac{\varphi}{2}$$

și ținînd seamă de (2):

$$N = P\left(3 \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2}\right). \tag{3}$$

Condiția de maxim a lui N este dată de:

$$\frac{dN}{d\varphi} = P\left(3 \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) = 0,$$

de unde: $6 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 3 = 0$, $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{24} =$

$$= \frac{1 \pm 17}{24}, \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{3}{4}, \cos \frac{\varphi_2}{2} = -\frac{2}{3}.$$

Numai soluția $\varphi = 2\text{arc cos} \frac{3}{4}$ are sens, deoarece pentru $\varphi = 2\text{arc cos}\left(-\frac{2}{3}\right)$ mișcarea nu are loc. Valoarea maximă a reacțiunii este:

$$N_1 = P\left(6 \cos \frac{\varphi_1}{2} - 1\right) \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{8} P.$$

24.12. Pe partea exterioară a unei parabole lucii, cu axă orizontală, avînd ecuația $y^2 = 2px$ se mișcă un punct greu. Punctul pornește fără viteză inițială dintr-un punct A, avînd ordonata $y_0 = 2p$. Să se studieze mișcarea punctului. Unde se va desprinde punctul de pe parabolă?

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$. Pentru a determina mișcarea se va folosi teorema energiei (24.16) care elimină reacțiunea normală. Se obține:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = -mg(y - y_0),$$

adică:

$$v^2 = 2g\,(y_0 - y). \tag{1}$$

Legătura fiind unilaterală, reacțiunea trebuie să aibă sensul din figura 24.12 ($N > 0$), desprinderea de pe parabolă apărînd pentru $N = 0$.

Se va determina reacțiunea proiectînd ecuația (24.6) pe normala principală. Rezultă:

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \alpha - N, \tag{2}$$

unde α este unghiul dintre $m\bar{g}$ și normală, adică dintre tangentă și axa Ox. Deci:

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y} \qquad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}. \tag{3}$$

Raza de curbură este:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(p^2 + 2px)^{3/2}}{p^2} = \frac{(p^2 + y^2)^{3/2}}{p^2}. \tag{4}$$

Înlocuind expresiile (1), (3) și (4) ale lui v^2, cos α și ρ în relația (2) se obține:

$$N = \frac{mg}{(p^2 + y^2)^{3/2}}[y^3 + 3p^2y - 2p^2y_0]. \tag{5}$$

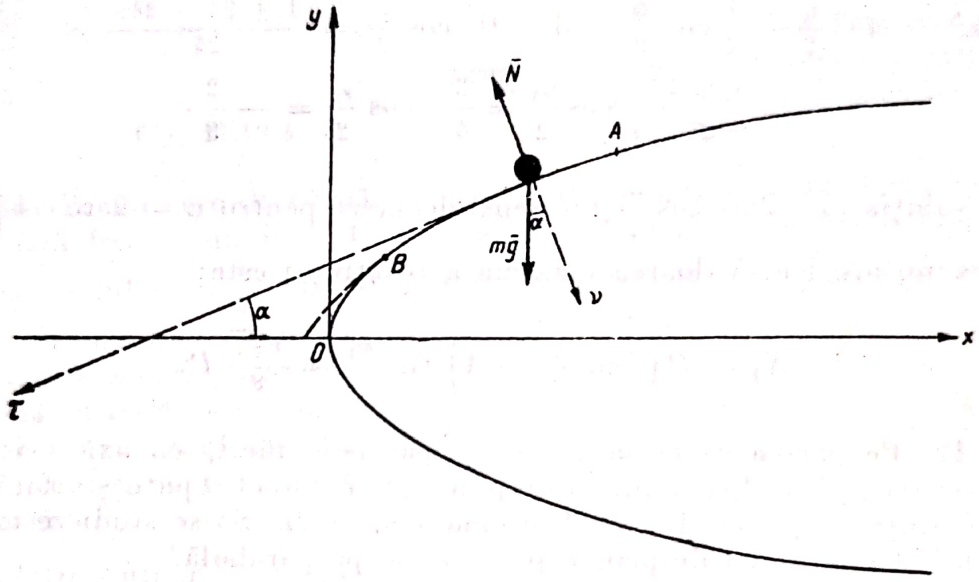


Fig. 24.12

Punctul se desprinde de pe parabolă în punctul B, unde se anulează reacțiunea, ordonata punctului B fiind soluție a ecuației:

$$y^3 + 3p^2y - 2p^2y_0 = 0. \tag{6}$$

În cazul nostru, $y_0 = 2p$, deci:

$$y^3 + 3p^2y - 4p^3 = 0,$$

ecuație ale cărei rădăcini sînt:

$$y_1 = p \; y_2 = \frac{p}{2}\left(-1 + i\sqrt{15}\right) \; y_3 = \frac{p}{2}\left(-1 - i\sqrt{15}\right),$$

deci coordonatele punctului B sînt:

$$x = \frac{p}{2} \quad y = p. \tag{7}$$

După ce punctul s-a desprins de pe parabolă, el cade ca un punct greu în vid, care pornește din B cu viteza inițială $\bar{v}B$ tangentă la parabolă, unde:

$$v_B^2 = 2gp,$$

conform relației (1).

24.13. În interiorul unui tub luciu avînd forma unei parabole de ecuație $y = x - \frac{x^2}{2p}$ se aruncă un punct material greu cu viteza inițială $\bar{v}_0$. Să se determine reacțiunea normală $\bar{N}$.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ (forță efectiv aplicată) și reacțiunea normală $\bar{N}$. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe normala principală (24.6), se obține:

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\alpha - N, \tag{1}$$

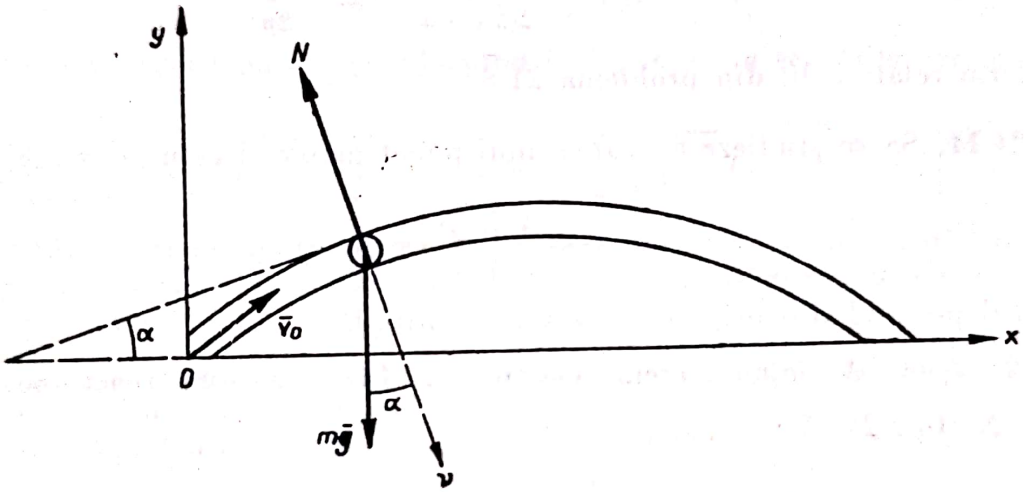


Fig. 24.13

unde α este unghiul dintre $m\bar{g}$ și normală și totodată unghiul dintre tangenta la parabolă și axa Ox (fig. 24.13):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{p} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{p}{\sqrt{x^2 - 2px + 2p^2}}. \tag{2}$$

Raza de curbură este:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(x^2 - 2px + 2p^2)^{3/2}}{p^2}. \tag{3}$$

Pentru a determina viteza v, se aplică teorema energiei (24.16):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgy = -mg\left(x - \frac{x^2}{2p}\right) \quad v^2 = v_0^2 - 2g\left(x - \frac{x^2}{2p}\right) \tag{4}$$

(am ales drept origine O, punctul de lansare).

Din (1), (2), (3) și (4) se obține:

$$N = \frac{mg\ p^3\left(2 - \frac{v_0^2}{pg}\right)}{(x^2 - 2\ px + 2\ p^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Dacă $v_0^2 < 2pg$, reacțiunea este pozitivă avînd orientarea din figura 24.13, punctul material se sprijină pe partea inferioară a tubului. Dacă $v_0^2 > 2pg$, sensul reacțiunii este invers, punctul material se sprijină pe partea superioară a tubului. Dacă $v_0^2 = 2pg$, atunci $N = 0$, punctul material se mișcă fără a atinge pereții tubului. Acest lucru se datorește faptului că traiectoria unui punct greu, liber, lansat cu viteza $v_0 = \sqrt{2pg}$ în aceleași condiții cu punctul din tub, adică sub unghiul α dat de relația (2) [pentru $x = 0$ $(\operatorname{tg}\alpha)_{x=0} = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$], este parabola:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = x - \frac{x^2}{2p}$$

[conform relației (6) din problema 21.8].

24.14. Să se studieze mișcarea unui punct material greu pe curba:

$$x = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{y^5}{c}}, \tag{1}$$

punctul pornind din origine, fără viteză inițială.

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei (24.16) se elimină reacțiunea normală N (fig. 24.14):

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

de unde:

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{2}$$

Însă: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right]} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{y}{c}} + 1\right)} \cdot \frac{dy}{dt}$,

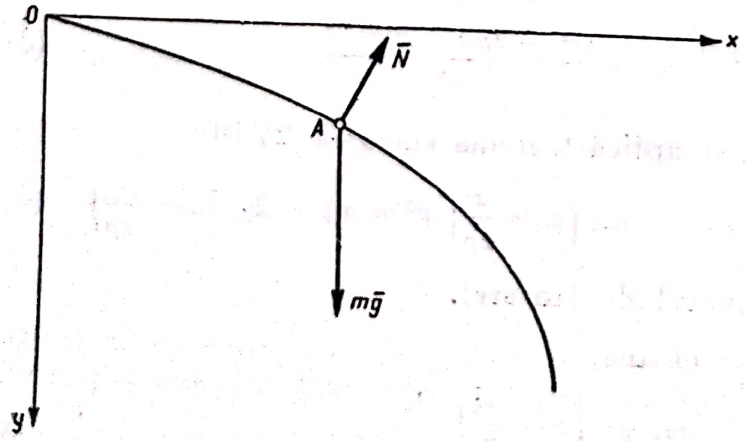


Fig. 24.14

deoarece prin derivarea ecuației curbei (1) rezultă $\frac{dx}{dy} = \sqrt[4]{\frac{y}{c}}$. Înlocuind în (2) și separînd variabilele rezultă:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{y}{c}} + 1\right)} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$t = \int \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{y}{c}} + 1}{2gy}}\, dy.$$

Prin schimbarea de variabilă $u = 1 + \sqrt{\frac{y}{c}}$, $du = \frac{dy}{2\sqrt{cy}}$, integrala precedentă devine:

$$t = \int 2\sqrt{\frac{cu}{2g}}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c}{g}}\,u^{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{y}{c}}\right)^{3/2} + C_1.$$

Din condiția inițială $t = 0$, $y = 0$ rezultă $C_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c}{g}}$, deci:

$$t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c}{g}}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{y}{c}}\right)^{3/2} - 1\right] \tag{3}$$

și explicitînd coordonata y și înlocuind în (1) se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$y = c\left[\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2c}}\,t + 1\right)^{2/3} - 1\right]^2 \qquad x = \frac{4}{5}c\left[\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2c}}\,t + 1\right)^{2/3} - 1\right]^{5/2}. \tag{4}$$

24.15. Un punct material greu A este obligat să se miște pe o curbă situată într-un plan vertical xOy. Să se stabilească ecuația curbei știind că reacțiunea curbei este nulă.

Rezolvare. Singura forță care acționează asupra punctului este greutatea proprie $m\bar{g}$, deoarece reacțiunea $\bar{N} = 0$.

Proiectînd teorema impulsului (24.5) pe axele de coordonate rezultă:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -g$$

și prin integrare:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos\alpha & \dot{y} &= -gt + v_0 \sin\alpha \\ x &= v_0\, t \cos\alpha & y &= \frac{-gt^2}{2} + v_0\, t \sin\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Nu am particularizat prin nimic problema alegînd originea în poziția inițială; α este unghiul dintre viteza inițială $\bar{v}_0$ și axa Ox (fig. 24.15).

Eliminînd timpul t din ecuațiile (1) rezultă ecuația curbei, parabola:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\ \mathrm{tg}\,\alpha,$$

pe care o descrie punctul și în cazul cînd este lansat în vid (problema 21.8).

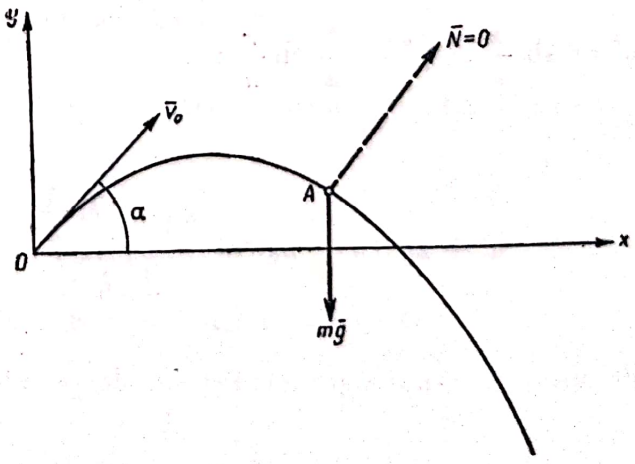


Fig. 24.15

24.16. Un punct material greu A de masă m se mișcă pe fața superioară a lănțișorului $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, pornind din

punctul A_0 de ordonată y_0 cu viteza inițială v_0 (fig. 24.16). Unde se desprinde punctul A de lănțișor?

Rezolvare. Asupra punctului A acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$ a lănțișorului; pentru studiul mișcării se aplică teorema energiei (24.16) care elimină reacțiunea $\bar{N}$:

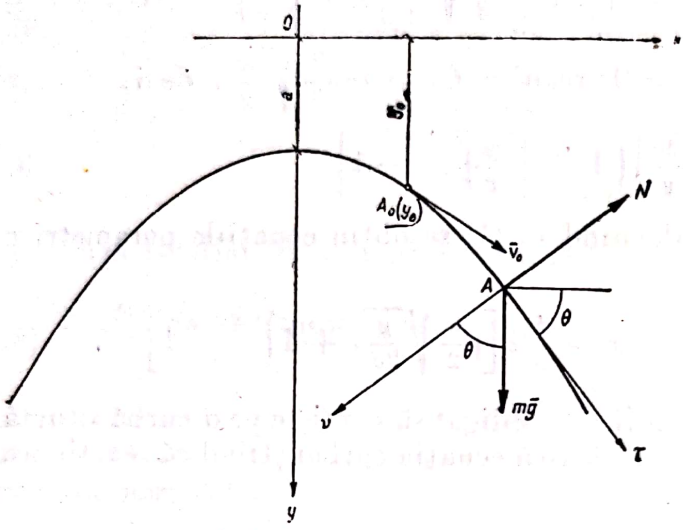


Fig. 24.16

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg\ (y - y_0),$$

de unde:

$$v^2 = v_0^2 + 2g\ (y - y_0). \quad (1)$$

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.6) pe normala principală, rezultă:

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\ \cos\ \theta - N.$$

În punctul de desprindere, $N = 0$, deci:

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\ \cos\ \theta. \quad (2)$$

Însă, $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|\ y''\ |}$, $\cos\ \theta = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}$ și înlocuind în (2) rezultă, ținînd seamă și de (1):

$$v_0^2 + 2g\ (y - y_0) = g\frac{(1 + y'^2)}{|\ y''\ |}.$$

Din ecuația lănțișorului, $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\ \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ rezultă:

$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$;

deci:

$$v_0^2 + 2g\ (y - y_0) = \frac{g\left(1 + sh^2\frac{x}{a}\right)}{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{ag\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = ag\ \operatorname{ch}\frac{x}{a} = gy,$$

de unde ordonata punctului de desprindere este:

$$y = 2y_0 - \frac{v_0^2}{2}$$

și abscisa x rezultă din $y = a\ ch\frac{x}{a}$, $ch\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$, $sh\frac{x}{a} = \sqrt{ch^2\frac{x}{a} - 1} =$

$= \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$, $e^{\frac{x}{a}} = ch\frac{x}{a} + sh\frac{x}{a} = \frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}$, deci:

$$x = a\ \ln\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} = a\ \ln\frac{2y_0 - \frac{v_0^2}{g} + \sqrt{\left(2y_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)^2 - a^2}}{a}.$$

24.17. Să se determine o curbă situată într-un plan vertical, astfel ca un punct material greu P pornind fără viteză inițială din O să parcurgă arcul OA și coarda OA în același timp (fig. 24.17).

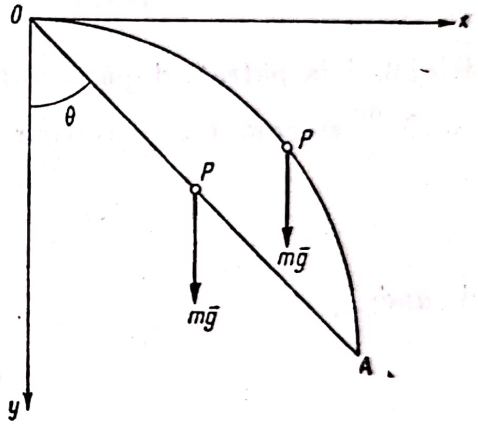


Fig. 24.17

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei cinetice (24.16) se elimină reacțiunea $\bar{N}$:

$$\frac{m v^2}{2} - 0 = mg\,y,$$

de unde:

$$v = \sqrt{2\,g\,y}. \qquad (1)$$

Trecînd în coordonate polare, cu axa polară Oy:

$$x = r\ \sin\theta \qquad y = r\ \cos\theta,$$

relația (1) devine:

$$v = \sqrt{2\,g\,r\,\cos\theta}. \qquad (2)$$

Însă, $v = \sqrt{v_r^2 + v_n^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2} = \dot{\theta}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$, deci ținînd seamă de (2):

$$\frac{d\theta}{dt}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} = \sqrt{2gr\,\cos\theta}$$

și separînd variabilele θ și t, timpul necesar pentru a parcurge curba OA este:

$$t = \frac{\pm 1}{\sqrt{2g}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}{\sqrt{r\cos\theta}}\,d\theta, \qquad (3)$$

unde θ_0 este unghiul format de tangenta în O la curbă cu axa Oy.

Pentru coarda OA din (3), ținînd seamă că θ = const., $d\theta = 0$, rezultă:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{OA}\frac{\sqrt{(dr)^2 + r^2\,(d\theta)^2}}{\sqrt{r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{r\cos\theta}} = \sqrt{\frac{2r}{g\cos\theta}} \qquad (4)$$

(rezultat care se putea scoate direct studiind mișcarea uniform accelerată cu accelerația $g \cos \theta$ a punctului pe plan înclinat). Egalînd valorile (3) și (4) ale timpului:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{2g}} \int_{\theta_0}^{0} \frac{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}{\sqrt{r \cos \theta}} d\theta = \sqrt{\frac{2r}{g \cos \theta}}$$

și derivînd în raport cu θ se obține:

$$\pm \frac{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}{\sqrt{r \cos \theta}} = \sqrt{\frac{\cos \theta}{r}} \cdot \frac{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} + r \sin \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Ridicînd la pătrat, după simplificări se obține $r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2 r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta}$ și cum $r \not\equiv 0$ separînd variabilele, $\frac{dr}{r} = \operatorname{ctg} 2\theta \, d\theta$ și intergînd

$$\ln r = \frac{1}{2} (\ln \sin 2\theta + \ln C),$$

de unde:

$$r = \sqrt{C \sin 2\theta}. \tag{5}$$

Curba căutată este o lemniscată care admite punctul O drept punct dublu, tangentele în acel punct fiind verticala Oy și orizontala Ox.

24.18. Un punct P obligat să se miște pe o elipsă lucie avînd ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$, este atras de o forță elastică (avînd constanta elastică k), de punctul O, centrul elipsei. Știind că în momentul inițial punctul se găsește în $A\ (a, 0)$ și are viteza $\bar{v}_0$ îndreptată ca în figura 24.18, se cere să se studieze mișcarea punctului pe elipsă și să se determine reacțiunea elipsei.

Rezolvare. Asupra punctului acționează forța elastică $\bar{F} = -k\bar{r}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$. Se folosește teorema energiei (24.16) care elimină reacțiunea $\bar{N}$:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathcal{L}_{AP}. \tag{1}$$

Lucrul mecanic al forței elastice va fi conform (24.22):

$$\mathcal{L}_{AP} = -\frac{1}{2} k (r^2 - r_0^2) = \frac{1}{2} k [a^2 - (x^2 + y^2)], \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci viteza va fi:

$$v^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}(a^2 - x^2 - y^2) = v_0^2 + \frac{k}{ma^2}(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \qquad (3)$$

$\left(y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$. Cum $a^2 \geqslant x^2 + y^2$, viteza nu se anulează în nici un punct al elipsei.

Reacțiunea $\bar{N}$ se determină din ecuația (24.6) proiectată pe normala principală ν (fig. 24.18):

$$m\frac{v^2}{\rho} = -N + F\cos\varphi, \qquad (4)$$

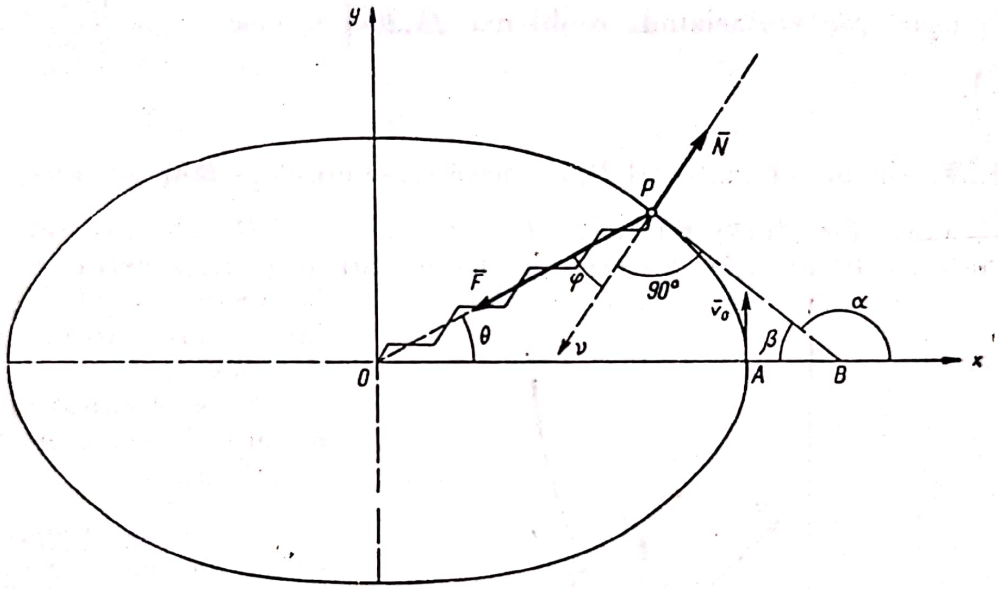


Fig. 24.18

unde φ este unghiul dintre OP și ν. Raza de curbură este:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}{a^4b}. \qquad (5)$$

Din triunghiul OPB se vede că $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)$, deci $\cos\varphi = \sin(\theta + \beta) = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$. Dar $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, iar $\beta = \pi - \alpha$, unde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$. Efectuînd calculele rezultă:

$$\cos\varphi = \frac{a^2b}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}. \qquad (6)$$

Cum $F = k|\overline{OP}| = k\sqrt{x^2 + y^2}$, ținînd seamă și de relațiile (2), (5) și (6) din (4) rezultă:

$$N = \frac{a^4b(kb^2 - mv_0^2)}{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{3/2}}. \qquad (7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $v_0 < \sqrt{\frac{k}{m}}\, b$, reacțiunea este îndreptată, ca în figura 24.18, în exteriorul elipsei; dacă $v_0 > \sqrt{\frac{k}{m}}\, b$, reacțiunea este îndreptată spre interiorul elipsei. În sfîrșit, dacă $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, b$, reacțiunea se anulează, deci un punct liber acționat de o forță elastică căruia i se imprimă în momentul inițial viteza $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, b$, perpendiculară pe vectorul de poziție $\overline{OA}$ din momentul inițial, se va mișca pe o elipsă avînd ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, rezultat care se poate stabili ușor particularizînd problema 21.20 $\left(x_0 = a,\ v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\, b = \nu\, b,\ \alpha = \frac{\pi}{2} \right)$.

24.19. Un punct material P, de masă m, se mișcă pe lănțișorul $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ sub acțiunea unei forțe repulsive $F = mk^2 y$, paralelă cu axa Oy și proporțională cu distanța la axa Ox. În momentul inițial, punctul se găsește în vîrful A al lănțișorului și are viteza inițială $v_0 = ka$.

Să se studieze mișcarea punctului și să se determine reacțiunea N.

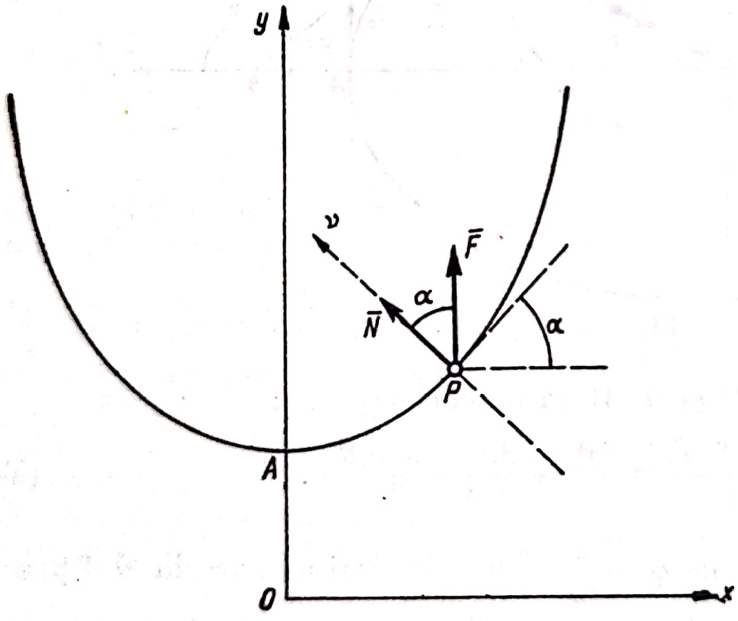


Fig. 24.19

Rezolvare. Asupra punctului acționează forța $\bar{F}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$. Teorema energiei (24.16):

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathcal{L}_{AP} \quad (1)$$

elimină reacțiunea normală. Lucrul mecanic elementar (24.14) al forței $\bar{F}$ este o diferențială totală exactă:

$$d\bar{L} = \bar{F}\, d\bar{r} = F\, dy = mk^2 y dy = d\left(\frac{1}{2} mk^2 y^2\right) = dU,$$

forța $\bar{F}$ derivînd din funcția de forță $U = \frac{1}{2} m k^2 y^2$ [vezi relațiile (24.18)].

Lucrul mecanic (24.19) $\mathcal{L}_{AP} = U - U_0 = \frac{1}{2} mk^2 (y^2 - a^2)$ și înlocuind în (1) rezultă:

$$v = ky = ka \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (2)$$

Cum $v = \frac{ds}{dt}$, iar elementul de arc de lănțișor este $ds = \sqrt{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx$, înlocuind în (2) se obține:

$$\frac{dx}{dt} = ka$$

și prin integrare, ținînd seamă și de condițiile inițiale $t = 0 \quad x = 0$, rezultă:

$$x = kat \qquad y = a \operatorname{ch} kt. \tag{3}$$

Pentru determinarea reacțiunii se va proiecta ecuația (28.6) pe normala principală ν. Rezultă:

$$m\frac{v^2}{\rho} = N + F\cos\alpha. \tag{4}$$

Dar:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$$

și:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{a}{y}.$$

Făcînd înlocuirile în ecuația (4) rezultă:

$$N = 0. \tag{5}$$

Reacțiunea fiind nulă înseamnă că un punct material liber, acționat de forța repulsivă $\bar{F} = mk^2y\bar{j}$, se mișcă pe lănțișorul $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ dacă condițiile inițiale sînt cele din problema noastră ($t = 0$, $x = 0$, $y = a$, $\dot{x} = ka$, $\dot{y} = 0$). Se lasă pe seama cititorului să verifice acest rezultat.

24.20. Un punct material coboară sub acțiunea gravitației pe o curbă netedă așezată într-un plan vertical. Știind că în poziția inițială viteza punctului este egală cu v_0 și este îndreptată pe verticală în jos și că proiecția vitezei punctului pe verticală este constantă, se cere ecuația acestei curbe.

Rezolvare. Alegînd sistemul de axe din figura 24.20 din enunțul problemei rezultă:

$$\dot{y} = v_0 = \text{const.}$$

Viteza punctului se poate determina folosind teorema energiei (24.16). Forțele care acționează asupra punctului sînt $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$; deci:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy \qquad v^2 = v_0^2 + 2gy \tag{1}$$

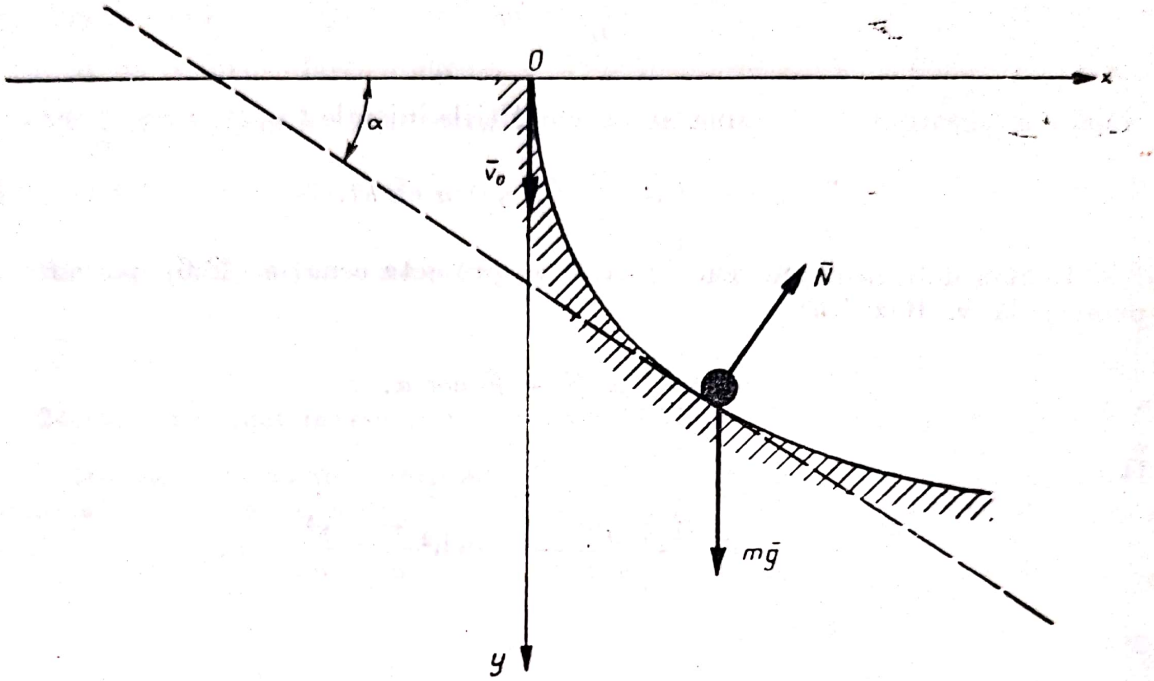


Fig. 24.20

și deci componentele vitezei sînt:

$$\dot{x} = \sqrt{v^2 - \dot{y}^2} = \sqrt{2gy} \qquad \dot{y} = v_0. \tag{2}$$

Cum viteza este tangentă la curbă rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v_0}{\sqrt{2gy}}. \tag{3}$$

Integrînd ecuația (3) se obține:

$$x = \frac{2\sqrt{2g}\,y^{3/2}}{3v_0} + C.$$

Din condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$ rezultă $C = 0$, deci curba este parabola cubică:

$$x^2 = \frac{8gy^3}{9v_0^2}. \tag{4}$$

24.21. Într-un tub circular de rază r așezat într-un plan vertical se poate mișca o sferă grea A. Știind că punctul pornește fără viteză inițială din punctul A_0 (extremitatea diametrului orizontal) și cunoscîndu-se coeficientul

de frecare μ dintre sferă şi tub, se cere să se determine viteza cu care sfera va ajunge în punctul B (punctul cel mai de jos al tubului).

Rezolvare. Asupra sferei acţionează greutatea proprie $m\bar{g}$, reacţiunea normală $\bar{N}$ şi forţa de frecare $\bar{T}$, unde conform (24.2):

$$T = \mu N. \tag{1}$$

Deoarece se cere viteza sferei în funcţie de poziţia ei pe traiectorie se va aplica teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic (24.14). Se obţine:

$$d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = mgr \cos\theta \, d\theta - Trd\theta, \tag{2}$$

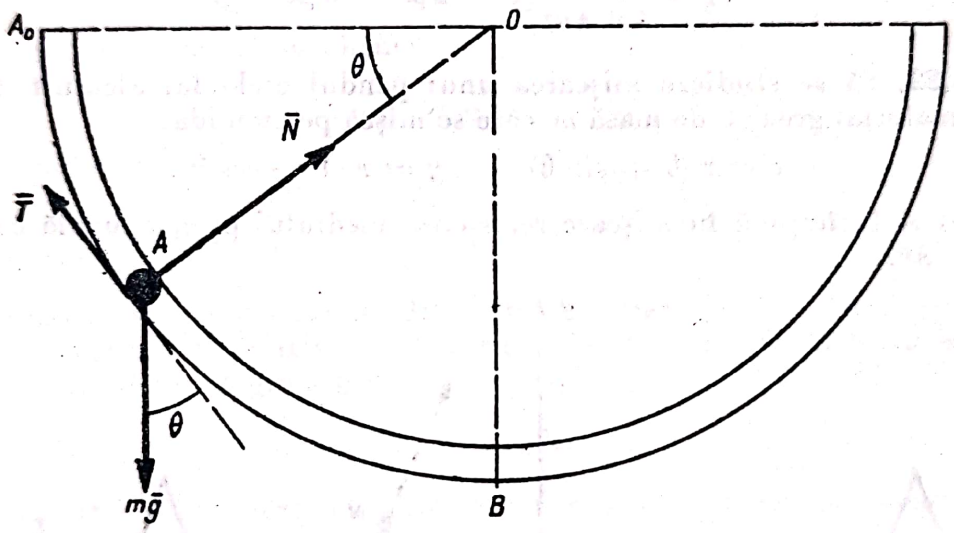


Fig. 24.21

deoarece unghiul dintre deplasarea elementară $ds = rd\theta$ şi greutatea $m\bar{g}$ este θ (fig. 24.21).

Din ecuaţia fundamentală a dinamicii (24.6) proiectată pe normala principală rezultă:

$$N = mg \sin\theta + \frac{mv^2}{r} \tag{3}$$

şi ţinînd seamă de (1) şi (3), ecuaţia (2) devine:

$$\frac{d(v^2)}{d\theta} + 2\mu v^2 = 2gr(\cos\theta - \mu \sin\theta), \tag{4}$$

o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întîi în v^2 şi θ. După cum se ştie, integrala generală a acestei ecuaţii este de forma:

$$v^2 = e^{-\int 2\mu d\theta}\left[C + \int e^{\int 2\mu d\theta} 2gr(\cos\theta - \mu \sin\theta)\, d\theta\right] \tag{5}$$

şi efectuînd cvadraturile din ecuaţia (5) se obţine:

$$v^2 = \frac{2gr}{1+4\mu^2}[\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 2\mu^2\sin\theta] + Ce^{-2\mu\theta}. \qquad (6)$$

Punînd condiţiile iniţiale $\theta = 0$, $v = 0$, se obţine $C = -\frac{6\mu gr}{1+4\mu^2}$;

deci:

$$v^2 = \frac{2gr}{1+4\mu^2}[\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 2\mu^2\sin\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}]. \qquad (7)$$

Viteza în punctul B, pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ va fi:

$$v_B^2 = \frac{2gr}{1+4\mu^2}[1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}]. \qquad (8)$$

24.22. Să se studieze mişcarea unui pendul cicloidal alcătuit dintr-un punct material greu A de masă m care se mişcă pe cicloida:

$$x = r(\theta + \sin\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Punctul A întîmpină în mişcare rezistenţa mediului proporţională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$.

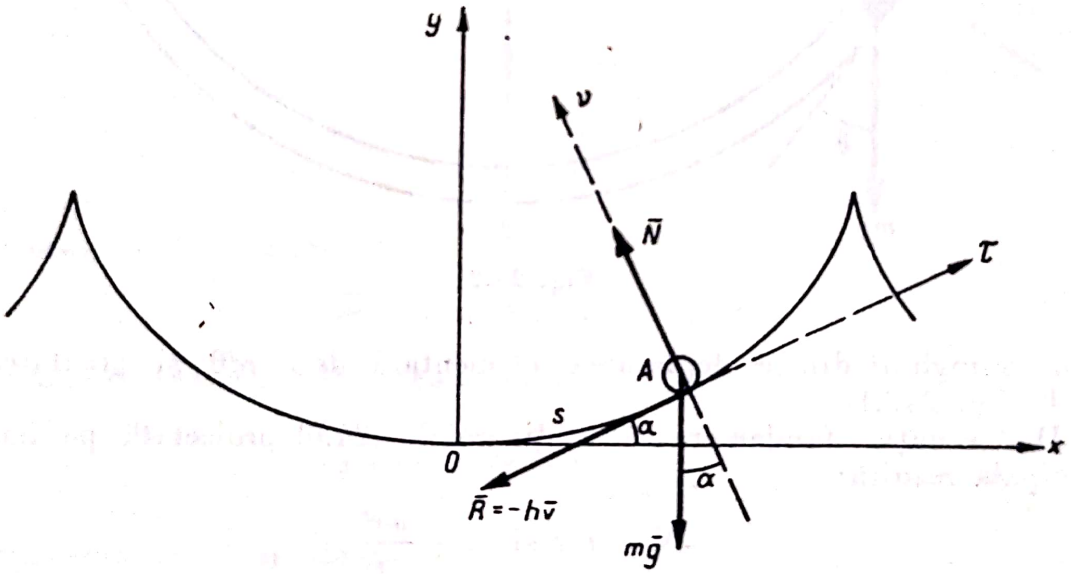


Fig. 24.22, *a*

Rezolvare. Asupra punctului acţionează greutatea proprie $m\bar{g}$, rezistenţa mediului $\bar{R} = -h\bar{v}$ şi reacţiunea normală $\bar{N}$ dintre punct şi cicloidă (fig. 24.22,*a*).

Proiectînd ecuaţia fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} - h\bar{v} + \bar{N}$$

pe tangenta τ la traiectorie, se elimină reacţiunea normală. Conform ecuaţiei (24.6), se obţine:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha - h\dot{s}, \qquad (2)$$

deoarece $v = \dot{s}$. Elementul de arc de cicloidă ținînd seamă de (1) este:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = r\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = 2r\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta,$$

și arcul s măsurat din vîrful O al cicloidei va fi:

$$s = \int_0^\theta ds = 4r\sin\frac{\theta}{2}. \tag{3}$$

Unghiul α dintre τ și Ox va fi dat de:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r\sin\theta\, d\theta}{r(1+\cos\theta)\, d\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad \alpha = \frac{\theta}{2} \quad \sin\alpha = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{s}{4r}. \tag{4}$$

Înlocuind în ecuația (2) se obține:

$$\ddot{s} + 2\alpha\dot{s} + \nu^2 s = 0, \tag{5}$$

unde s-a notat:

$$\alpha = \frac{h}{2m} \qquad \nu = \sqrt{\frac{g}{4r}} \qquad \beta = \sqrt{\nu^2 - \alpha^2}. \tag{6}$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale liniare (5) $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \nu^2 = 0$, pentru o rezistență relativ mică a mediului $\alpha < \nu$, are rădăcinile $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \beta i$; deci integrala generală a ei este:

$$s = Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi), \tag{7}$$

mișcarea fiind o mișcare oscilatorie amortizată cu pseudoperioadă:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{4r} - \frac{h^2}{4m^2}}}. \tag{8}$$

Dacă rezistența mediului este mare $\alpha \geqslant \nu$, $h \geqslant m\sqrt{\frac{g}{r}}$, mișcarea este amortizată fără a mai fi oscilatorie. Dacă se neglijează rezistența mediului $h = 0$, $\alpha = 0$, $\nu = \beta$, rezultă:

$$s = A\cos(\nu t - \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

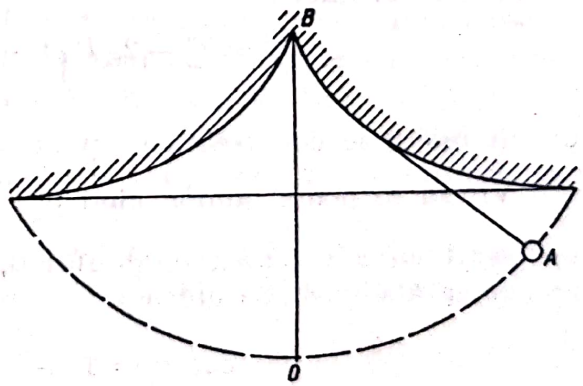


Fig. 24.22, *b*

Perioada oscilațiilor nedepinzînd de condițiile inițiale, oscilațiile pendulului cicloidal sînt izocrone. *Huygens* a încercat să realizeze un pendul cicloidal prin legarea unui fir de lungime $l = 4r$ de punctul de rebrusment al cicloidei. Cititorul poate să verifice că punctul A (capătul firului) descrie o cicloidă (fig. 24.22,*b*).

24.23. Un inel greu A de masă m se poate mișca pe un cerc luciu de rază R așezat într-un plan vertical. Inelul este atras de o forță elastică avînd constanta elastică k de centrul atractiv C, punctul cel mai de jos al cercului. În momentul inițial, inelul se găsește în C și are viteza v_0. Să se studieze mișcarea inelului și să se determine reacțiunea cercului (fig. 24.23).

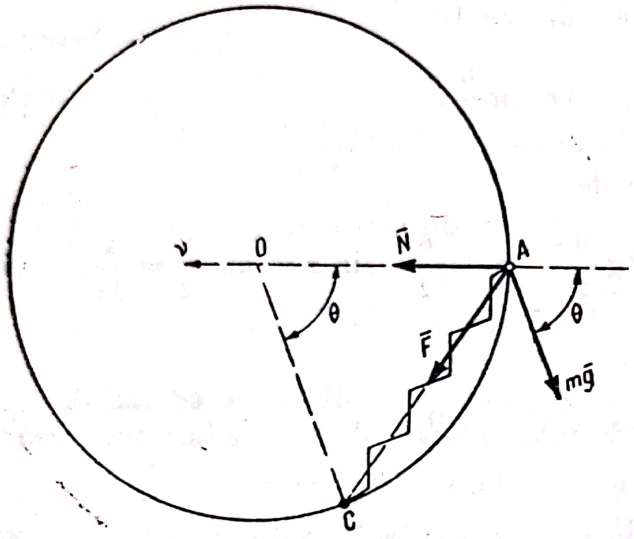


Fig. 24.23

Rezolvare. Asupra inelului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, forța elastică $\bar{F} = k\,\overline{CA}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$ a cercului. Pentru determinarea mișcării se aplică teorema energiei (24.16). Lucrul mecanic (24.22) al forței elastice va fi:

$$-\frac{1}{2}k\,(r^2 - r_0^2) = -\frac{1}{2}k\,(CA^2 - 0) = -k\,R^2\,(1 - \cos\theta),$$

iar lucrul mecanic (24.21) al greutății:

$$-mgh = -mgR\,(1 - \cos\theta);$$

deci:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = -mg\,R\,(1 - \cos\theta) - k\,R^2\,(1 - \cos\theta),$$

de unde se obține:

$$v^2 = v_0^2 - 2g\,R\left(1 + \frac{k\,R}{m\,g}\right)(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Cu cît inelul se depărtează de punctul A, viteza lui scade.

Viteza se poate anula cînd $v_0^2 - 2\,g\,R\left(1 + \frac{k\,R}{m\,g}\right)(1 - \cos\alpha) = 0$, unde s-a notat cu α valoarea unghiului θ, corespunzătoare momentului în care se anulează viteza. Se obține:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2\,g\,R\left(1 + \frac{k\,R}{m\,g}\right)}. \qquad (2)$$

Cum $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, rezultă $0 \leqslant v_0^2 \leqslant 4\,g\,R\left(1 + \frac{k\,R}{m\,g}\right)$. În acest caz, mișcarea inelului va fi oscilatorie. Dacă $v_0^2 \geqslant 4\,g\,R\left(1 + \frac{k\,R}{m\,g}\right)$, viteza nu se mai anulează, și mișcarea este rotatorie.

Pentru determinarea reacțiunii se proiectează ecuația fundamentală a dinamicii (24.6) pe normala principală ν:

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta + F\sin\frac{\theta}{2}$$

și cum $F = 2kR\sin\frac{\theta}{2}$, ținînd seamă și de (1), se obține:

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg - 3kR + 3(mg + kR)\cos\theta.$$

24.24. Un punct material greu A descrie o circumferință netedă de rază r așezată într-un plan orizontal. Punctul A este legat printr-un resort de punctul B situat pe verticala centrului O al cercului. Știind că $OB = h$, constanta elastică a resortului este k, lungimea în stare neîntinsă a resortului este l_0 și cunoscînd viteza inițială $\bar{v}_0$ a punctului, se cere să se studieze mișcarea punctului și să se determine reacțiunea cercului. Ce constantă elastică trebuie să aibă resortul și ce viteză inițială trebuie să se imprime punctului A, astfel ca reacțiunea să se anuleze.

Rezolvare. Forțele care acționează asupra punctului A sînt greutatea proprie $m\bar{g}$, tensiunea resortului:

$$F = k\Delta l = k(AB - l_0) = k\left(\sqrt{r^2 + h^2} - l_0\right) \qquad (1)$$

și reacțiunea $\bar{N}$ situată în planul normal al cercului care se va putea descompune în două componente, N_ν pe direcția normalei principale (raza cercului) și N_β pe direcția binormalei (verticala). Pentru a găsi legea de mișcare este nevoie de o ecuație care elimină reacțiunea normală. Se poate aplica teorema energiei, teorema momentului cinetic în raport cu axa OB sau ecuația fundamentală a dinamicii proiectată pe tangentă.

Pentru determinarea reacțiunii se proiectează ecuația fundamentală a dinamicii pe normala principală și binormală. Ecuația fundamentală a dinamicii (24.1) are expresia:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N}. \qquad (2)$$

Proiecțiile (24.6) acestei ecuații pe tangentă, normala principală și binormală sînt:

$$m\dot{v} = 0, \quad m\frac{v^2}{r} = F\sin\alpha + N_\nu, \quad 0 = -mg + F\cos\alpha + N_\beta, \qquad (3)$$

unde α este unghiul dintre resort și verticală (v. fig. 24.24). Cum pentru $t = 0$, $v = v_0$, din prima ecuație (3) rezultă:

$$v = v_0 = \text{const.}, \tag{4}$$

punctul avînd o mișcare circulară uniformă. Din triunghiul OAB rezultă:

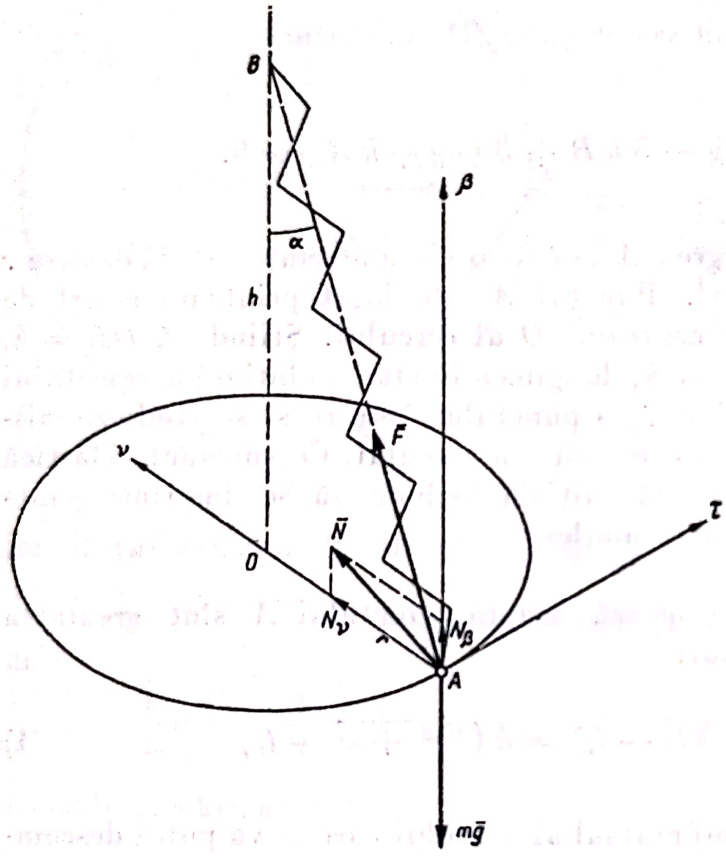


Fig. 24.24

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \tag{5}$$

și înlocuind expresiile (1), (4) și (5) în ultimele două ecuații (3) rezultă:

$$N_\nu = \frac{m v_0^2}{r} - kr\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

$$N_\beta = mg - kh\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \tag{6}$$

$\bar{N} = N_\nu \bar{\nu} + N_\beta \bar{\beta}$, $|\bar{N}| = \sqrt{N_\nu^2 + N_\beta^2}$. Pentru ca reacțiunea $\bar{N}$ să se anuleze trebuie ca $N_\nu = N_\beta = 0$, deci:

$$k = \frac{mg}{h\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)}$$

$$v_0^2 = \frac{r^2}{h} g.$$

24.25. O sferă grea A de masă m, așezată pe un plan orizontal avînd coeficientul de frecare μ, este legată printr-un fir de lungime r, de un punct fix O. Se imprimă sferei o viteză inițială v_0, perpendiculară pe direcția firului. Să se studieze mișcarea sferei și să se determine tensiunea din fir. Ce viteză inițială trebuie imprimată sferei pentru ca ea să descrie o circumferință completă și apoi să se oprească?

Rezolvare. Asupra punctului eliberat de legături acționează următoarele forțe: $m\bar{g}$ — greutatea proprie, $\bar{T}$ — tensiunea din fir, $\bar{N}$ — reacțiunea normală la plan și $\bar{F}$ — forța de frecare (fig. 24.25), unde conform (24.2):

$$F = \mu N. \tag{1}$$

În rezolvarea problemei se va aplica ecuația fundamentală a dinamicii (24.1)

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{T} + \bar{N} + \bar{F}, \tag{2}$$

care se va proiecta pe axele triedrului intrinsec (24.6).

Ţinînd seamă şi de (1) se va obţine:

$$m\ddot{s} = -\mu N \qquad m\frac{v^2}{r} = T \qquad 0 = -mg + N. \tag{3}$$

Din ultima ecuaţie (3) rezultă $N = mg$, deci prima ecuaţie devine:

$$\ddot{s} = -\mu g$$

şi, prin integrare, ţinînd seamă şi de condiţiile iniţiale $t = 0$, $v = v_0$, $s = 0$ (se măsoară arcele din poziţia iniţială A_0) rezultă legea de mişcare şi viteza:

$$s = -\frac{1}{2}\mu g\, t^2 + v_0\, tv = \dot{s} = -\mu\, gt + v_0. \tag{4}$$

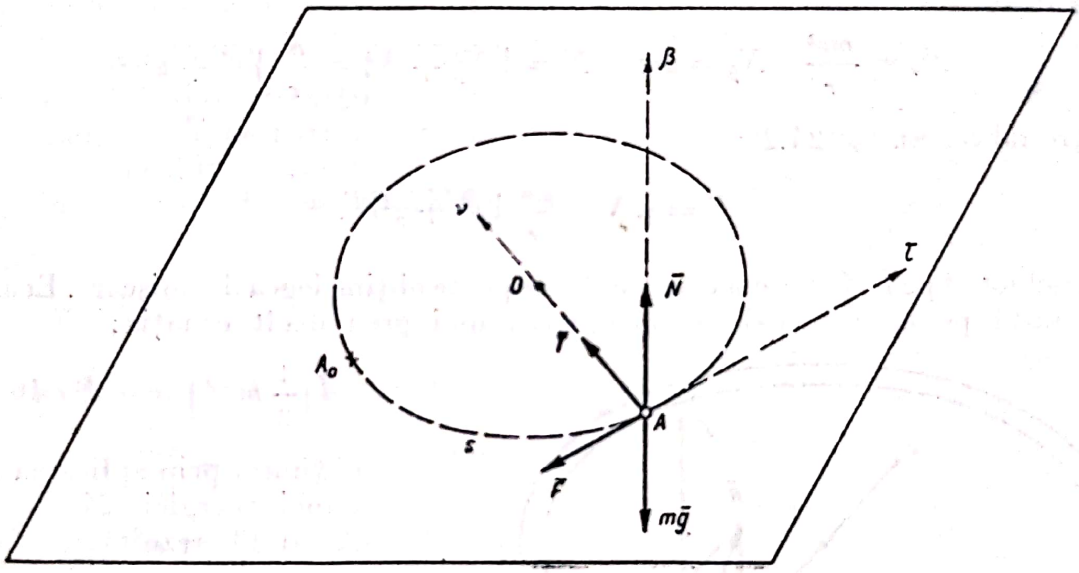


Fig. 24.25

Cum acceleraţia tangenţială $a_\tau = \ddot{s}$ este constantă şi negativă, mişcarea este o mişcare circulară uniform întîrziată. Problema se putea rezolva şi cu alte teoreme, de exemplu cu teorema energiei (24.15). Aplicînd-o se obţine:

$$d\left(\frac{1}{2}m\, v^2\right) = -F\, ds = -\mu\, mg\, r\, d\theta. \tag{5}$$

Integrînd ecuaţia (5) rezultă:

$$v^2 = v_0^2 - 2\mu\, gr\, \theta. \tag{6}$$

Pentru ca sfera să se oprească după ce descrie o circumferinţă completă, trebuie ca $v = 0$ pentru $\theta = 2\pi$, adică:

$$v_0^2 = 4\pi\mu\, gr. \tag{7}$$

Tot din ecuaţiile (3) rezultă şi tensiunea din fir:

$$T = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\,(v_0 - \mu\, gt)^2}{r} = \frac{m\,(v_0^2 - 2\mu\, gr\,\theta)}{r}. \tag{8}$$

24.26. O sferă grea A de masă m se poate mișca în interiorul unui tub circular de rază r așezat într-un plan orizontal. Cunoscînd coeficientul de frecare μ, să se determine ce viteză inițială v_0 trebuie imprimată sferei, pentru ca ea să înconjure complet circumferința.

Rezolvare. Forțele care acționează asupra sferei sînt greutatea proprie $m\bar{g}$, reacțiunea normală $\bar{N}$ situată în planul normal la circumferință [pe care o vom descompune în componentele N_ν — după normala principală (rază) și N_β — după binormală (rază)] și forța de frecare $\bar{F}$ (fig. 24.26). Proiecțiile ecuației fundamentale a dinamicii (24.6) pe axele triedrului lui Frenet sînt:

$$m\dot{v} = -F \qquad m\frac{v^2}{r} = N_\nu \qquad 0 = -mg + N_\beta. \tag{1}$$

Rezultă:

$$N_\nu = \frac{mv^2}{r} \qquad N_\beta = mg \qquad N = \sqrt{N_\beta^2 + N_\nu^2} = \frac{m}{r}\sqrt{v^4 + g^2r^2}$$

și ținînd seamă de (24.2):

$$F = \mu N = \frac{\mu m}{r}\sqrt{v^4 + g^2r^2}\,. \tag{2}$$

Introducînd pe F în prima ecuație (1) se poate obține legea de mișcare. Ecuația obținută pe această cale se integrează mai greu decît ecuația:

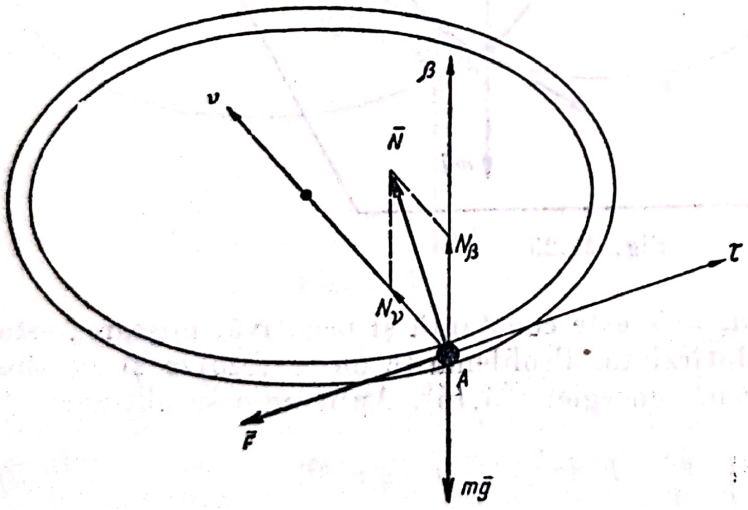


Fig. 24.26

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -F\,r\,d\theta \tag{3}$$

obținută prin aplicarea teoremei energiei (24.15). Din (2) și (3) rezultă:

$$\frac{d\,(v^2)}{\sqrt{v^4 + g^2r^2}} = -2\mu\,d\theta,$$

care integrată dă:

$$\operatorname{arg\,sh}\frac{v^2}{gr} = -2\mu\theta + C. \tag{4}$$

Cum sfera se oprește după ce parcurge o circumferință completă, adică $v = 0$ pentru $\theta = 2\pi$, rezultă $C = 4\pi\mu$; deci:

$$v^2 = gr\,\operatorname{sh} 2\mu\,(2\pi - \theta). \tag{5}$$

Așadar, viteza inițială (pentru $\theta = 0$) va fi:

$$v_0^2 = gr\,\operatorname{sh} 4\pi\mu. \tag{6}$$

Viteza inițială în acest caz este mai mare decît cea obținută în problema 24.25, formula (7) $v_0^2 = 4\pi\mu\,gr$, deoarece $\operatorname{sh} 4\pi\mu > 4\pi\mu$.

Scanned with OKEN Scanner

24.27. Un punct material A de masă m se mişcă pe curba:

$$x = \frac{2}{3}t^3 \qquad y = t^2 \qquad z = t \tag{1}$$

sub acţiunea unei forţe F, tangente traiectoriei (t reprezintă timpul, iar x,y,z şi t sînt exprimate în unităţi CGS). Să se determine forţa F şi reacţiunea normală N a curbei.

Rezolvare. Forţele care acţionează asupra punctului sînt $\overline{F}$ şi $\overline{N}$ (fig. 24.27); proiectînd ecuaţia fundamentală a dinamicii pe axele triedrului lui Frenet (24.6) rezultă:

$$m\frac{dv}{dt} = F \qquad \frac{mv^2}{\rho} = N_\nu, \; 0 = N_\beta, \tag{2}$$

unde N_ν şi N_β sînt proiecţiile reacţiunii normale $\overline{N}$ pe normala principală ν şi pe binormala β.

Din (1) $\dot{x} = 2t^2$, $\dot{y} = 2t$, $\dot{z} = 1$, deci:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} =$$

$$= \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = 2t^2 + 1$$

$$\frac{dv}{dt} = 4t \tag{3}$$

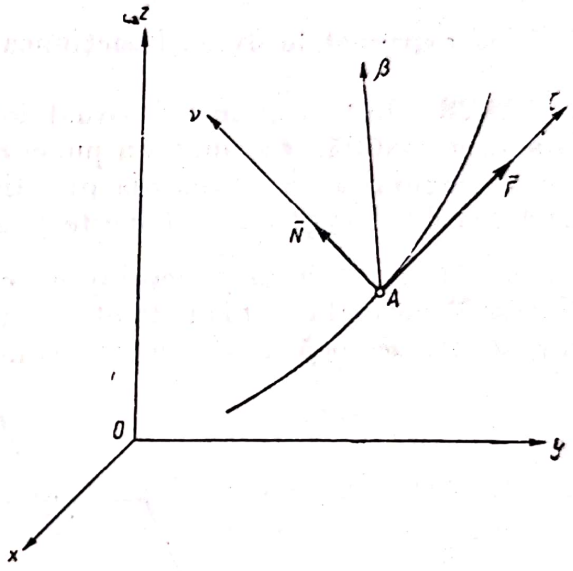


Fig. 24.27

şi înlocuind în prima relaţie (2):

$$F = 4mt, \tag{4}$$

F fiind exprimat în dyne.

Curbura

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{5}$$

Însă $ds = vdt = (2t^2 + 1)\,dt$, deci:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{(2t^2+1)\,dt} = \frac{2t^2}{2t^2+1}; \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{(2t^2+1)\,dt} = \frac{2t}{2t^2+1};$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{(2t^2+1)\,dt} = \frac{1}{2t^2+1}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{4t(2t^2+1) - 8t^3}{(2t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{2t^2+1} = \frac{4t}{(2t^2+1)^3}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = 2\,\frac{(2t^2+1) - 4t^2}{(2t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{(2t^2+1)} = \frac{2(1-2t^2)}{(2t^2+1)^3}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{-4t}{(2t^2+1)^2} \cdot \frac{1}{2t^2+1} = \frac{-4t}{(2t^2+1)^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

și (5) devine:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{(2t^2+1)^3}\sqrt{(2t)^2 + (1-2t^2)^2 + (-2t)^2} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}. \qquad (6)$$

Înlocuind în a doua relație (2) rezultă:

$$N_\nu = \frac{mv^2}{\rho} = m(2t^2+1)^2\frac{2}{(2t^2+1)^2} = 2m;$$

$$N = \sqrt{N_\nu^2 + N_\beta^2} = 2m,$$

N fiind exprimat în dyne. Reacțiunea normală este constantă.

24.28. Dintr-un punct O situat într-un plan luciu, înclinat cu unghiul φ față de orizontală, se aruncă un punct material greu A cu viteza $\bar{v}_0$ care formează unghiul α cu orizontala planului. Să se studieze mișcarea punctului. Unde, și după cît timp, întîlnește punctul material orizontala lui O?

Rezolvare. Asupra punctului A acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$ normală la plan. Pentru a studia mișcarea punctului pe suprafață este nevoie de două ecuații în care să nu intervină reacțiunea. Alegînd sistemul

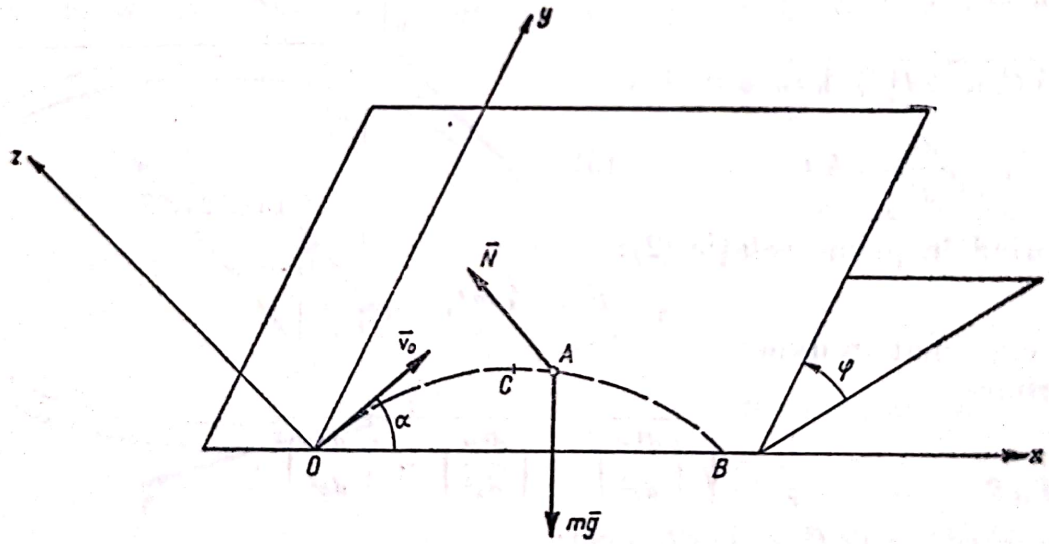


Fig. 24.28,*a*

de axe din figura 24.28,*a*, Ox orizontala planului care trece prin O, Oy linia de cea mai mare pantă și Oz normala pe plan și proiectînd ecuația (24.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$$

pe axele Ox și Oy, se vor obține cele două ecuații de mișcare (1), și proiectînd-o pe Oz se va determina reacțiunea $\bar{N}$ (2). Astfel se obține:

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -mg\sin\varphi \qquad (1)$$

$$O = -mg\cos\varphi + \bar{N} \qquad (2)$$

(v. fig. 24.28,*b*), deoarece mișcarea are loc în planul xOy, $z = 0$, $\ddot{z} = 0$. Integrînd ecuațiile (1) și punînd condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 & \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ y = 0 & \dot{y} = v_0 \sin\alpha \end{cases} \tag{3}$$

se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = -\frac{1}{2}(g \sin\varphi) t^2 + v_0 t \sin\alpha \tag{4}$$

și componentele vitezei:

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha$$

$$\dot{y} = -(g \sin\varphi) t + v_0 \sin\alpha. \tag{5}$$

Din ecuația (2) se obține reacțiunea:

$$\bar{N} = mg \cos\varphi, \tag{6}$$

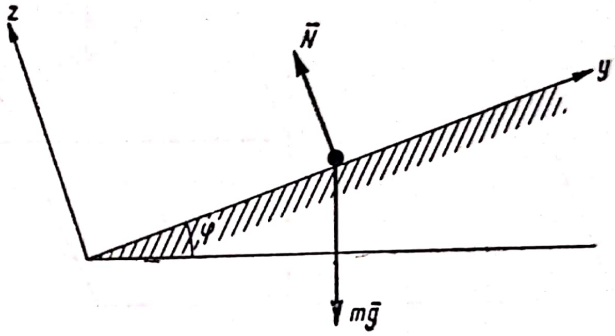


Fig. 24.28,*b*

care este constantă.

Mișcarea punctului este asemănătoare cu mișcarea unui punct greu în vid, cu deosebirea că accelerația punctului este $g \sin\varphi$ în loc de g (v. problema 21.8).

Traiectoria este parabola:

$$y = -\frac{g \sin\varphi\, x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha. \tag{7}$$

Ordonata punctului de înălțime maximă C se obține punînd condiția ca $\dot{y}_c = 0$. Rezultă $y_{max} = y_C = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g \sin\varphi}$.

Bătaia (abscisa punctului B în care mobilul întîlnește orizontala lui O)este:

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g \sin\varphi}.$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $x = 0$, și mișcarea are loc pe linia de cea mai mare pantă a planului, caz studiat în problema 24.1.

Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mișcarea are loc într-un plan vertical. Făcînd înlocuirile în relațiile (4) și (6) se obțin ecuațiile de mișcare ale punctului greu în vid, iar reacțiunea $\bar{N} = 0$, deci planul nu mai influențează cu nimic mișcarea punctului.

Dacă $\varphi = 0$, mișcarea are loc într-un plan orizontal. Traiectoria devine o dreaptă, dreapta $y = x \operatorname{tg}\alpha$, și mișcarea este uniformă, accelerația punctului fiind nulă. Reacțiunea este egală cu greutatea punctului $N = mg$.

Scanned with OKEN Scanner

24.29. Două puncte A_1 și A_2 de mase egale m se atrag reciproc, forța de atracție fiind proporțională cu distanța dintre puncte, factorul de proporționalitate fiind k. Punctul A_1 se mișcă pe un plan luciu, iar punctul A_2 — pe o dreaptă lucie perpendiculară în punctul O pe plan. Știind că în momentul inițial $OA_1 = a$, $OA_2 = b$, viteza punctului A_1 este $\bar{v}_0$, perpendiculară pe $\overline{OA_1}$ și punctul A_2 este în repaus, se cere să se studieze mișcarea celor două puncte.

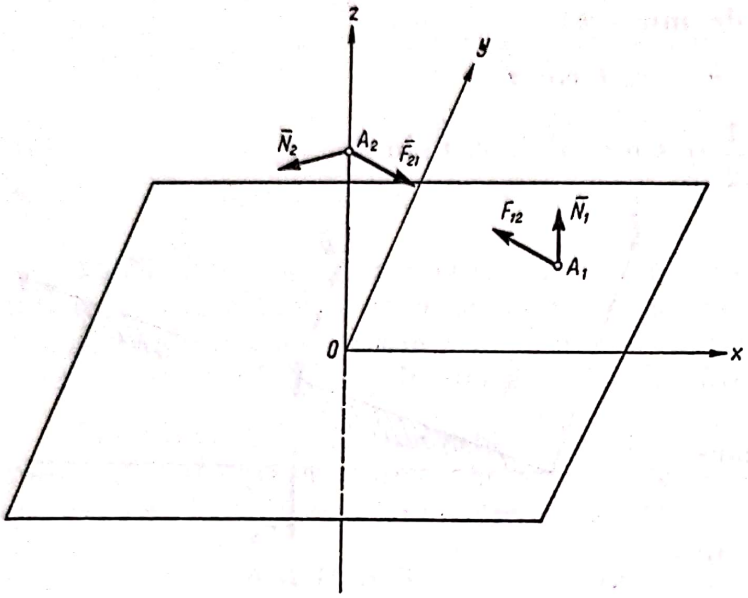


Fig. 24.29

Rezolvare. Asupra punctului A_1 acționează forța de atracție $\bar{F}_{12}$, datorită punctului A_2, și reacțiunea normală $\bar{N}_1$ a planului.

Asupra punctului A_2 acționează forța de atracție $\bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12}$, datorită punctului A_1 și reacțiunea $\bar{N}_2$ normală la dreaptă.

Se alege sistemul de axe din figura 24.29 cu originea O în punctul în care dreapta pe care se mișcă A_2 intersectează planul xOy (planul în care se mișcă punctul A_1), axa Ox trece prin poziția inițială a punctului A_1, Oy este paralelă cu viteza $\bar{v}_0$, iar Oz este de-a lungul dreptei pe care se mișcă punctul A_2.

Forțele de atracție ale punctelor sînt:

$$\bar{F}_{12} = -k\,\overline{A_2A_1} = -k\,(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \qquad \bar{F}_{21} = -k\,\overline{A_1A_2} = -k\,(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad (1)$$

Pentru punctul A_1 $(x_1, y_1, 0)$, ecuația fundamentală a dinamicii (24.1) este:

$$m\bar{a}_1 = \bar{F}_{12} + \bar{N}_1$$

și proiectînd-o pe axele de coordonate se obține:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 \qquad m\ddot{y}_1 = -ky_1 \qquad 0 = kz_2 + N_1. \quad (2)$$

Integrînd primele două ecuații (2) și ținînd seamă de condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x_1 = a & \dot{x}_1 = 0 \\ y_1 = 0 & \dot{y}_1 = v_0 \end{cases}$$

se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x_1 = a\cos \nu t \qquad y_1 = \frac{v_0}{\nu}\sin \nu t, \quad (3)$$

unde $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$, traiectoria punctului A_1 fiind elipsa $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1}{\left(\frac{v_0}{\nu}\right)^2} = 1$.

Dacă punctul A_1 pornește fără viteza inițială ($v_0 = 0$), mișcarea este o oscilație armonică de amplitudine a pe axa Ox. Pentru punctul A_2 $(0, 0, z_2)$ ecuația (24.1) este:

$$m\bar{a}_2 = \bar{F}_{21} + \bar{N}_2,$$

proiecțiile ei fiind:

$$0 = kx_1 + N_{2x} \qquad 0 = ky_1 + N_{2y} \qquad m\ddot{z}_2 = -kz_2. \tag{4}$$

Integrînd ultima ecuație (4) și ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_2 = 0$, se obține:

$$z_2 = b \cos \nu t, \tag{5}$$

mișcarea punctului A_2 fiind o oscilație armonică de amplitudine b și pulsație $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Mișcarea celor două puncte este aceeași ca și cum punctele nu s-ar interacționa, dar ar fi atrase cu forțe elastice de un centru atractiv situat în punctul O.

Reacțiunile $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ depind de mișcările punctelor. Din ecuațiile (2) și (5) va rezulta:

$$N_1 = -kz_2 = -kb \cos \nu t$$

și din ecuațiile (4) și (3):

$$N_{2x} = -kx_1 = -ka \cos \nu t \qquad N_{2y} = -ky_1 = -k\frac{v_0}{\nu} \sin \nu t.$$

24.30. Să se arate că un punct material liber asupra căruia acționează numai rezistența mediului $\bar{R}$ descrie o dreaptă. Ce descrie același punct cînd este obligat să se miște pe o suprafață? Ce mișcare are, dacă suprafața este lucie și $\bar{R} = 0$?

Rezolvare. Singura forță care acționează asupra punctului este rezistența mediului:

$$\bar{R} = -R\bar{\tau}, \tag{1}$$

deoarece $\bar{R}$ este coliniar cu viteza $\bar{v}$, respectiv cu tangenta la traiectorie ($\bar{\tau}$ — versorul tangentei la traiectorie), sensul ei fiind opus vitezei.

Scriind ecuația fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = \bar{R}$$

și proiectînd-o pe normala principală (24.6), se obține:

$$\frac{mv^2}{\rho} = 0 \tag{2}$$

și cum $v \neq 0$, $\rho = \infty$ în tot timpul mișcării. Raza de curbură a traiectoriei fiind infinită în toate punctele traiectoriei, mobilul descrie o dreaptă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă punctul este obligat să se miște pe o suprafață, pe lîngă forța $\bar{R}$ mai acționează, cînd este eliberat punctul de legături și reacțiunea suprafeței avînd o componentă $\bar{N}$ normală la suprafață și una $\bar{T}$, forța de frecare situată în planul tangent la suprafață și opusă vitezei mobilului. Scriind ecuația fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = \bar{R} + \bar{N} + \bar{T}$$

și proiectînd-o pe axele triedrului intrinsec (24.6), se obține:

$$m\dot{v} = -R - T \qquad m\frac{v^2}{\rho} = N_\nu \qquad O = N_\beta. \tag{3}$$

Din aceste ecuații rezultă că reacțiunea $\bar{N} = N_\nu\,\bar{\nu}$ are direcția normalei principale. Însă $\bar{N}$ are și direcția normalei la suprafață. Înseamnă deci că normala la suprafață și normala principală a traiectoriei se confundă și traiectoria este o curbă geodezică a suprafeței.

Dacă suprafața este lucie, $T = 0$, și dacă se neglijează și rezistența mediului ($R = 0$), prima ecuație (3) devine:

$$m\dot{v} = 0,$$

deci $v = \text{const.}$, punctul descrie uniform o curbă geodezică a suprafeței.

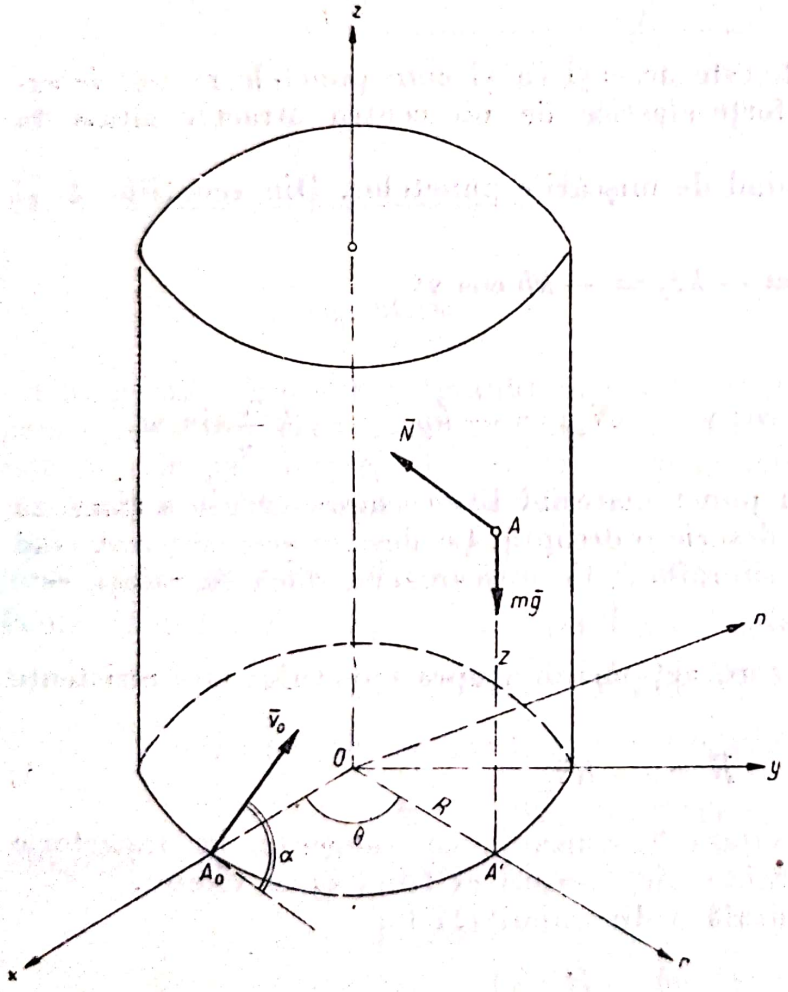


Fig. 24.31

24.31. Pe un cilindru circular drept, luciu, cu axa verticală avînd raza cercului director R, se mișcă un punct material greu A. În momentul inițial punctul se găsește în A_0 și i se imprimă o viteză $\bar{v}_0$ cuprinsă în planul tangent la cilindru, $\bar{v}_0$ formînd unghiul α cu tangenta la cercul paralel al cilindrului. Să se studieze mișcarea punctului. Ce se întîmplă cînd punctul este lipsit de greutate?

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$. Punctul avînd două grade de libertate, cele două ecuații de mișcare se vor alege din ecuațiile care elimină reacțiunea $\bar{N}$, ecuația fundamentală a dinamicii (24.7) proiectată pe axele On și Oz (axa cilindrului), (coordonatele cilindrice $Ornz$, v. fig. 24.31,*a*), teorema momentului

cinetic (24.10) în raport cu axa cilindrului Oz și teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic (24.16).

Pentru studiul mișcării, cele mai comode sînt coordonatele cilindrice r, θ și z, unghiul θ fiind cel format de axa Ox (orizontala care trece prin poziția inițială A_0) cu axa Or (cu raza OA'; A' este proiecția punctului A pe planul orizontal xOy), ecuația cilindrului fiind:

$$r = R \tag{1}$$

($r = OA'$). Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.1), pe axa Oz se obține:

$$m\ddot{z} = -mg \tag{2}$$

și ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = v_0 \sin\alpha$, se obține prima ecuație parametrică de mișcare:

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha. \tag{3}$$

Din teorema momentului cinetic în raport cu axa Oz rezultă:

$$\frac{d}{dt} K_z = \mathfrak{M}_z = 0, \tag{4}$$

deoarece $\bar{N}$ întîlnește axa Oz, iar $m\bar{g}$ este paralelă cu Oz; ținînd seamă de expresia (24.12)* momentului cinetic, rezultă prin integrare:

$$K_z = mr^2\dot{\theta} = mR^2\dot{\theta} = C, \tag{5}$$

momentul cinetic în raport cu Oz conservîndu-se. Cum în momentul inițial $t = 0$, impulsul (24.3) este $m\bar{v}_0$, momentul lui în raport cu Oz (momentul cinetic) se poate calcula geometric. El este $K_z = mRv_0 \cos\alpha$, deci $C = mRv_0 \cos\alpha$ și

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 \cos\alpha}{R} \qquad \theta = \frac{v_0 t \cos\alpha}{R}. \tag{6}$$

---

* Expresia momentului cinetic (24.12) este foarte simplu de determinat în coordonate cilindrice. Din relația de definiție a momentului cinetic (24.8) avem, ținînd seamă de expresia (13.8) a vectorului de poziție $\bar{r}$ și a vitezei $\bar{v}$ în coordonate cilindrice (13.9):

$$\bar{r} = r\bar{\rho} + z\bar{k} \qquad \bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n} + \dot{z}\bar{k}$$

($\bar{\rho} = \text{vers}Or$, $\bar{n} = \text{vers}On$, $\bar{k} = \text{vers}Oz$) rezultă:

$$\bar{K} = \bar{r} \cdot m\,\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{\rho} & \bar{n} & \bar{k} \\ r & 0 & z \\ m\dot{r} & mr\dot{\theta} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

K_z este minorul lui $\bar{k}$ din determinantul precedent; deci $K_z = mr^2\dot{\theta}$. Această relație se poate regăsi și din formulele (24.11), în care $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Aceste ecuații se puteau obține și cu ajutorul ecuației fundamentale a dinamicii (24.7) proiectată în coordonate cilindrice:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad m\ddot{z} = -mg. \tag{7}$$

Din ultimele două ecuații (7) și din (1) rezultă $\ddot{z} = -g$, $\ddot{\theta}=0$, care, integrate, duc la ecuațiile (3) și (6), iar din prima ecuație rezultă reacțiunea:

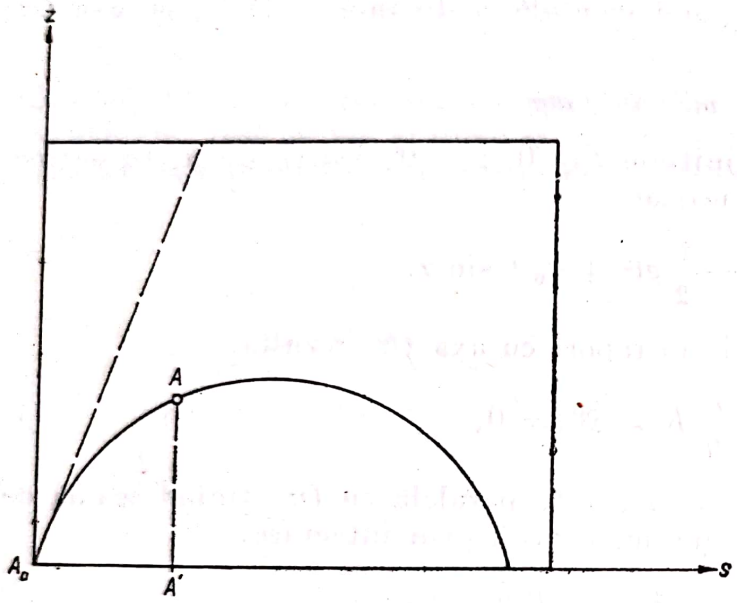


Fig. 24.31,*b*

$$N = mR\dot{\theta}^2 = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{R}. \tag{8}$$

Ce este traiectoria punctului pe cilindrul desfășurat? Notînd arc $A_0A = s = R\theta$, cilindrul desfășurat devine un dreptunghi în care punctul A va avea coordonatele:

$$s = R\theta = v_0\, t\, \cos\alpha$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha, \tag{9}$$

deci punctul va descrie parabola:

$$z = -\frac{gs^2}{2v_0^2\cos\alpha} + s\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{10}$$

(fig. 24.31,*b*). Dacă punctul este lipsit de greutate, forța $m\bar{g}$ nu mai trebuie introdusă în calcule. Ecuațiile de mișcare vor fi atunci:

$$z = v_0\, t \sin\alpha \qquad \theta = \frac{v_0\, t\cos\alpha}{R}, \tag{11}$$

și traiectoria punctului pe cilindrul desfășurat va fi dreapta:

$$z = s\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{9'}$$

ceea ce arată că punctul descrie o elice avînd unghiul de înclinare α, cu viteza constantă v_0. Acest rezultat se putea deduce direct. Cum asupra punctului nu lucra nici o forță efectiv aplicată și se neglijau frecările, punctul trebuia să descrie uniform o curbă geodezică a cilindrului (v. problema 24.30), iar elicea este o geodezică a cilindrului.

24.32. Pe un con circular drept, luciu, cu axa verticală avînd unghiul la vîrf 2α, se mișcă un punct material greu A. În momentul inițial, punctul se găsește în punctul A_0 și are viteza inițială $\bar{v}_0$ orizontală, tangentă la cercul paralel care trece prin A_0, planul cercului găsindu-se la distanța h de vîrful O al conului. Să se studieze mișcarea punctului.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$ normală la con. Punctul avînd două grade de libertate, este nevoie de două ecuații de mișcare care să elimine reacțiunea $\bar{N}$. Se poate aplica teorema momentului cinetic față de axa conului, deoarece suportul reacțiunii $\bar{N}$ intersectează axa conului, și teorema energiei. Se va alege sistemul de axe din figura 24.32,*a* (Oz axa cilindrului, planul xOz cuprinzînd punctul A_0,

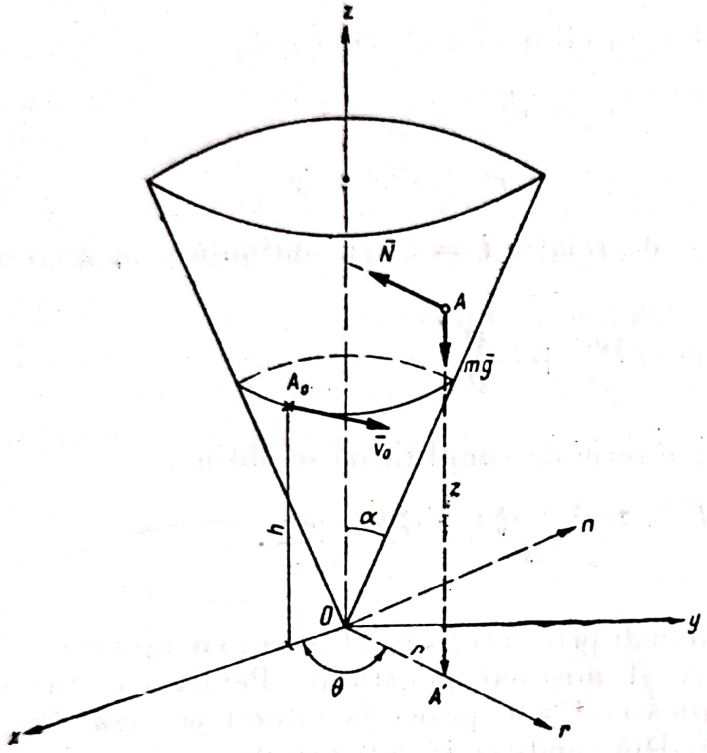


Fig. 24.32,*a*

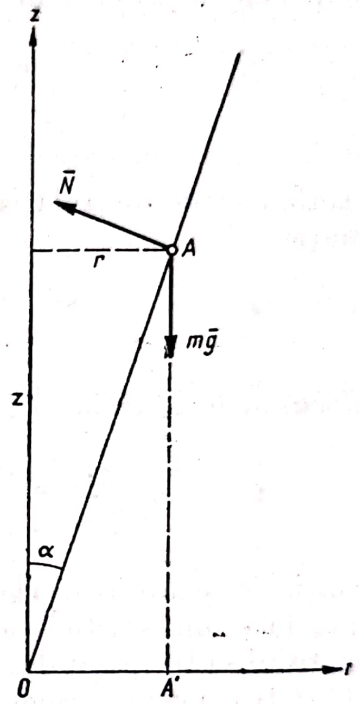


Fig. 24.32,*b*

Or direcția OA', unde A' este proiecția punctului A pe planul orizontal xOy). Calculele se vor face în coordonate cilindrice, ecuația conului în coordonate cilindrice r, θ, z fiind:

$$r = z \operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

(v. fig. 24.32,*b*).

Aplicînd teorema momentului cinetic (24.10) în raport cu axa Oz rezultă:

$$\frac{d}{dt} K_z = \mathfrak{M}_z = 0 \tag{2}$$

($m\bar{g}$ și Oz fiind coliniare); ținînd seamă de (24.12), rezultă prin integrare:

$$K_z = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}, \tag{3}$$

adică punctul A' se mișcă cu viteză areolară $\Omega = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta}$ constantă. Deoarece în momentul inițial momentul cinetic era $K_z = mv_0 h \operatorname{tg}\alpha$ (se calculează geometric, fiind momentul impulsului $m\bar{v}_0$ aplicat în A_0 față de Oz), rezultă:

$$\dot{\theta} = \frac{v_0 h}{z^2 \operatorname{tg}\alpha}. \tag{4}$$

Cînd punctul A se apropie de vîrful O al conului, viteza unghiulară $\dot{\theta}$ crește, iar pentru $A \to 0$, $\dot{\theta} \to \infty$, deci punctul A nu va putea ajunge niciodată în O.

Aplicînd teorema energiei (24.16), se va obține:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -mg(z - h). \tag{5}$$

Componentele vitezei în coordonate cilindrice (13.9) fiind:

$$v_\rho = \dot{r} \qquad v_n = r\dot{\theta} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$v^2 = v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \tag{6}$$

și ținînd seamă de relația (4) și de relația $\dot{r} = \dot{z} \operatorname{tg} \alpha$ obținută prin derivarea ecuației (1):

$$v^2 = \frac{v_0^2 h^2}{z^2} + \frac{\dot{z}^2}{\cos^2 \alpha}. \tag{7}$$

Înlocuind în ecuația (5), după o serie de simplificări se obține:

$$\dot{z}^2 = \frac{[(z - h)(-2g z^2 + v_0^2 z + v_0^2 h)] \cos^2 \alpha}{z^2}. \tag{8}$$

Ecuația (8) poate fi integrată numai prin integrale eliptice; cu ajutorul ei se poate face un studiu calitativ al mișcării punctului. Pentru ca mișcarea punctului să fie posibilă, trebuie ca $\dot{z}^2 \geqslant 0$, proiecția vitezei pe axa Oz neputînd fi o mărime imaginară. Din condiția $\dot{z}^2 \geqslant 0$ rezultă:

$$P_3(z) \geqslant 0, \tag{9}$$

unde am notat prin $P_3(z)$ polinomul de gradul al treilea:

$$P_3(z) = (z - h)(-2gz^2 + v_0^2 z + v_0^2 h). \tag{10}$$

Rădăcinile ecuației $P_3(z) = 0$ sînt:

$$z_1 = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{8gh}{v_0^2}}\right), \quad z_2 = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh}{v^2}}\right) \text{ și } z_3 = h,$$

unde rădăcina z_1 este negativă, iar z_2 și z_3 sînt pozitive.

Dacă $v_0^2 < gh$, atunci $z_2 < z_3$, iar tabela privind variația semnului lui $P_3(z)$ și deci și a lui $\dot{z}^2$ este:

z	$-\infty$		z_1		0		z_2		h		$+\infty$
$P_3(z)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Cum punctul se mișcă pe pînza superioară a conului, mobilul se mișcă între cercurile paralele $z = z_2$ și $z = h$.

Cînd mobilul ajunge pe unul dintre aceste două cercuri paralele, viteza $\dot{z}$ se anulează, însă accelerația $\ddot{z} = \dfrac{z\dfrac{dP_3(z)}{dz} - 2P_3(z)}{2z^3}\cos^2\alpha$ nu se anulează în acel moment, și deci variația lui z schimbă sensul, și traiectoria punctului va fi o curbă care șerpuiește între cercurile paralele $z = z_2$ și $z = h$ (v. fig. 24.32,*c*).

Dacă $v_0^2 > g\,h$, atunci $z_3 < z_2$, se intervertesc rădăcinile z_2 și z_3, tot ce s-a spus pentru primul caz rămînînd valabil și în cazul acesta. Traiectoria punctului va fi o curbă cuprinsă între cercurile paralele $z = h$ și $z = z_2$, ca în figura 24.32, *d*.

În sfîrșit, dacă $v_0^2 = gh$, atunci $z_2 = z_3 = h$, mișcarea nefiind posibilă decît pe cercul paralel $z = h$. Viteza unghiulară $\dot{\theta}$ va fi constantă $\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, mobilul avînd o mișcare circulară uniformă.

Dacă viteza inițială $\bar{v}_0$ nu ar fi fost orizontală, din punct de vedere calitativ mișcarea ar fi fost asemănătoare, mobilul descriind o curbă care ar șerpui între două cercuri paralele $z = z_2$ și $z = z_3$, unde $z_2 < h < z_3$. Dacă

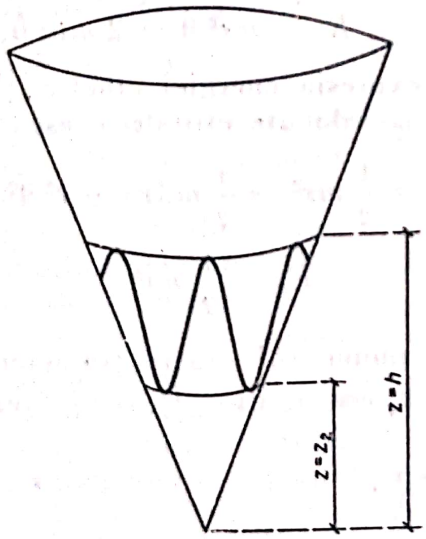


Fig. 24.32,*c*

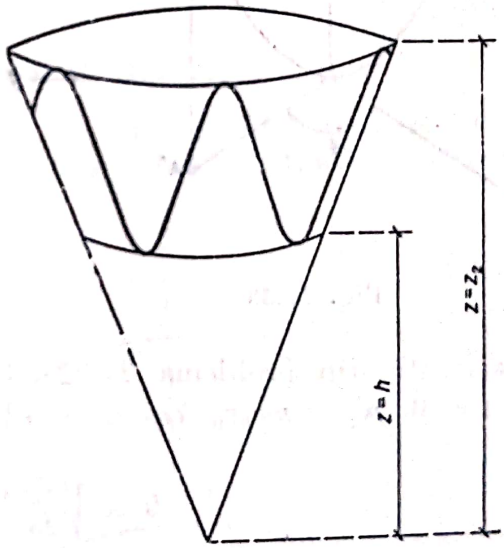


Fig. 24.32,*d*

viteza inițială $\bar{v}_0$ ar fi avut direcția unei generatoare a conului, caracterul mișcării ar fi fost diferit, mișcarea ar fi fost o mișcare uniform variată de-a lungul generatoarei conului, lucru care poate fi ușor verificat de cititori.

24.33. Pe un paraboloid de rotație luciu, avînd ecuația $x^2 + y^2 = 2\,pz$, axa Oz fiind îndreptată pe verticală în sus, se mișcă un punct material greu A, de masă m. Știind că în momentul inițial punctul are cota $z = z_0$ și viteza inițială $\bar{v}_0$ tangentă la paraboloid formînd unghiul α cu cercul paralel al paraboloidului, se cere să se studieze mișcarea punctului greu.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$ (fig. 24.33). Punctul are două grade de libertate, pentru a obține cele două ecuații de mișcare se va aplica teorema momentului cinetic în raport cu axa Oz (24.10) și teorema energiei (24.16) care elimină reacțiunea normală $\bar{N}$.

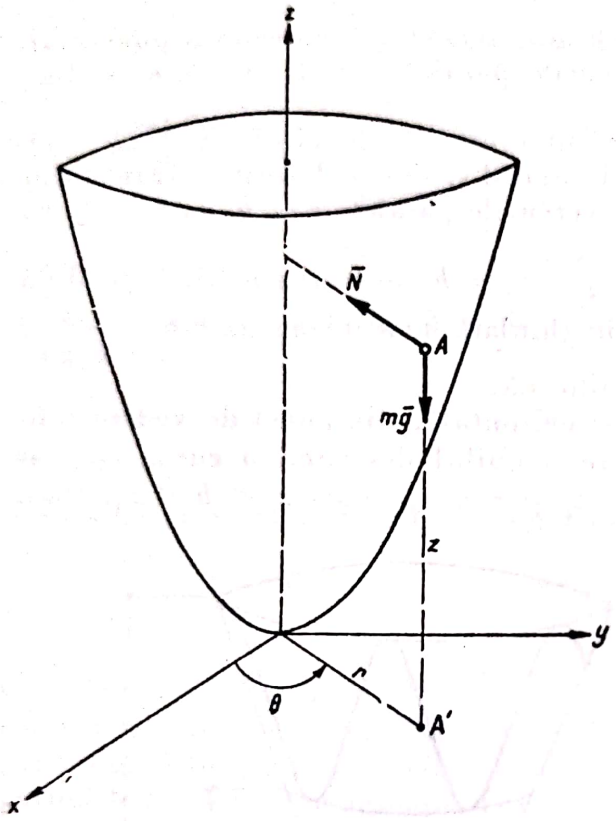


Fig. 24.33

Rezultă:

$$K_z = \text{const.} \tag{1}$$

și:

$$E - E_0 = -mg(z - z_0). \tag{2}$$

Lucrînd în coordonate cilindrice r, θ, z, se pot alege ca parametri unghiul θ și cota z. Ecuația paraboloidului este:

$$r^2 = 2pz, \tag{3}$$

expresia (24.12) a momentului cinetic este:

$$K_z = mr^2\,\dot{\theta} = 2\,mpz\,\dot{\theta}, \tag{4}$$

și expresia energiei cinetice (24.13) în coordonate cilindrice este:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(r^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{5}$$

[v. relația (6) din problema 24.32]. Cum momentul cinetic în momentul inițial $t = 0$ $K_z = mr_0v_0 \cos\alpha = m\sqrt{2pz_0}v_0 \cos\alpha$, din (1) și (4) rezultă:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{z_0}{2p}}\,\frac{v_0 \cos\alpha}{z}. \tag{6}$$

Punctul A se mișcă astfel încît proiecția lui A' pe planul xOy are viteza areolară $\Omega = \frac{1}{2}r^2\,\dot{\theta}$ constantă. Viteza unghiulară $\dot{\theta}$ a punctului crește cînd punctul se apropie de vîrful O al paraboloidului și scade cînd cota z a punctului crește, iar dacă $A \to 0$, $\dot{\theta} \to \infty$, deci punctul nu va ajunge niciodată în punctul O $\left(\text{afară de cazul } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Derivînd relația (3) în raport cu timpul se obține:

$$2r\dot{r} = 2p\dot{z} \qquad \dot{r} = \frac{pz}{r} = \sqrt{\frac{p}{2z}}\,\dot{z}$$

și ținînd seamă de (3), (5) și (6) din ecuația (2), după o serie de simplificări, se obține:

$$\dot{z}^2 = \frac{-4gz^2 + 2z\,(v_0^2 + 2gz_0) - 2z_0 v_0^2 \cos^2\alpha}{p + 2z}, \qquad (7)$$

ecuație care poate fi integrată numai cu ajutorul integralelor eliptice. Pentru ca mișcarea punctului să fie posibilă, trebuie ca $\dot{z}^2 \geqslant 0$. Cum în orice caz $z \geqslant 0$, rezultă că polinomul de la numărător:

$$P_2(z) = -4gz^2 + 2z\,(v_0^2 + 2gz_0) - 2z_0 v_0^2 \cos^2\alpha \qquad (8)$$

să fie pozitiv $P_2(z) \geqslant 0$. Rădăcinile ecuației $P_2(z) = 0$ sînt pozitive, fie z_1 și z_2 aceste rădăcini. Cum $P_2(z_0) > 0$ (deoarece pentru $z = z_0$, $\dot{z}$ este real), tabela de variație a polinomului $P_2(z)$ este:

z	0		z_1		z_0		z_2		$+\infty$
$P_2(z)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

adică mișcarea este posibilă pentru $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, traiectoria fiind o curbă care șerpuiește între cercurile paralele $z = z_1$ și $z = z_2$ și este tangentă la aceste cercuri. Mișcarea este asemănătoare cu mișcarea pendulului sferic sau a pendulului conic (problema 24.32). Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\ddot{\theta} = 0$ și mișcarea va avea loc pe o curbă meridiană a paraboloidului.

24.34. Un punct material greu A, de masă m, obligat să se miște pe o sferă de rază l, este atras de o forță elastică avînd constanta k, centrul atractiv C fiind situat pe verticala Oz a centrului sferei, la distanța c deasupra centrului. Să se studieze mișcarea punctului. Ce mișcare are punctul în cazul particular cînd atracția punctului C asupra centrului sferei este egală cu greutatea punctului A?

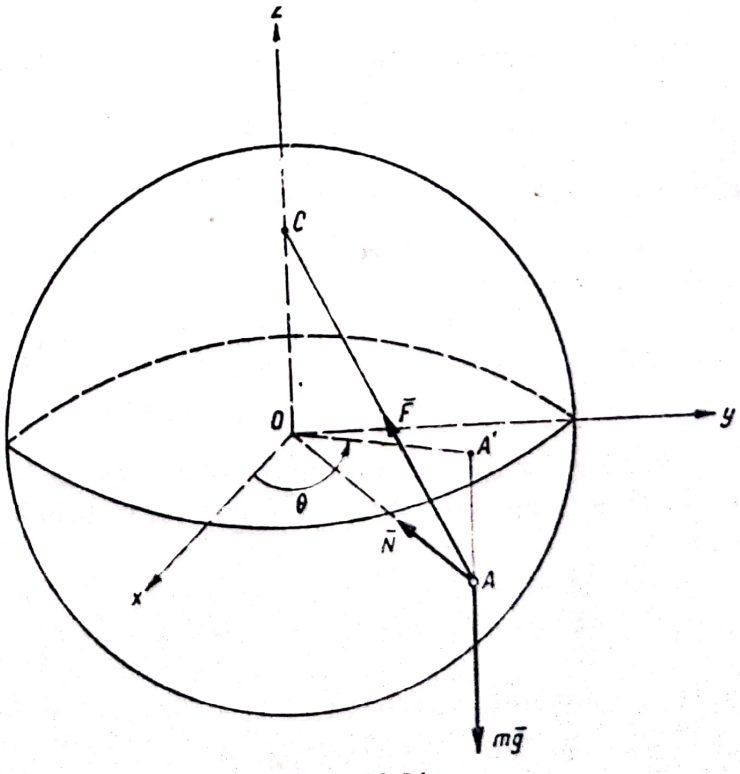


Fig. 24.34,a

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, forța atractivă $\bar{F} = -k\,\overline{CA} = -k\,(\bar{r} - \bar{r}_C)$ și reacțiunea $\bar{N}$ normală la sferă (fig. 24.34,*a*). Punctul A are două grade de libertate, poziția lui pe sferă fiind determinată de unghiul θ și de cota z. Ecuațiile care elimină reacțiunea $\bar{N}$ sînt date de teorema

momentului cinetic în raport cu axa Oz (24.10) și teorema energiei (24.16). Se obține:

$$K_z = \text{const.} \tag{1}$$

și deoarece $K_z = mr^2\dot{\theta} = m(l^2 - z^2)\,\dot{\theta}$ rezultă:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{l^2 - z^2}, \tag{2}$$

unde C reprezintă dublul vitezei areolare a punctului A', proiecția lui A pe planul xOy. Teorema energiei este:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{L}_{A0A}, \tag{3}$$

unde conform relației (6) din problema 24.32:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \frac{C^2 + l^2\dot{z}^2}{l^2 - z^2} \tag{4}$$

[s-a ținut seamă de relația (2) și de ecuația sferei în coordonate cilindrice $r^2 = l^2 - z^2$, din a cărei derivare în raport cu timpul rezultă $2\,r\dot{r} = -2\,z\dot{z}$ $\dot{r} = -\frac{z\dot{z}}{\sqrt{l^2 - z^2}}$], lucrul mecanic fiind conform relațiilor (24.21) și (24.22):

$$\mathcal{L}_{A0A} = -mg(z - z_0) - \frac{k}{2}(d^2 - d_0^2) = -mg(z - z_0) + k\,c(z - z_0) \tag{5}$$

[$d^2 = AC^2 = (z - c)^2 + r^2 = c^2 + l^2 - 2\,cz$, $d_0^2 = c^2 + l^2 - 2cz_0$, z_0 abscisa punctului în momentul inițial].

Din (3), (4) și (5) rezultă după o serie de simplificări:

$$\dot{z}^2 = \frac{(l^2 - z^2)\left[v_0^2 + 2\,(z - z_0)\left(\frac{k}{m}c - g\right)\right] - C^2}{l^2}. \tag{6}$$

Pentru ca mișcarea punctului să fie posibilă, trebuie ca $\dot{z}^2 \geqslant 0$. Cum punctul se mișcă pe sferă, $-l \leqslant z \leqslant l$, tabela de variație a lui $\dot{z}^2$ este:

z	$-l$		z_1		z_0		z_2		$+l$
$\dot{z}^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

a treia rădăcină a ecuației $\dot{z}^2 = 0$ fiind cuprinsă între $-\infty$ și $-l$, dacă $g < \frac{k}{m}c$, sau între $+l$ și $+\infty$, dacă $g > \frac{k}{m}c$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum accelerația $\ddot{z}$ nu se anulează pentru $z = z_1$ și $z = z_2$ și cum pentru aceste valori $\dot{z} = 0$, traiectoria punctului este o curbă care șerpuiește între cercurile paralele $z = z_1$ și $z = z_2$ (v. fig. 24.34,*b*). Dacă nu se ține seamă de forța elastică $k = 0$, atunci problema noastră devine problema pendulului sferic.

Atracția centrului C asupra centrului O al sferei este egală cu $k\,c$; dacă greutatea mg este egală cu ea, atunci:

$$k = \frac{mg}{c}.$$

Înlocuind în ecuația (5) rezultă $\mathfrak{L}_{A0A} = 0$, deci:

$$v = v_0, \qquad (7)$$

mișcarea punctului A fiind uniformă. Acest rezultat se explică simplu. Rezultanta forțelor aplicate punctului este:

$$\overline{\mathfrak{R}} = m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N} = -mg\bar{k} - k\bar{r} + \\ + k\,c\,\bar{k} + \bar{N}$$

sau:

$$\overline{\mathfrak{R}} = -k\bar{r} + \bar{N}, \qquad (8)$$

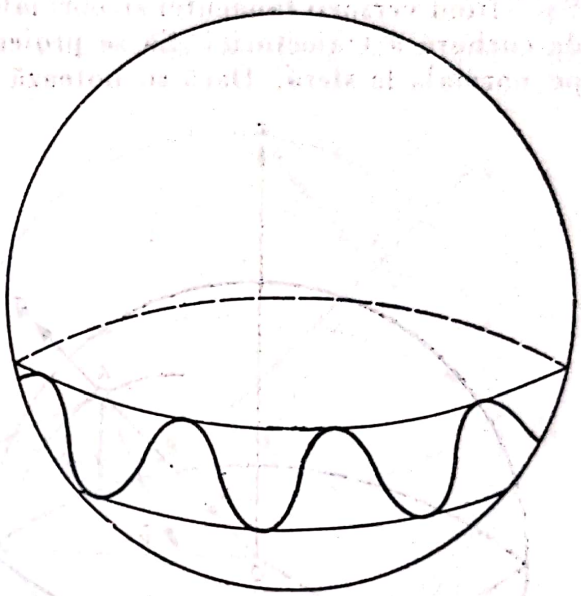


Fig. 24.34,*b*

adică are direcția normalei la sferă (raza OA); lucrul mecanic al tuturor forțelor va fi nul și energia cinetică rămîne constantă, punctul avînd o mișcare uniformă. Punctul fiind supus acțiunii forței $\overline{\mathfrak{R}}$, al cărei suport trece tot timpul prin centrul O al sferei, va trebui să aibă o traiectorie situată într-un plan care conține punctul O (v. cap. XXII — Forțe centrale).

Traiectoria punctului A va fi deci un cerc mare al sferei, intersecția sferei cu planul menționat, punctul descriind o curbă geodezică a sferei.

Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (24.6) pe normala principală la traiectorie, se poate determina reacțiunea $\bar{N}$. Rezultă:

$$\frac{mv_0^2}{l} = N + kl \qquad N = \frac{mv_0^2}{l} - kl. \qquad (9)$$

24.35. Un punct greu este obligat să se miște pe o sferă netedă de rază R. Cunoscîndu-se poziția inițială și viteza inițială a punctului, se cere să se determine reacțiunea sferei.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$.

Ecuația fundamentală a dinamicii (24.1) va fi:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}, \tag{1}$$

unde:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\nu}, \tag{2}$$

$\bar{\tau}$ și $\bar{\nu}$ fiind versorii tangentei și normalei principale la traiectorie, și ρ — raza de curbură a traiectoriei. Să se proiecteze ecuația fundamentală a dinamicii pe normala la sferă. Dacă se notează cu θ unghiul dintre normala principală la traiectorie și normala la sferă (fig. 24.35), proiecția accelerației pe normala la sferă va fi:

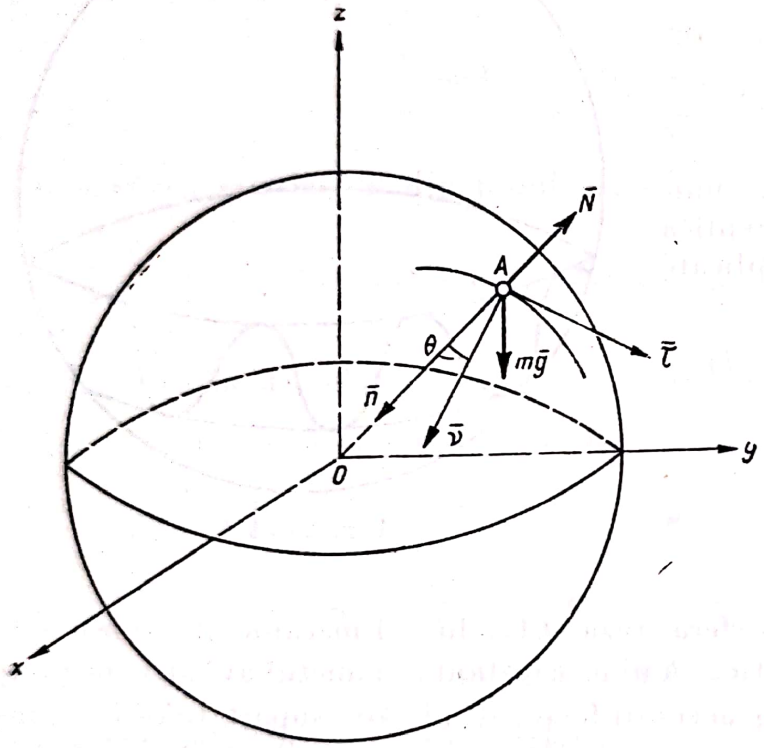


Fig. 24.35

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\cos\theta. \tag{3}$$

Dar $\frac{\rho}{\cos\theta}$ este, conform teoremei lui Meusnier, raza de curbură a secțiunii normale la sferă care trece prin tangenta la traiectorie*; secțiunea normală la sferă este un cerc mare al sferei, deci $\frac{\rho}{\cos\theta} = R$ și:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{4}$$

Se obține:

$$m\frac{v^2}{R} = mg\frac{z}{R} - N. \tag{5}$$

Cu ajutorul teoremei energiei se determină viteza:

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0). \tag{6}$$

Înlocuind în ecuația (5) se obține reacțiunea în orice poziție a punctului:

$$N = \frac{mg}{R}\left(3z - 2z_0 - \frac{v_0^2}{g}\right). \tag{7}$$

* Vezi *G. Vrănceanu, Geometrie analitică și proiectivă*, p. 463, Editura tehnică București, 1954.

24.36. Un punct material se mișcă pe suprafața unei sfere aspre de rază R fiind atras de centrul sferei cu o forță newtoniană, proporțională cu masa punctului și invers proporțională cu pătratul distanței la centrul sferei, factorul de proporționalitate fiind k (fig. 24.36). Cunoscîndu-se viteza inițială $\bar{v}_0$ și coeficientul de frecare μ se cere drumul parcurs de punct pînă la oprire.

Rezolvare. Asupra punctului acționează forța atractivă $\bar{F} = \frac{mk}{R^2}\bar{n}$, unde $\bar{n}$ este versorul normalei la sferă, reacțiunea normală $\bar{N}$ și forța de frecare $\bar{T}$, unde, conform (24.2):

$$T = \mu |N|. \qquad (1)$$

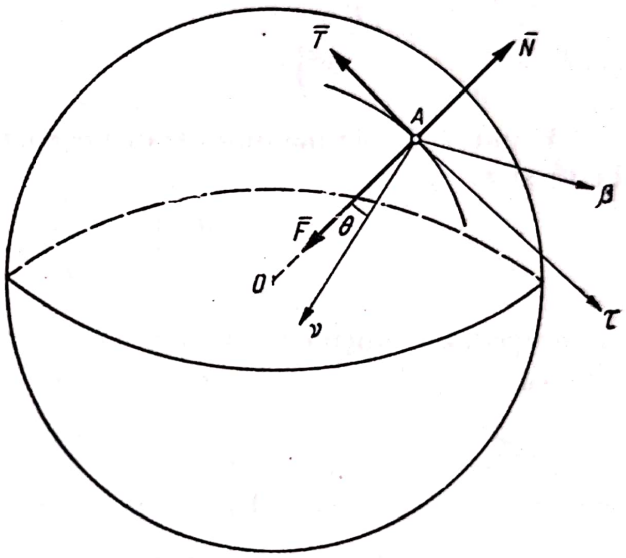


Fig. 24.36

Problema noastră are trei necunoscute, cei doi parametri care determină poziția punctului pe sferă și reacțiunea normală $\bar{N}$. Proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe axele triedrului intrinsec (24.6) se obțin:

$$m\dot{v} = -T \qquad (2)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = (F - N)\cos\theta \qquad (3)$$

$$O = (N - F)\sin\theta, \qquad (4)$$

unde θ este unghiul format de normala principală la traiectorie și normala la sferă. Cum în general $N \neq F$, deoarece $v \neq 0$ și $\rho \neq \infty$, rezultă din (4) $\theta = 0$, adică traiectoria este o geodezică a sferei, adică un cerc mare al sferei. Ecuația (3) devine:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{mk}{R^2} - N, \qquad (5)$$

ecuație care se putea obține direct proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii pe normala la sferă (v. problema 24.35).

Din ecuația (5) rezultă:

$$N = \frac{m}{R}\left(\frac{k}{R}\right) - v^2. \qquad (6)$$

Pentru a găsi legea de mișcare a punctului pe circumferința pe care o descrie ori se integrează ecuația (2) găsind legea vitezelor în funcție de timp, ori fo-

Iosind ecuația energiei se determină legea vitezelor în funcție de deplasări. Teorema energiei (24.15) are forma:

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -T\, ds, \tag{7}$$

forța de frecare $\bar{T}$, fiind opusă deplasării elementare ds de-a lungul tangentei la traiectorie, iar lucrul mecanic (24.23) al forței $\bar{F}$ fiind $k\, m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = 0$, deoarece $r = r_0 = R$.

Dacă $v_0^2 < \frac{k}{R}$, modulul reacțiunii normale este $|N| = \frac{m}{R}\left(\frac{k}{R} - v^2\right)$, și $T = \frac{\mu m}{R}\left(\frac{k}{R} - v^2\right)$.

Ecuația (7) devine după transformări simple o ecuație diferențială liniară în v^2 și s:

$$\frac{d(v^2)}{ds} - \frac{2\mu}{R} v^2 = -\frac{2\mu k}{R^2} \tag{8}$$

și integrînd-o obținem, ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $s = 0$, $v = v_0$:

$$v^2 = \frac{k}{R} - \left(\frac{k}{R} - v_0^2\right) e^{-\frac{2\mu s}{R}} \qquad s = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{1 - \frac{Rv^2}{k}}{1 - \frac{Rv_0^2}{k}}. \tag{9}$$

Spațiul s_1 parcurs pînă la oprire ($v = 0$) este:

$$s_1 = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{1}{1 - \frac{Rv_0^2}{k}}. \tag{10}$$

Dacă $v_0^2 > \frac{k}{R}$ reacțiunea va fi dirijată în sens invers, $|N| = \frac{m}{R}\left(v^2 - \frac{k}{R}\right)$ și $T = \frac{\mu m}{R}\left(v^2 - \frac{k}{R}\right)$.

Ecuația (7) devine după transformări simple:

$$\frac{d(v^2)}{ds} + \frac{2\mu}{R} v^2 = \frac{2\mu k}{R^2}, \tag{11}$$

care după integrare și după determinarea constantelor de integrare are forma:

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{k}{R}\right) e^{-\frac{2\mu s}{R}} + \frac{k}{R}. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mobilul nu se va opri în acest caz niciodată, deoarece $v^2 > \frac{k}{R}$; mișcarea mobilului va tinde spre o mișcare circulară uniformă, deoarece cînd $s \to \infty$, $v^2 \to \frac{k}{R}$, viteza-limită fiind:

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{k}{R}}.$$

În acest caz, $N \to 0$, iar forța de frecare T tinde și ea spre zero.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

24.37. Un punct material greu coboară un plan înclinat luciu pornind din O fără viteză inițială (fig. 24.37). Să se determine unghiul de înclinare α al planului, astfel încît timpul în care punctul va parcurge drumul OA să fie minim, știind că $AB = a = \text{const}$.

Răspuns: $\alpha = 45°$.

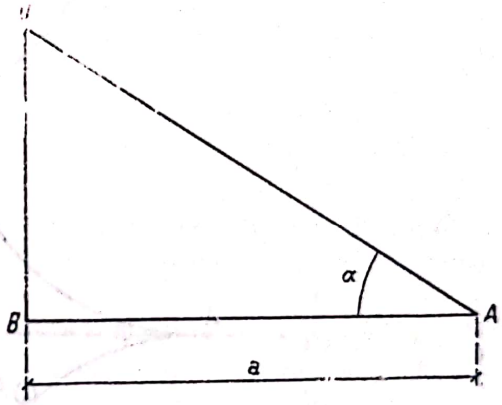


Fig. 24.37

24.38. Un pendul matematic A de lungime l este lansat din poziția de echilibru A_0 cu viteza inițială v_0, în urma căreia se depărtează de verticală cu unghiul α. Să se afle viteza inițială a pendulului.

Răspuns: $v_0 = 2\sqrt{g\,l\,\sin\frac{\alpha}{2}}$.

24.39. Ce lungime l trebuie să aibă un pendul matematic pentru a bate secunda (perioada micilor oscilații $T = 2\,s$)? Ce viteză inițială trebuie imprimată acestui pendul în poziția de echilibru pentru a avea o mișcare oscilatorie? Dar pentru a avea o mișcare rotatorie?

Răspuns: $l = \frac{g\,T^2}{4\pi^2} = 0{,}995$ m ≈ 1 m. Pentru legătură bilaterală pendulul execută oscilații pentru $v_0 < 2\sqrt{g\,l} \approx 6{,}27$ m/s și are o mișcare rotatorie pentru $v_0 > 2\sqrt{g\,l} \approx 6{,}27$ m/s. Dacă legătura este unilaterală, pendulul are o mișcare oscilatorie pentru $v_0 < \sqrt{2gl} \approx 4{,}43$ m/s, o mișcare rotatorie pentru $v_0 > \sqrt{5\,gl} \approx 7$ m/s și o mișcare cu desprindere de pe cerc pentru $4{,}43 < v_0 < 7$ m/s.

24.40. Un pendul matematic de lungime l execută oscilații cu amplitudinea $\alpha = 60°$ în jurul poziției de echilibru. La un moment dat, cînd firul trece prin poziția verticală, el este fixat în mijloc. Ce amplitudine α_1 au noile oscilații? Cunoscîndu-se perioada micilor oscilații T pentru pendulul

liber, să se determine perioada micilor oscilații T_1 cînd firul este fixat în mijlocul său.

Răspuns: $\alpha_1 = 90°$; $T_1 = \frac{T}{\sqrt{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ pendulul oscilînd mai repede.

24.41. Un punct material se mișcă fără frecare, sub acțiunea gravitației pe ramura inferioară a unei astroide lucii (fig. 24.41) care are ecuația de forma:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}.$$

Știind că punctul pornește cu o viteză inițială extrem de mică din $A(0, -2r)$, să se afle în cît timp și cu ce viteză ajunge în $B(2r, 0)$.

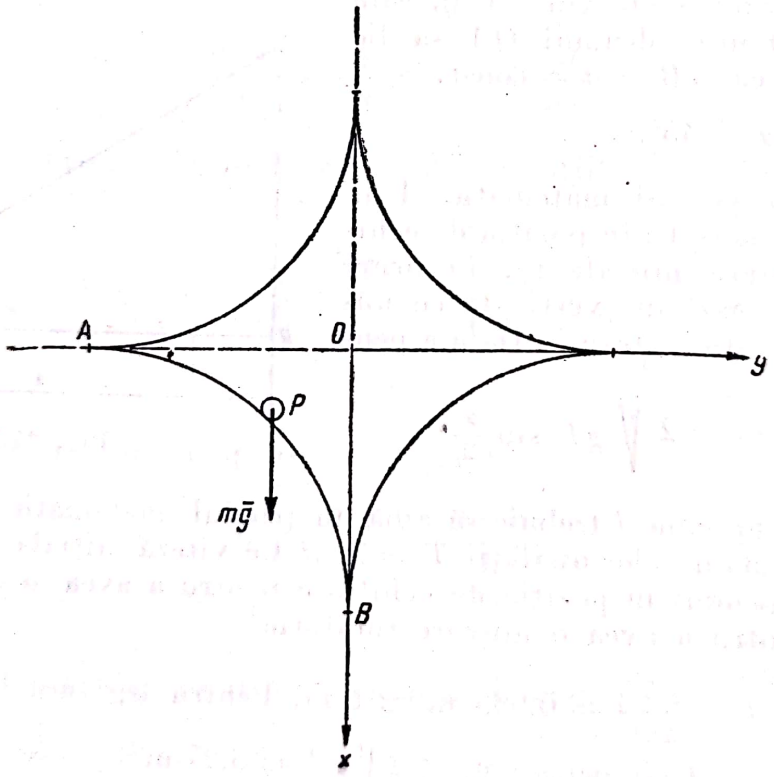


Fig. 24.41

Indicație. Elementul de arc de astroidă fiind $ds = \left(\frac{2r}{x}\right)^{1/3} dx$, cu ajutorul teoremei energiei se determină viteza ca funcție de arcul s, $v = \sqrt{2gx} = 2\sqrt[4]{\frac{g^2 s^3}{27r}}$ și prin integrare ecuația orară a mișcării $s = \frac{g^2 t^4}{432 r}$. Răspunsul cerut este: $v_B = 2\sqrt{gr}$, $t_B = 6\sqrt{\frac{r}{g}}$.

24.42. Un punct A obligat să se mişte pe un cerc luciu de rază R este atras cu două forţe elastice de punctele C_1 şi C_2 situate pe un diametru al cercului (fig. 24.42). Între constantele elastice k_1 şi k_2 există relaţia:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{OC_2}{OC_1}. \tag{1}$$

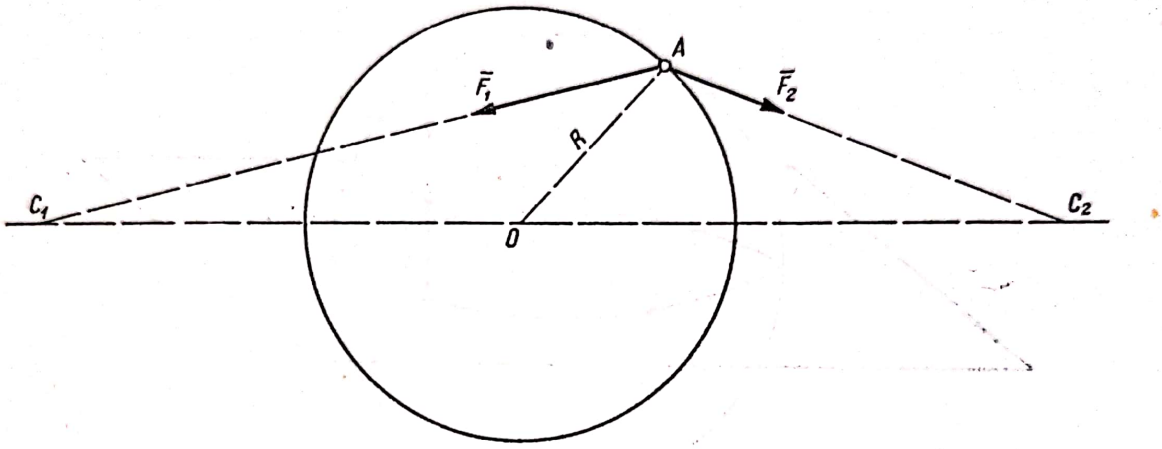


Fig. 24.42

Ştiind că în momentul iniţial punctul A are viteza $\bar{v}_0$, se cere să se studieze mişcarea lui pe cerc şi să se determine reacţiunea normală $\bar{N}$ a cercului.

Răspuns: Rezultanta forţelor elastice este $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = (k_1 + k_2)\,\overline{AO}$, punctul A are o mişcare circulară uniformă cu viteza $v = v_0$, [şi $N = (k_1 + k_2)\,R - \frac{m v_0^2}{R}$.

24.43. Un punct material A de masă m se mişcă pe un con circular drept, luciu, cu unghiul la vîrf 2α sub influenţa unei forţe elastice, centrul atractiv O fiind în vîrful conului, iar constanta elastică fiind k. În momentul iniţial punctul are cota $z = h$ şi viteza $\bar{v}_0$ tangentă la cercul paralel care trece prin A_0 (fig. 24.43). Să se studieze mişcarea punctului.

Indicaţie. Problema este asemănătoare cu problema 24.26. Folosind teorema momentului cinetic în raport cu axa Oz şi teorema energiei, se poate face un studiu calitativ al mişcării. Traiectoria este o curbă care şerpuieşte între cercurile paralele $z = h$ şi $z = \frac{v_0 \cos\alpha}{\nu}$, unde $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

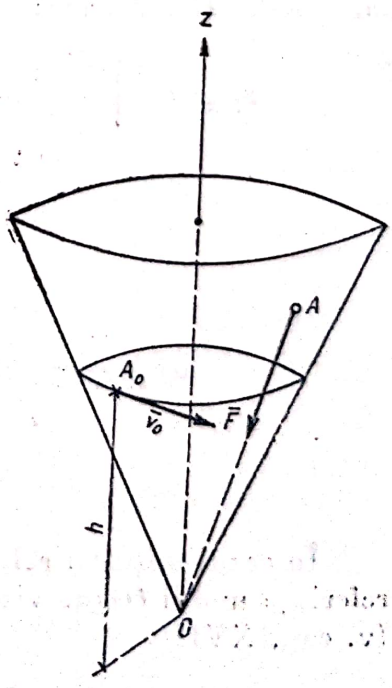


Fig. 24.43

24.44. Să se studieze mișcarea unui punct A pe o sferă lucie de rază R, punctul fiind atras de planul diametral xOy al sferei cu o forță proporțională cu masa m și cu cota z a punctului ($\bar{F} = -\lambda m z \bar{k}$), (v. fig. 24.44).

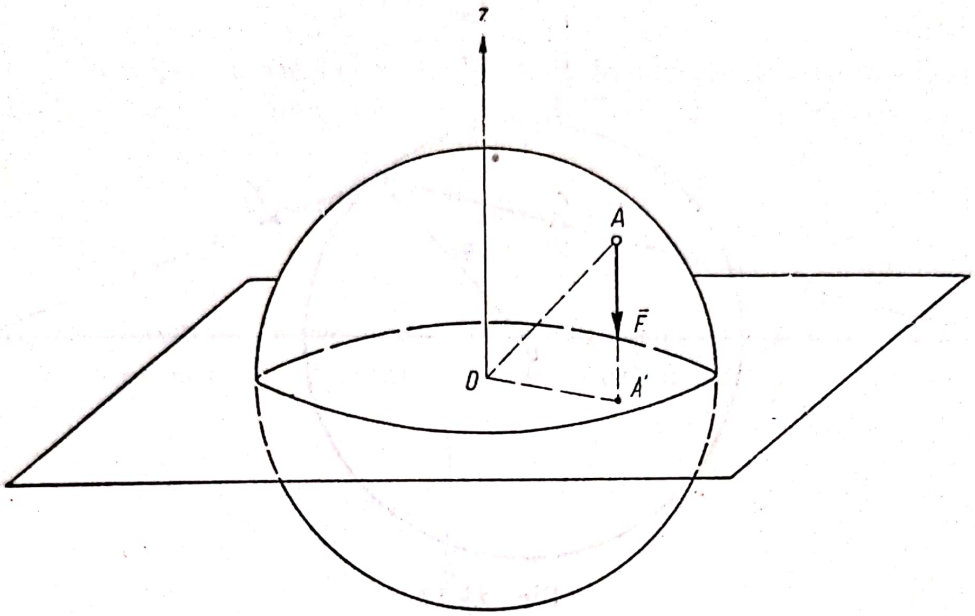


Fig. 24.44

Răspuns: Punctul A', proiecția lui A pe planul diametral, se mișcă cu viteza areolară constantă $\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$, și traiectoria șerpuiește între cercurile paralele z_1 și z_2, unde:

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{v_0^2 + \lambda (R^2 + z_0^2) - \sqrt{[v_0^2 - \lambda (R^2 - z_0^2)]^2 - 16 \lambda \Omega^2}}{2 \lambda}}.$$

Capitolul XXV

MIȘCAREA RELATIVĂ A PUNCTULUI MATERIAL

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

În cazul mișcării relative a unui punct material A față de un sistem de referință mobil $Oxyz$, viteza și accelerația absolută a punctului au expresiile (v. cap. XVII):

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t \qquad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c, \tag{25.1}$$

unde:

$$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \dot{x}\,\bar{i} + y\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k} \qquad \bar{a}_r = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}^* \quad (25.2)$$

reprezintă viteza și accelerația relativă,

$$\bar{v}_t = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad \bar{a}_t = \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (25.3)$$

reprezintă viteza și accelerația de transport,

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (25.4)$$

este accelerația Coriolis a punctului, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ este vectorul de poziție al punctului față de sistemul mobil, iar $\bar{v}_0$, $\bar{a}_0$ sînt viteza și accelerația originii O a triedrului mobil față de un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ și $\bar{\omega}$ și $\dot{\bar{\omega}}$ sînt viteza și accelerația unghiulară a triedrului mobil față de cel fix.

Pentru studiul mișcării punctului se folosește ecuația fundamentală a dinamicii în mișcarea relativă:

$$m\,\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \quad (25.5)$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta forțelor active și de legătură care acționează asupra punctului, iar:

$$\bar{F}_t = -\,m\,\bar{a}_t = -\,m\,[\bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] \quad (25.6)$$

$$\bar{F}_c = -\,m\,\bar{a}_c = -\,2\,m\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r \quad (25.7)$$

sînt forțele complementare de transport și Coriolis.

Tot pentru studiul mișcării relative se pot folosi și teoremele generale:

$$\frac{\partial \bar{H}_r}{\partial t} = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c^* \quad (25.8)$$

$$\frac{\partial \bar{K}_r}{\partial t} = \bar{r} \times (\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c) \quad (25.9)$$

$$dE_r = (\bar{F} + \bar{F}_t) \cdot \partial \bar{r}, \quad (25.10)$$

unde $\bar{H}_r = m\,\bar{v}_r$ este impulsul, $\bar{K}_r = \bar{r} \times m\,\bar{v}_r$ — momentul cinetic, și $E_r = \frac{1}{2}\,m\,v_r^2$ — energia cinetică a punctului în mișcarea relativă. Ecuațiile (25.5) și (25.8) sînt identice. Teorema energiei (25.10) elimină forța Coriolis, deoarece deplasarea elementară relativă $\partial \bar{r} = dx\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}$ este normală pe forța Coriolis $\bar{F}_c$. Ea poate fi folosită și sub forma integrală:

$$E_r - E_{r0} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_t, \quad (25.11)$$

---

* $\frac{\partial}{\partial t}$ reprezintă derivata locală, adică derivata calculată în raport cu triedrul mobil, presupunînd versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ constanți.

unde:

$$\mathfrak{L} = \int_{A0A} \bar{F} \partial \bar{r}, \qquad \mathfrak{L}_t = \int_{A0A} \bar{F}_t \partial \bar{r} \tag{25.12}$$

reprezintă lucrul mecanic relativ al forței $\bar{F}$ și al forței de transport $\bar{F}_t$. Dacă punctul material se află în repaus relativ, ecuația (25.5) devine:

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0. \tag{25.13}$$

În cazul unui sistem de puncte materiale aflat în repaus relativ, sistemul format de forțele $\bar{F}$ și forțele complementare de transport $\bar{F}_t$ se echilibrează, rezultanta și momentul rezultant al lor fiind nul:

$$\Sigma (\bar{F} + \bar{F}_t) = 0 \qquad \Sigma [\bar{r} \times (\bar{F} + \bar{F}_t)] = 0. \tag{25.14}$$

Se poate pune drept condiție de echilibru relativ ca lucrul mecanic virtual (v. cap. XXXII) al sistemului forțelor $\bar{F}$ și $\bar{F}_t$ să fie nul:

$$\delta \mathfrak{L} = \Sigma (\bar{F} + \bar{F}_t)\, \delta \bar{r} = 0. \tag{25.15}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

25.1. Un vagon se mișcă în linie dreaptă cu accelerația constantă $\bar{a}_0$. Să se determine traiectoria relativă a unui corp care cade liber în vagon, în cazul în care viteza inițială relativă a corpului este nulă.

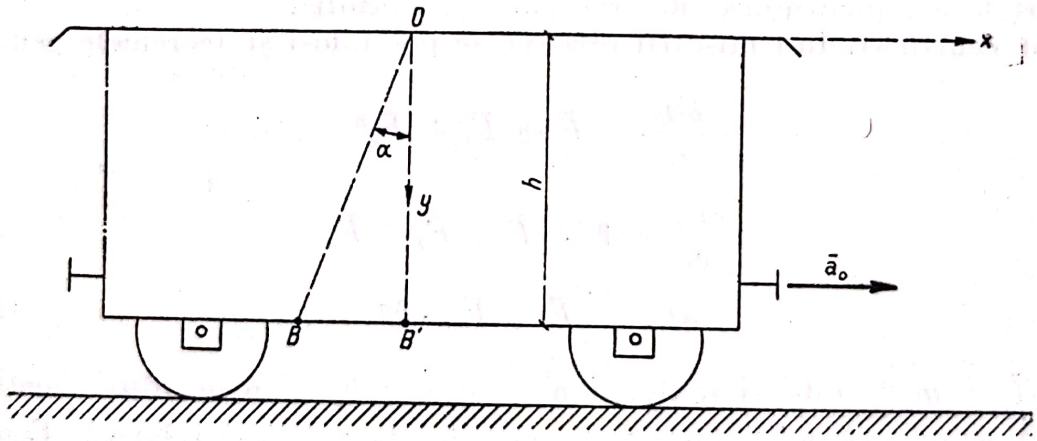


Fig. 25.1,*a*

Să se determine timpul de cădere, deplasarea relativă orizontală a corpului (distanța $B'B$), cunoscîndu-se înălțimea de cădere h a corpului (fig. 25.1, *a*).

Rezolvare. Asupra corpului în cădere liberă acționează doar greutatea lui $\bar{G} = m\bar{g}$. Pentru studiul mișcării relative se poate aplica ecuația (25.5):

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{F}_t + \bar{F}_c. \tag{1}$$

Vagonul avînd o mișcare de translație, $\bar{\omega} = 0$, și din (25.6) și (25.7) expresiile forțelor complementare sînt:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{a}_0 \quad \bar{F}_c = -m\bar{a}_c = 0. \tag{2}$$

Înlocuind în (1) rezultă:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} - m\bar{a}_0.$$

Simplificînd cu m, se obține:

$$\bar{a}_r = \bar{g} - \bar{a}_0. \tag{3}$$

Modulul accelerației relative este $|\bar{a}_r| = \sqrt{g^2 + a_0^2}$ și direcția accelerației relative este dată de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}$ (fig. 25.1, b), accelerația relativă fiind constantă ca direcție și modul. Proiectînd ecuația (3) pe axele din figura 25.1,a și ținînd seamă de (25.2) rezultă:

$$\ddot{x} = -a_0 \quad \ddot{y} = g.$$

Integrînd și ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ se obțin ecuațiile parametrice ale traiectoriei:

$$x = -\frac{1}{2} a_0 t^2 \qquad y = \frac{1}{2} g t^2 \tag{4}$$

și ecuația carteziană, dreapta OB:

$$\frac{x}{y} = -\frac{a_0}{g} \qquad \frac{x}{y} = -\operatorname{tg}\alpha, \tag{5}$$

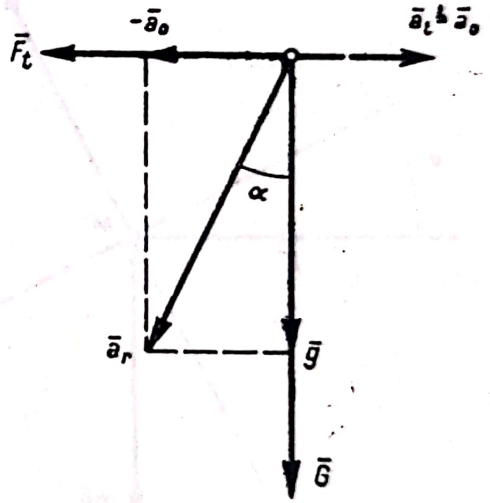


Fig. 25.1, b

înclinată sub unghiul α față de verticală.
Mișcarea relativă a punctului este rectilinie, uniform accelerată. Timpul de cădere este, din (4): $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, deoarece $y_B = h$ și deplasarea relativă orizontală față de vagon este:

$$BB' = -x_B = y_B \operatorname{tg}\alpha = h \operatorname{tg}\alpha = h\frac{a_0}{g}.$$

25.2. O pană plană netedă, de unghi α, are o mișcare de translație, pe un plan orizontal, cu accelerația constantă $\bar{a}_0$ (fig. 25.2, a). Pe pană se află sfera grea M, care se rostogolește fără frecare.

Știind că sfera nu are viteză relativă inițială, să se determine accelerația relativă, reacțiunea normală asupra sferei, accelerația absolută și traiectoria absolută. Discuție.

Rezolvare. Asupra punctului material M lucrează forţele $G = m\bar{g}$ şi $\bar{N}$ (fig. 25,2, *b*). Pana avînd o mişcare de translaţie, $\bar{\omega} = 0$, deci forţele complementare (25.6) şi (25.7) sînt:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{a}_0 \qquad \bar{F}_c = -m\bar{a}_c = 0, \tag{1}$$

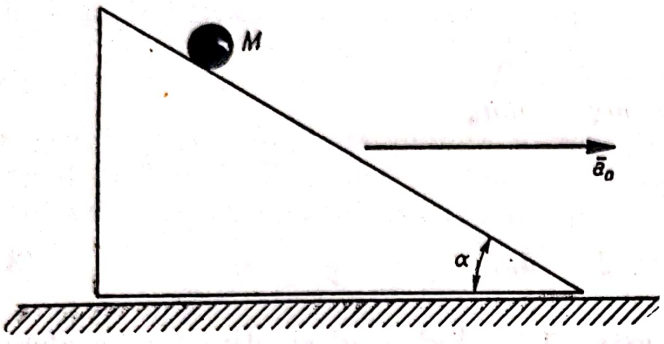


Fig. 25.2,*a*

deci ecuaţia fundamentală a dinamicii în mişcarea relativă (25.5) este:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} - m\bar{a}_0. \tag{2}$$

Proiectînd pe direcţia planului înclinat şi pe normala la plan rezultă:

$$m\bar{a}_r = mg \sin\alpha - ma_0 \cos\alpha,$$
$$0 = N - mg \cos\alpha - ma_0 \sin\alpha,$$

deci:

$$a_r = g \sin\alpha - a_0 \cos\alpha$$
$$N = m(g \cos\alpha + a_0 \sin\alpha). \tag{3}$$

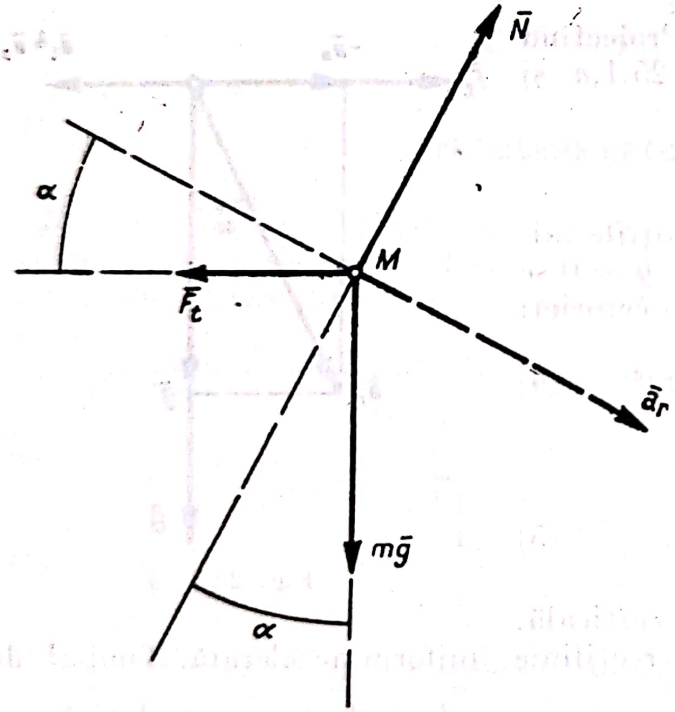


Fig. 25.2,*b*

Acceleraţia absolută (25.1) este:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = \bar{a}_r + \bar{a}_0, \tag{4}$$

deoarece $\bar{a}_t = \bar{a}_0$, $\bar{a}_c = 0$; ţinînd seamă de (3), modulul ei este:

$$a_a = \sqrt{a_0^2 + a_r^2 + 2a_0 a_r \cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{(a_0^2 + g^2)} \sin\alpha, \tag{5}$$

direcţia ei (fig. 25.2,*c*) fiind dată de:

$$\sin\beta = \frac{a_r}{a_a} \sin\alpha =$$
$$= \frac{g \sin\alpha - a_0 \cos\alpha}{\sqrt{a_0^2 + g^2}}. \tag{6}$$

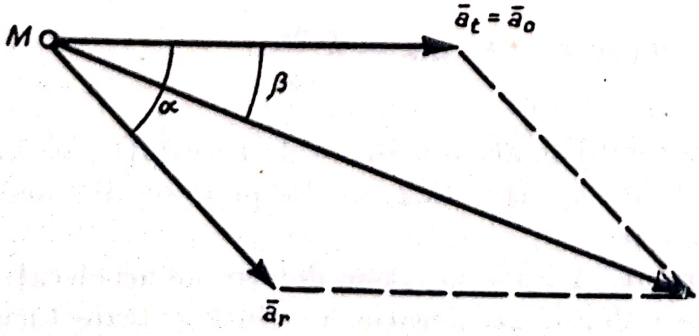


Fig. 25.2,*c*

Acceleraţia absolută este constantă în mărime şi direcţie. Traiectoria absolută a bilei M (avînd viteza iniţială nulă) este o dreaptă înclinată cu unghiul β faţă de orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

Discuție.

$$a_r = g \sin \alpha - a_0 \cos \alpha$$

1) $a_0 < g \operatorname{tg} \alpha$ $a_r > 0$ Bila coboară pe planul înclinat.

2) $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$ $a_r = 0$ Bila este în repaus relativ față de pană.

3) $a_0 > g \operatorname{tg} \alpha$ $a_r < 0$ Bila urcă pe planul înclinat.

25.3. Se consideră un sistem bielă-manivelă cu bare egale $O_1B = BC = r$, de culisa C, care descrie o dreaptă orizontală, fiind legat printr-un resort de constantă elastică k și lungime în stare neîntinsă l_0, un corp greu A de masă m care se poate mișca pe direcția orizontală O_1C (fig. 25.3,*a*). Să se studieze mișcarea relativă a greutății în raport cu culisa C și mișcarea ei

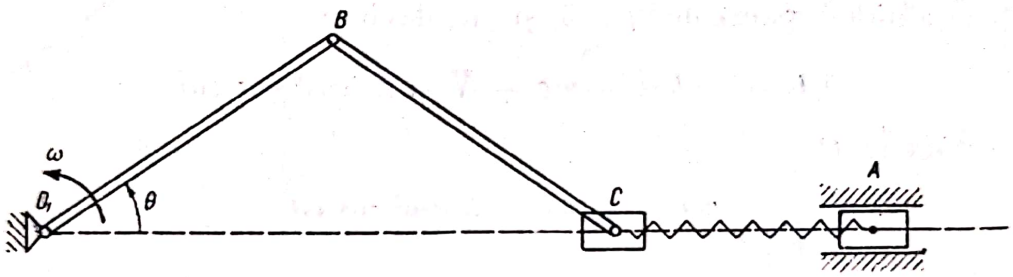


Fig. 25.3,*a*

absolută. Viteza unghiulară ω a barei O_1B este constantă, în momentul inițial alungirea resortului fiind nulă, $\theta = 0$ și corpul A fiind în repaus relativ.

Rezolvare. Se consideră două sisteme de referință, unul fix $O_1x_1y_1$ și unul mobil Oxy invariabil, legat de culisa C, $CO = l_0$, astfel încît abscisa x a culisei A reprezintă alungirea resortului (fig. 25.3, *b*).

Pentru studiul mișcării relative se folosește ecuația (25.5):

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \qquad (1)$$

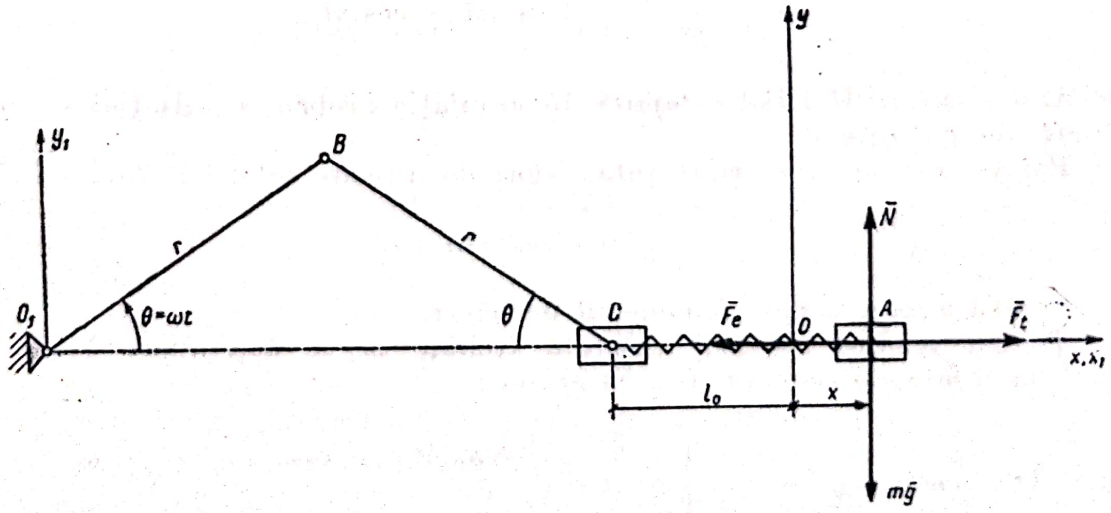


Fig. 25.3,*b*

în care:

$$\bar{F} = \bar{F}_e + m\bar{g} + \bar{N} \tag{2}$$

este rezultanta forțelor care acționează asupra culisei A (forța elastică a resortului $F_e = -kx\bar{i}$, greutatea $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$), forțele complementare (25.6) și (25.7) fiind:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{a}_0, \qquad \bar{F}_c = -m\bar{a}_c = 0, \tag{3}$$

deoarece sistemul mobil are o mișcare de translație. Vectorul de poziție al punctului O în raport cu sistemul fix fiind $\bar{r}_0 = (2r\cos\omega t + l_0)\bar{i}_1$:

$$\bar{a}_0 = \ddot{\bar{r}}_0 = -2r\omega^2\cos\omega t\bar{i}, \quad (\bar{i}_1 = \bar{i}) \tag{4}$$

ecuația (1), ținînd seamă de (2), (3) și (4), devine:

$$m\bar{a}_r = -kx\bar{i} + m\bar{g} + \bar{N} + 2mr\omega^2\cos\omega t\bar{i} \tag{5}$$

și proiectată pe Ox:

$$m\ddot{x} = -kx + 2mr\omega^2\cos\omega t$$

sau:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = p\cos\omega t, \tag{6}$$

unde:

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad p = 2r\omega^2.$$

Condițiile inițiale fiind $t = 0$, $x = 0$ (alungire nulă), $\dot{x} = 0$ (repaus relativ), integrala generală (23.20) a ecuației (6) care este de tipul (23.18) este:

$$x = \frac{2r\omega^2}{\nu^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\nu t), \tag{7}$$

oscilația greutății A fiind compusă din oscilația proprie a pulsației ν și cea forțată de pulsație ω.

Pentru $\nu = \omega$ apare rezonanța, legea de mișcare relativă (23.22) fiind:

$$x = r\omega t\sin\omega t. \tag{8}$$

Pentru $\nu \approx \omega$ apare fenomenul de bătăi.

Pentru studiul mișcării absolute trebuie să se determine abscisa x_1 a culisei A față de sistemul fix. Se obține:

$$x_1 = (2r\cos\omega t + l_0) + x = \begin{cases} \dfrac{2r}{\nu^2 - \omega^2}(\nu^2\cos\omega t - \omega^2\cos\nu t) + l_0 & (\nu \neq \omega) \\ 2r\cos\omega t + l_0 + r\omega t\sin\omega t & (\nu = \omega). \end{cases} \tag{9}$$

25.4. Un pendul matematic A, de masă m și lungime l, oscilează în jurul punctului O situat pe o scîndură care se deplasează cu accelerația constantă $\bar{a}_0$ (fig. 25.4,*a*). Să se determine perioada micilor oscilații ale pendulului. Caz particular $\bar{a}_0$ dirijat pe verticală în jos (discuție).

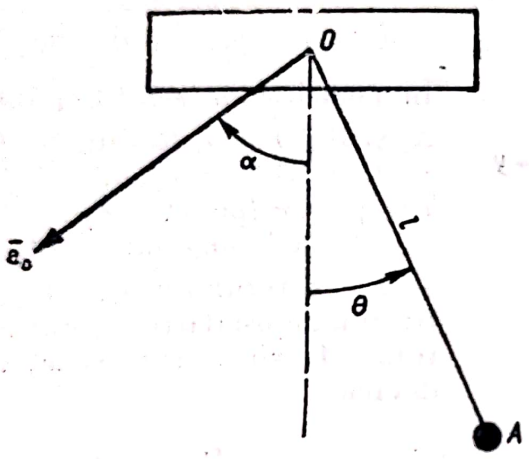


Fig. 25.4, *a*

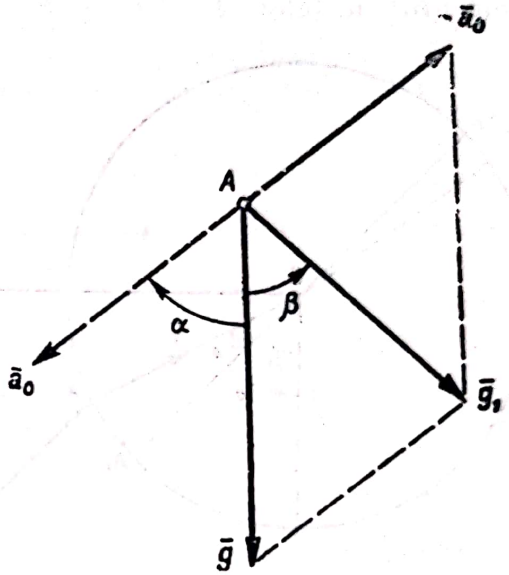


Fig. 25.4, *b*

Rezolvare. Asupra pendulului A acționează greutatea lui $m\bar{g}$ și tensiunea $\bar{N}$ a firului:

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}. \tag{1}$$

Scîndura avînd o mișcare de translație, $\bar{\omega} = 0$, deci forțele complementare sînt:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{a}_0 \qquad \bar{F}_c = -m\bar{a}_c = 0; \tag{2}$$

deci, ținînd seamă de (1) și (2), ecuația fundamentală a dinamicii (25.5) are expresia:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} - m\bar{a}_0 = m\bar{g}_1 + \bar{N}, \tag{3}$$

unde s-a notat:

$$\bar{g}_1 = \bar{g} - \bar{a}_0.$$

Din figura 25.4,*b* rezultă modulul și direcția accelerației g_1:

$$g_1 = \sqrt{g^2 + a_0^2 - 2ga_0\cos\alpha} \qquad \sin\beta = \frac{a_0\sin\alpha}{g_1} = \frac{a_0\sin\alpha}{\sqrt{g^2 + a_0^2 - 2ga_0\cos\alpha}}. \tag{4}$$

Pentru studiul mișcării se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa Oz (fig. 25.4,c) care elimină tensiunea $\bar{N}$ din fir. Momentul cinetic relativ față de axa Oz în coordonate polare (24.12) este:

$$K_{rz} = mr^2\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta};$$

momentul forțelor $\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c = m\bar{g}_1 + \bar{N}$ față de Oz este

$$-mg_1 l \sin(\theta - \beta),$$

deci ecuația (25.9) față de Oz este:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg_1 l \sin(\theta - \beta). \quad (5)$$

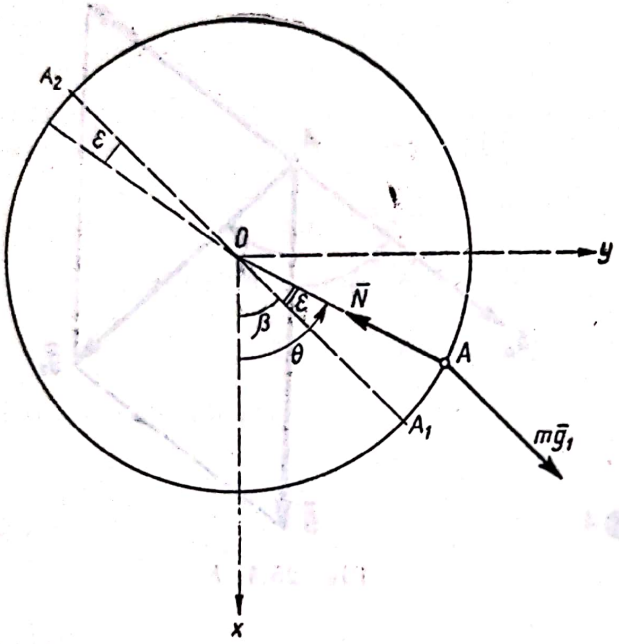


Fig. 25.4,c

În pozițiile de echilibru relativ A_1 și A_2, $\ddot{\theta} = 0$, deci $\sin(\theta - \beta) = 0$, adică $\theta = \beta$ (punctul A_1) și $\theta = \beta + \pi$ (punctul A_2).

Notînd unghiul AOA_1 $\theta - \beta = \varepsilon$, rezultă $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$, iar pentru micile oscilații în jurul punctului A_1 $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, ecuația (5) devine:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g_1}{l}\varepsilon = 0. \quad (6)$$

Integrala generală a ecuației (6) este:

$$\varepsilon = A\cos\left(\sqrt{\frac{g_1}{l}}\,t - \varphi\right),$$

perioada micilor oscilații fiind:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^2 + a_0^2 - 2ga_0\cos\alpha}}. \quad (7)$$

În jurul punctului A_2 nu au loc mici oscilații, deoarece notînd unghiul A_2OA, $\theta - (\beta + \pi) = \varepsilon$ pentru mici oscilații, $\sin(\theta - \beta) = -\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, ecuația (5) devine $\ddot{\varepsilon} - \frac{g_1}{l}\varepsilon = 0$, și integrala ei generală:

$$\varepsilon = C_1 e^{\sqrt{g_1/l}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{g_1/l}\,t}$$

arată că pentru niște condiții inițiale oarecare pendulul se îndepărtează de poziția de echilibru A_2. Perioada micilor oscilații (7) se putea deduce printr-o analogie între problema noastră și problema pendulului matematic cu punct de suspensie fix.

În cazul particular, $\alpha = 0$, $g_1 = \sqrt{g^2 + a_0^2 - 2ga_0} = |g - a_0|$, $\sin\beta = 0$, deci:

pentru $g > a_0$, $\beta = 0$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a_0}}$, pendulul oscilează în jurul poziției de echilibru inferioare;

pentru $g < a_0$, $\beta = \pi$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_0 - g}}$, pendulul oscilează în jurul poziției de echilibru superioare.

În sfîrșit, pentru $g = a_0$, $g_1 = 0$ și ecuația (5) devine $\ddot{\theta} = 0$, pendulul fiind în repaus relativ sau avînd o mișcare circulară uniformă ($\dot{\theta} = \text{const.}$).

25.5. Un pendul matematic oscilează în jurul punctului O (fig. 25.5, a). Punctul O la rîndul său oscilează pe orizontală, în jurul unui punct fix O_1: $O_1O = y_0 = a \sin \omega t$.

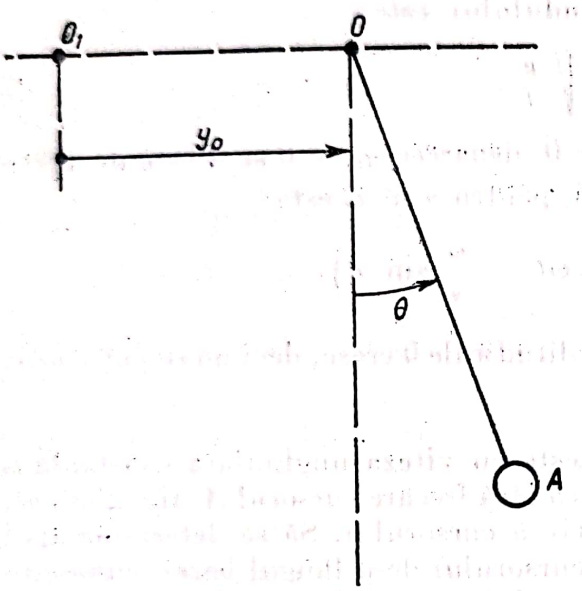


Fig. 25.5,a

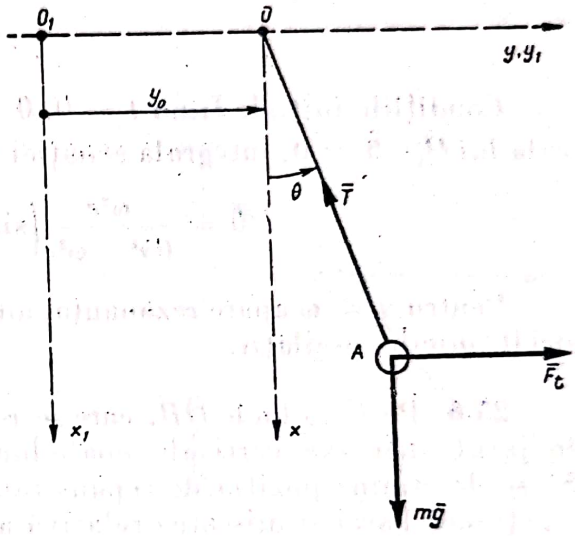


Fig. 25.5,b

Cunoscînd lungimea pendulului l, să se studieze micile oscilații în jurul lui O. În momentul inițial ($t = 0$), pendulul A se găsește pe verticala punctului O_1 și are viteza relativă nulă.

Rezolvare. Asupra pendulului A acționează forțele $m\bar{g}$ și $\bar{T}$ (fig.25.5,b):

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{T}, \tag{1}$$

forțele complementare (25.6), (25.7) fiind:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\ddot{\bar{r}}_0 = m\omega^2 a \sin \omega t \vec{j} \quad \bar{F}_c = 0, \tag{2}$$

deoarece $\bar{\omega} = 0$, iar $\bar{r}_0 = a \sin \omega t \vec{j}_1$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$.

Pentru a elimina tensiunea $\bar{T}$ se aplică teorema momentului cinetic (25.9):

$$\frac{\partial \bar{K}_r}{\partial t} = \bar{r} \times (\bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c)$$

în raport cu axa Oz.

Față de axa Oz, momentul cinetic relativ, exprimat în coordonate polare (24.12), este $K_{rz} = mr^2\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$, momentul greutății $m\bar{g}$ este $-mgl \sin\theta$ și momentul forței de transport $\bar{F}_t$, $F_t l \cos\alpha = m\omega^2 la \sin\omega t \cos\alpha$; deci:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin\theta + m\omega^2 l a \sin\omega t \cos\alpha. \qquad (3)$$

În cazul micilor oscilații, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ și (3) devine:

$$\ddot{\theta} + \nu^2\theta = \frac{\omega^2 a}{l} \sin\omega t, \qquad (4)$$

unde pulsația oscilației proprii a pendulului este:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (5)$$

Condițiile inițiale fiind $t = 0$, $\theta = 0$ (deoarece $y_0 = 0$ și A este pe verticala lui O_1), $\dot{\theta} = 0$, integrala ecuației (4) pentru $\nu \neq \omega$ este:

$$\theta = \frac{\omega^2 a}{l(\nu^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\nu}\sin\nu t\right).$$

Pentru $\nu = \omega$ apare rezonanța, amplitudinile θ cresc, deci nu se pot studia decît micile oscilații.

25.6. Pe bara lucie OB, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe verticale, poate luneca fără frecare cursorul A (fig. 25.6, *a*). Să se determine poziția de repaus relativ a cursorului. Să se determine apoi reacțiunea barei și mișcarea relativă a cursorului de-a lungul barei, cunoscîndu-i-se poziția inițială $OA = a$ și viteza sa inițială relativă v_0. Caz particular: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (bara este orizontală), $v_0 = \omega a$. Pentru acest caz se vor determina și traiectoria, viteza și accelerația absolută.

Rezolvare. Asupra cursorului acționează greutatea $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$ situată în planul yOz normal la bară:

$$\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}, \qquad (1)$$

forțele complementare (25.6) și (25.7) fiind:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = -m\begin{vmatrix} \bar{i} & j & \bar{k} \\ \omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha \\ 0 & \omega x\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m\omega^2 x \sin^2\alpha\,\bar{i} - m\omega^2 x \sin\alpha\cos\alpha\,\bar{k} \qquad (2)$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2m\bar{\omega}\times\bar{v}_r = -2m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega\cos\alpha & 0 & \omega\sin\alpha \\ \dot{x} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2m\omega\dot{x}\sin\alpha\,\bar{j}, \qquad (3)$$

deoarece $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$, iar $\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega \cos\alpha & 0 & \omega \sin\alpha \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \omega\, x \sin\alpha\, \bar{j}. \qquad (3)$$

Axele de coordonate s-au ales ca în figura 25.6,*a*, Ox în lungul barei, Oz normala pe bară din planul vertical, plan determinat de bară, și axa verticală, Oy este orizontală (nu s-a figurat pe desen). Forța complementară de transport este orizontală (normală pe axa de rotație), mărimea ei fiind $F_t = m\omega^2 x \sin\alpha = m\omega^2 r$.

În cazul repausului relativ, conform (25.13) rezultă:

$$\bar{F} + \bar{F}_t = 0 \qquad (4)$$

și proiectînd pe axele de coordonate:

$$-mg\cos\alpha + m\omega^2 x \sin^2\alpha = 0,$$
$$N_y = 0,$$
$$N_z - mg\sin\alpha - m\omega^2 x \sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

de unde:

$$x = x_0 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}, \quad N_y = 0,$$

$$N = N_z = \frac{mg}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

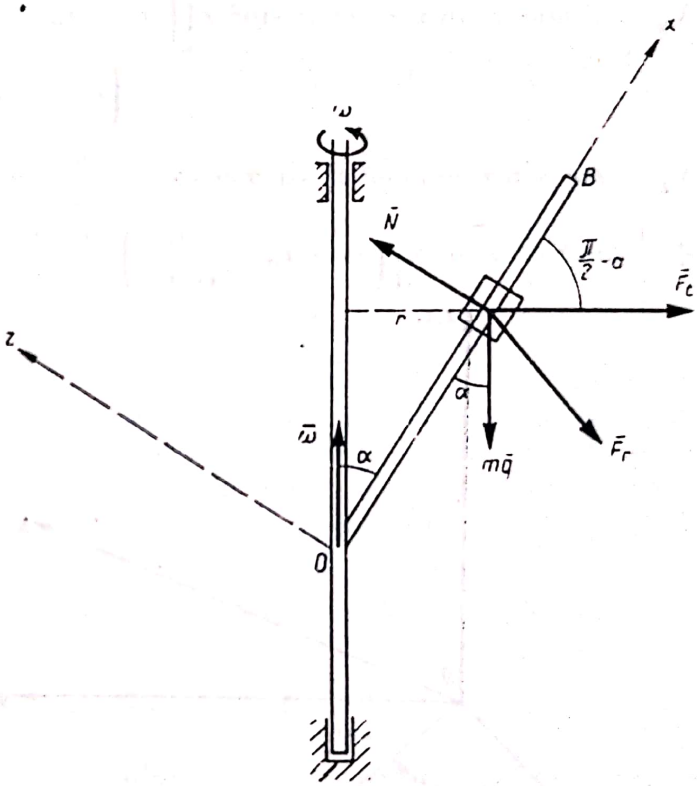


Fig. 25.6,*a*

Pentru studiul mișcării se folosește ecuația (25.5):

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c \qquad (6)$$

și proiectînd-o pe axele de coordonate se obține:

$$m\ddot{x} = -mg\cos\alpha + m\omega^2 x \sin^2\alpha, \quad N_y - 2m\omega\dot{x}\sin\alpha = 0;$$

$$N_z - mg\sin\alpha - m\omega^2 x \sin\alpha\cos\alpha = 0. \qquad (7)$$

Prima ecuație (7):

$$\ddot{x} - (\omega\sin\alpha)^2 x = -g\cos\alpha$$

este ecuația de mișcare. Integrala ei generală $x = C_1 e^{\omega t \sin\alpha} + C_2 e^{-\omega t \sin\alpha} + \frac{g \cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$ devine, ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = v_0$:

$$x = \frac{1}{2}\left(a - x_0 + \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{\omega t \sin\alpha} + \frac{1}{2}\left(a - x_0 - \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{-\omega t \sin\alpha} + x_0, \quad (8)$$

unde $x_0 = \frac{g \cos\alpha}{\omega^2 \sin^2\alpha}$.

Componentele reacțiunii normale sînt:

$$N_y = 2 m\omega x \sin\alpha = m\omega^2 \sin^2\alpha \left[\left(a - x_0 + \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{\omega t \sin\alpha} - \left(a - x_0 - \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{-\omega t \sin\alpha}\right] \quad (9)$$

$$N_z = mg \sin\alpha + m\omega^2 x \sin\alpha \cos\alpha = \frac{mg}{\sin\alpha} + \frac{1}{2} m\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \left[\left(a - x_0 + \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{\omega t \sin\alpha} + \left(a - x_0 - \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right) e^{-\omega t \sin\alpha}\right].$$

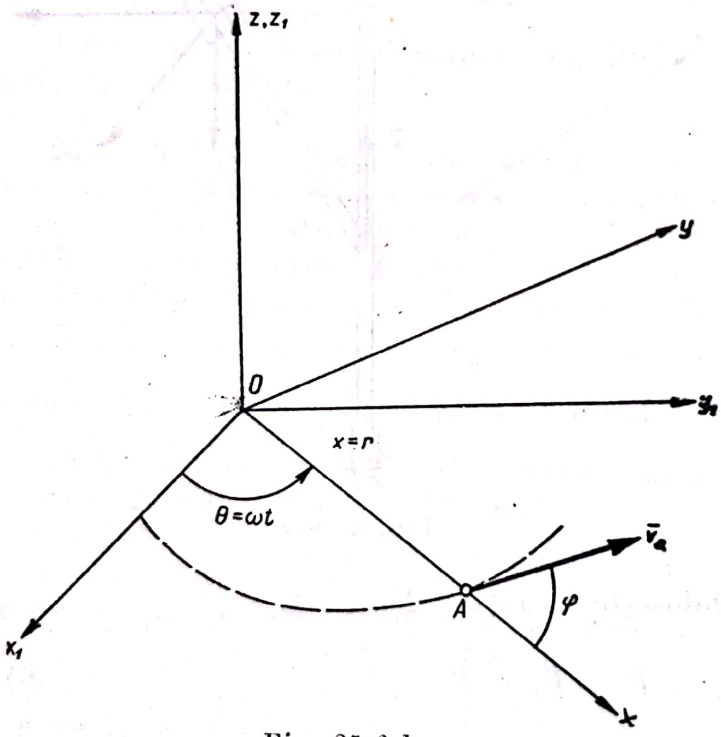


Fig. 25.6,*b*

Pentru cazul particular examinat, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $v_0 = \omega a$, poziția de echilibru relativ (5) este pe axa de rotație $x_0 = 0$, și ecuațiile (8) și (9) devin:

$$x = a e^{\omega t} \quad (8')$$

$$N_y = 2 m\omega^2 a e^{\omega t} \quad N_z = mg \quad (9')$$

(axa Oz este verticală, iar Oy este orizontala normală pe bară).

Traiectoria absolută este o curbă situată în planul x_1Oy_1 (fig. 25.6,*b*), ale cărei ecuații în coordonate polare sînt:

$$x = r = a e^{\omega t} \qquad \theta = \omega t,$$

deci:

$$r = a e^{\theta},$$

traiectoria fiind o spirală logaritmică.

Din relațiile (25.1), (25.2), (25.3) și (25.4) se determină viteza și accelerația absolută:

$$\bar{v}_r = \dot{x}\,\bar{i} = \omega a e^{\omega t}\,\bar{i}$$

$$\bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ ae^{\omega t} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega a e^{\omega t}\,\bar{j}$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t = \omega\, a\, e^{\omega t}(\bar{i} + \bar{j}),\ |\bar{v}_a| = \sqrt{2}\,\omega a e^{\omega t},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_t}{v_r} = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} = \text{const.}$$

Se regăsește o proprietate cunoscută, tangenta și raza vectoare a spiralei logaritmice formînd un unghi constant:

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} = \omega^2 a e^{\omega t}\bar{i}$$

$$\bar{a}_t = \omega \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega a e^{\omega t} & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 a e^{\omega t}\bar{i}$$

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega a e^{\omega t} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega^2 a e^{\omega t}\bar{j}$$

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c = 2\omega^2 a e^{\omega t}\bar{j}.$$

25.7. Un punct material greu A, de masă m, este obligat să se miște între două plane verticale lucii, foarte apropiate, care se rotesc cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul axei verticale Oz. Să se studieze mișcarea punctului și să se determine reacțiunea planelor dacă viteza inițială relativă este nulă.

Rezolvare. Ecuația fundamentală a dinamicii în mișcarea relativă (25.5) este:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \tag{1}$$

unde greutatea $m\bar{g}$ și reacțiunea $\bar{N}$ a planelor sînt forțele care acționează asupra punctului, forțele complementare (25.6) și (25.7) fiind:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega x & 0 \end{vmatrix} = m\omega^2 x\bar{i} \tag{2}$$

$$\bar{F}_c = -m\bar{a}_c = -2\,m\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = -2\,m\omega x\bar{j} \tag{3}$$

deoarece $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$, iar $\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & 0 & z \end{vmatrix} = \omega\, x\bar{j}.$

Ca și în problema precedentă, deoarece $\overline{\omega} = \text{const.}$, forța complementară de transport este normală pe axa de rotație și are mărimea $F_t = m\omega^2 r$ (r — distanța de la punctul A pînă la axa de rotație). Ea este cunoscută și sub numele de forță centrifugă.

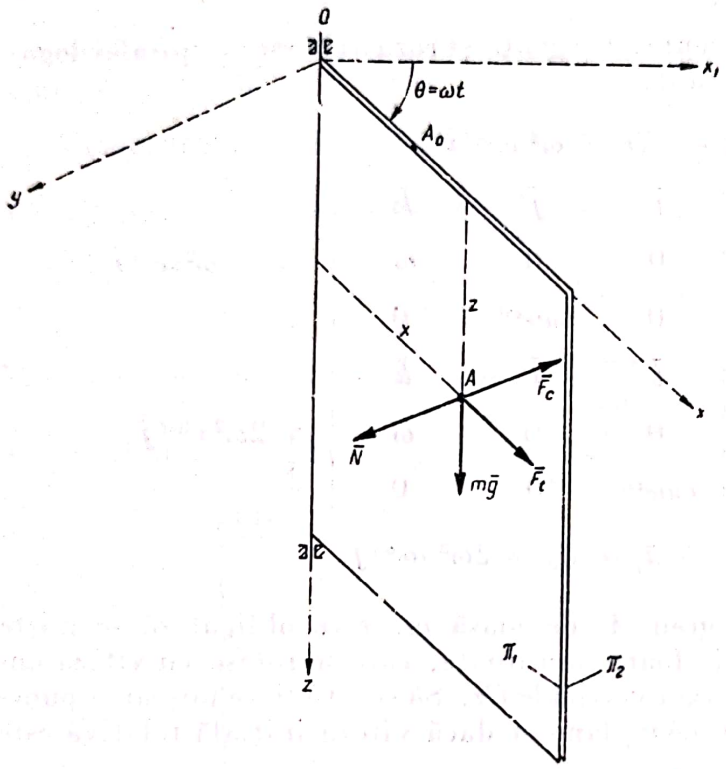


Fig. 25.7

Proiectînd ecuația (1) pe axele din figura 25.7 și ținînd seamă de (2) și (3) rezultă:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x$$
$$O = N - 2m\omega\dot{x}$$
$$m\ddot{z} = mg. \qquad (4)$$

Integrînd prima și ultima ecuație (4) și ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $x = x_0, z = 0, \dot{x} = 0, \dot{z} = 0$ (nu se particularizează prin nimic problema alegînd originea O, astfel ca axa Ox să treacă prin poziția inițială A_0), rezultă ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \operatorname{ch} \omega t \qquad z = \frac{1}{2} g t^2, \qquad (5)$$

traiectoria relativă fiind:

$$x = x_0 \operatorname{ch}\left(\omega \sqrt{\frac{2z}{g}}\right).$$

Reacțiunea normală $\overline{N}$ rezultă din a doua ecuație (4):

$$\overline{N} = 2m\omega\dot{x} = 2m\omega^2 x_0 \operatorname{sh} \omega t, \qquad (6)$$

punctul A apăsînd pe planul π_2.

25.8. Un punct material A, de masă m, se mișcă pe un plan orizontal, care se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe fixe verticale, care trece prin punctul O al planului orizontal. Punctul material A este atras spre punctul O de o forță elastică $\overline{F}_e = -m\omega^2 \overline{r}$, unde $\overline{r} = \overline{OA}$. Să se determine mișcarea relativă a punctului material, cunoscîndu-se viteza lui inițială relativă v_0.

Rezolvare. Asupra punctului A acționează forțele $\bar{F}_e$, $m\bar{g}$ și $\bar{N}$, deci ecuația (25.5) este:

$$m\bar{a}_r = -m\omega^2\bar{r} + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_t + \bar{F}_c, \tag{1}$$

unde forțele complementare (25.6) și (25.7), ținînd seamă de faptul că $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$ și că $\bar{r} \perp \bar{\omega}$ (fig. 25.8), sînt:

$$\bar{F}_t = -m\bar{a}_t = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -m\,[\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\cdot\bar{r}) - \bar{r}\,\omega^2] = m\omega^2\bar{r} \tag{2}$$

$$F_c = -m\bar{a}_c = -2\,m\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,m\omega\dot{y}\bar{i} - 2\,m\omega\dot{x}\bar{j}. \tag{3}$$

Făcînd înlocuirile, ecuația (1) devine:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + 2\,m\omega\dot{y}\bar{i} - 2\,m\omega\dot{x}\bar{j}. \tag{4}$$

Proiectînd această ecuație pe axele mobile Ox și Oy se obține:

$$\ddot{x} = 2\,\omega\dot{y} \qquad \ddot{y} = -2\,\omega\dot{x}. \tag{5}$$

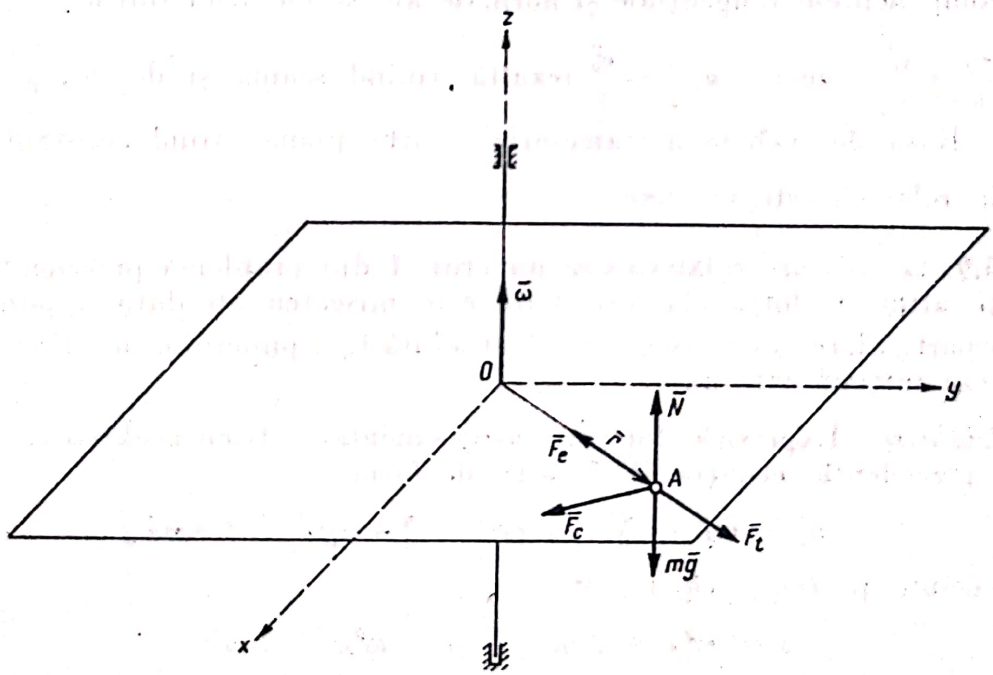


Fig. 25.8

Integrala generală a acestui sistem:

$$x = A\cos(-2\,\omega t - \varphi) + B \qquad y = A\sin(-2\,\omega t - \varphi) + C \tag{6}$$

se poate obține eliminînd, de exemplu, pe $\ddot{y}$ între prima ecuație (5) derivată în raport cu timpul și a doua ecuație (5) $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\,\omega^2\frac{dx}{dt} = 0$ și apoi substituind pe x în prima ecuație (5).

Scanned with OKEN Scanner

Traiectoria este cercul de rază A, $(x - B)^2 + (y - C)^2 = A^2$, cercul fiind parcurs uniform cu viteza relativă $v_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\ \omega\ A = v_0$ și deci cu viteza unghiulară $\frac{v_0}{A} = 2\ \omega$, în sensul acelor de ceasornic. Raza cercului $A = \frac{v_0}{2\omega}$.

Acest rezultat poate fi stabilit și prin aplicarea teoremei energiei cinetice (25.10):

$$d\,E_r = (\bar{F}_e + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_l)\,\partial\bar{r} = 0, \tag{7}$$

deoarece $m\bar{g}$ și $\bar{N}$ sînt normale pe deplasarea relativă și $\bar{F}_e + \bar{F}_l = 0$. Rezultă $E_r = \frac{1}{2}\,m\,v_r^2 = \text{const.}$, $v_r = v_0 = \text{const.}$, mișcarea fiind uniformă. Din ecuațiile (5) rezultă accelerația relativă a punctului:

$$|\,a_r\,| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\ \omega \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\ \omega\, v_0. \tag{8}$$

Cum componentele tangențiale și normale ale accelerației sînt $a_{r\tau} = \dot{v}_r = 0$, $a_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_0^2}{\rho}$, deci $|\,a_r\,| = \frac{v_0^2}{\rho}$ rezultă, ținînd seamă și de (8), $\rho = \frac{v_0^2}{a_r} = \frac{v_0}{2\omega}$. Raza de curbură a traiectoriei (curbă plană) fiind constantă, traiectoria relativă este un cerc.

25.9. Ce mișcare relativă are punctul A din problema precedentă dacă nu este atras de forța elastică? Care este mișcarea absolută a punctului? Cazuri particulare: *a)* viteza inițială absolută $\bar{v}_0$ a punctului are direcția $\overline{OA}$; *b)* viteza inițială este nulă.

Rezolvare. Expresiile forțelor complementare, fiind aceleași ca în problema precedentă, ecuația (25.5) este de forma:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + m\omega^2\bar{r} + 2\,m\omega\dot{y}\,\bar{i} - 2\,m\omega\dot{x}\,\bar{j} \tag{1}$$

și proiectată pe Ox și Oy rezultă:

$$\ddot{x} = \omega^2 x + 2\,\omega\dot{y} \qquad \ddot{y} = \omega^2 y - 2\,\omega\dot{x}. \tag{2}$$

Integrala generală a acestui sistem:

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)\cos\omega t + (C_3 + C_4 t)\sin\omega t \\ y &= (C_3 + C_4 t)\cos\omega t - (C_1 + C_2 t)\sin\omega t \end{aligned} \tag{3}$$

se poate obține eliminînd pe y între ecuațiile (2), integrînd ecuația $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\,\omega^2\,\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^4 x = 0$, astfel obținută, și apoi determinînd pe y din prima ecuație (2).

Fără să se particularizeze problema, se pot alege drept condiții inițiale:

$$t = 0,\ x = x_0,\ y = 0,\ \dot{x} = v_0 \cos\alpha,\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha - \omega x_0$$

(axa Ox trece prin poziția inițială, α este unghiul dintre $\overline{OA_0}$ și $\bar{v}_0$ și $\bar{v}_{ro} = \bar{v}_{ao} - \bar{v}_{to} = \bar{v}_0 - \omega x_0 \bar{j}$, fig. 25.9).

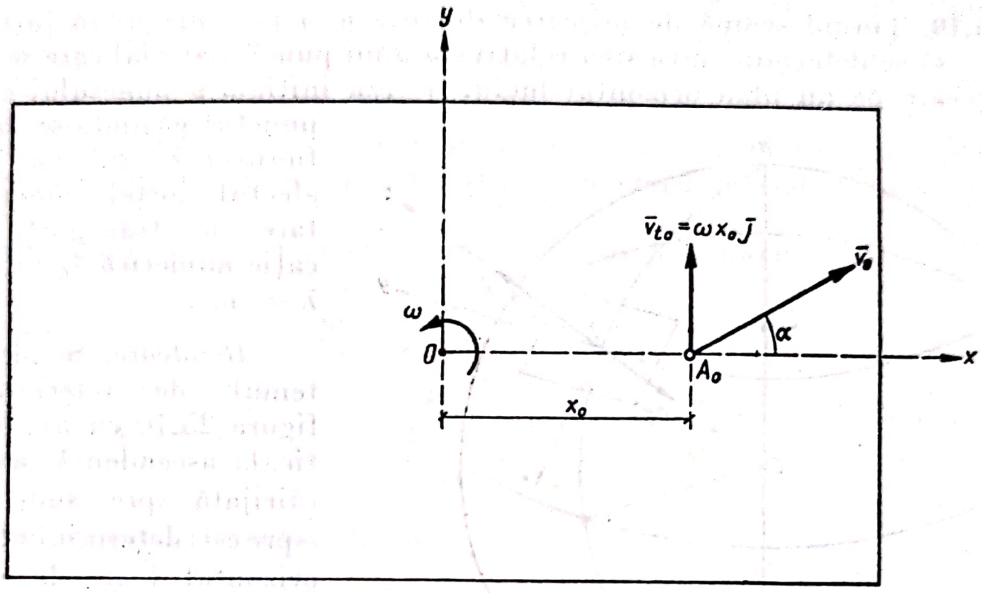


Fig. 25.9

Rezultă $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0 \cos\alpha$, $C_3 = 0$, $C_4 = v_0 \sin\alpha$ și făcînd înlocuirile în (3) se obțin ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = v_0\, t \cos(\omega t - \alpha) + x_0 \cos\omega t,\ y = -v_0\, t \sin(\omega t - \alpha) - x_0 \sin\omega t. \quad (4)$$

În cazul particular *a)* $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$,

$$x = (x_0 \pm v_0 t)\cos\omega t \qquad y = -(x_0 \pm v_0 t)\sin\omega t, \quad (5)$$

traiectoria fiind o spirală a lui Arhimede a cărei ecuație în coordonate polare este $r = |x_0 \pm v_0 t|$ $\theta = -\omega t$.

Pasul spiralei este constant și egal cu $\frac{2\pi v_0}{\omega}$.

În cazul *b)* $\bar{v}_0 = 0$ ecuațiile (4) devin:

$$x = x_0 \cos\omega t \qquad y = -x_0 \sin\omega t, \quad (6)$$

traiectoria fiind cercul $x^2 + y^2 = x_0^2$ cu centrul în O și avînd raza x_0. Mișcarea este uniformă și se face cu viteza unghiulară ω în sens invers sensului de rotire a planului.

Pentru studiul mișcării absolute este mai simplu să se folosească ecuația fundamentală a dinamicii (24.1):

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}. \quad (7)$$

Cum greutatea și reacțiunea sînt normale pe plan rezultă $\bar{a} = 0$, deci punctul are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $\bar{v} = \bar{v}_0$. Rezultatele din cazurile particulare sînt explicabile. Pentru $\alpha = 0$, traiectoria este o spirală cu pas constant, și pentru $\bar{v}_0 = 0$, punctul stă pe loc, deci în raport cu planul va descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație.

25.10. Ținînd seamă de mișcarea de rotație a pămîntului în jurul axei polilor, să se determine mișcarea relativă a unui punct material care se mișcă fără frecare pe un plan orizontal luciu. Viteza inițială a punctului este $\bar{v}_0$, punctul găsindu-se la latitudinea λ. Se va neglija efectul forței complementare de transport. Aplicație numerică $\bar{v}_0 = 2$ m/s, $\lambda = 45°$.

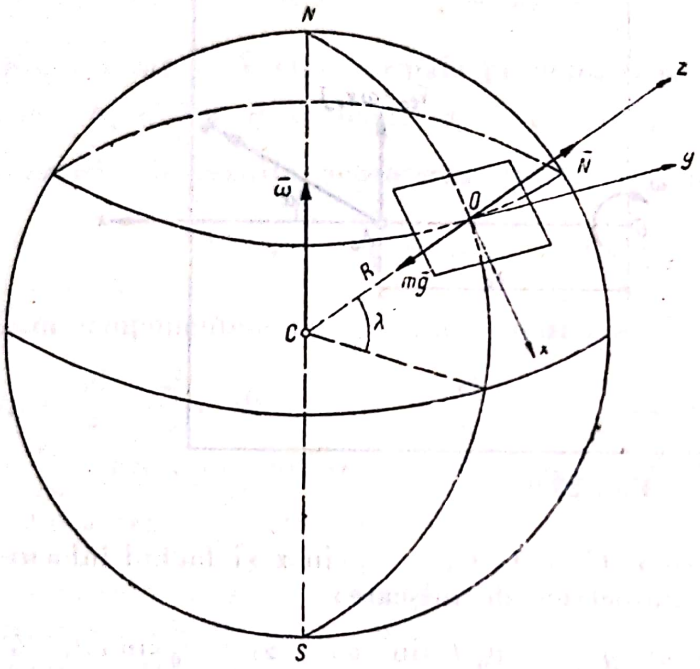


Fig. 25.10

Rezolvare. Se alege sistemul de referință din figura 25.10 cu axa Oz verticala ascendentă, axele Ox (dirijată spre sud) și Oy (spre est) determinînd planul orizontal luciu în care se mișcă punctul. Forța care acționează asupra punctului este $\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}$, $\bar{N}$ (reacțiunea normală a planului). Forțele complementare (25.6) și (25.7) sînt $\bar{F}_t \approx 0$ și

$$F_c = 2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2m\omega\dot{y}\sin\lambda\,\bar{i} - 2m\omega\dot{x}\sin\lambda\,\bar{j} + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda\,\bar{k}. \qquad (1)$$

Pentru a elimina reacțiunea normală se proiectează ecuația (25.5):

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_c \qquad (2)$$

pe axele Ox și Oy. Ținînd seamă și de (1) și simplificînd cu masa m se obține sistemul:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\lambda \qquad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda, \qquad (3)$$

analog cu sistemul (5) din problema 25.8. Integrala generală a sistemului este:

$$x = \rho\cos(-2\omega t\sin\lambda - \varphi) + x_0 \qquad y = \rho\sin(-2\omega t\sin\lambda - \varphi) + y_0,$$

traiectoria relativă a punctului fiind un cerc cu centrul în punctul de coordonate x_0, y_0, avînd raza:

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega \sin \lambda}.$$

Cercul este parcurs uniform cu viteza $v_r = v_0$, viteza unghiulară fiind:

$$\frac{v_0}{\rho} = |2 \sin \lambda|.$$

În emisfera nordică cercul este parcurs în sensul acelor de ceasornic (devierea spre dreapta din cauza forței Coriolis), și în emisfera sudică în sens trigonometric.

Pentru aplicația numerică viteza unghiulară a pămîntului

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3\,600} [\text{rad/s}];$$

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega \sin \lambda} = \frac{2}{2 \times \frac{2\pi}{24 \times 3\,600} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 19\,450 \text{ m} = 19{,}45 \text{ km},$$

perioada mișcării circulare fiind:

$$T = \frac{2\pi}{2\omega \sin \lambda} = \frac{2\pi}{2 \times \frac{2\pi}{24 \times 3\,600} \sin \lambda} \quad s = \frac{24}{2 \sin \lambda} \text{h} = \frac{24}{\sqrt{2}} h \approx 17 \text{ h}.$$

25.11. Să se studieze mișcarea unui punct greu care cade liber de la înălțimea h. Se va neglija efectul forței complementare de transport. Aplicație numerică $h = 490$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $\lambda = 45°$.

Rezolvare. Forța care acționează asupra punctului este greutatea $m\bar{g}$, $\bar{F}_t \approx 0$, forța complementară de transport (25.7) fiind:

$$\bar{F}_c = -2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$$

$$= 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \bar{i} - 2m\omega (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \bar{j} + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda \bar{k}. \quad (1)$$

Alegînd același sistem de referință ca în problema precedentă (fig. 25.10) și proiectînd ecuația fundamentală a dinamicii (25.5):

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{F}_c$$

pe aceste axe se obține sistemul de ecuații diferențiale liniare:

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \qquad m\ddot{y} = -2m\omega (\dot{z} \cos \lambda + \dot{x} \sin \lambda)$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x} \cos \lambda. \quad (2)$$

Derivînd a doua ecuație (2) și substituind derivatele $\ddot{x}$ și $\ddot{z}$ din celelalte două ecuații se obține ecuația $\ddot{y} + 4\omega^2\dot{y} = 2\omega g \cos\lambda$, a cărei integrală generală este:

$$y = C_1 \cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t + C_3 + \frac{g\cos\lambda}{2\omega} t. \tag{3'}$$

Făcînd substituțiile în celelalte două ecuații (2) rezultă:

$$x = \frac{gt^2}{2}\sin\lambda\cos\lambda + C_1 \sin\lambda \sin 2\omega t - C_2 \sin\lambda \cos 2\omega t + C_4 t + C_5$$

$$z = -\frac{gt^2}{2}\sin^2\lambda + C_1 \cos\lambda \sin 2\omega t - C_2 \cos\lambda \cos 2\omega t - C_4\, t\, \mathrm{tg}\,\lambda + C_6. \tag{3''}$$

Punînd condițiile inițiale:

$$t = 0,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = h,\quad \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0 \tag{4}$$

în ecuațiile (3') și (3'') se obțin ecuațiile de mișcare:

$$x = \frac{gt^2}{2}\sin\lambda\cos\lambda - \frac{g\cos\lambda\sin\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t);$$

$$y = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t);\quad z = h - \frac{gt^2}{2}\sin^2\lambda - \frac{g\cos^2\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t). \tag{5}$$

Cum viteza unghiulară de rotație a pămîntului $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3\,600}$ [rad/s] = $= 0{,}0000727\mathrm{s}^{-1}$ este mică pentru o înălțime de cădere nu prea mare, se pot dezvolta în serie factorii care conțin pe $\sin 2\omega t$ și $\cos 2\omega t$ și se pot neglija termenii de grad superior lui trei. Ecuațiile (5) devin:

$$x = 0 \qquad y = \frac{g\omega\cos\lambda}{3}t^3 \qquad z = h - \frac{gt^2}{2}, \tag{6}$$

relații care se puteau obține direct presupunînd de la început că viteza este orientată pe verticală ($\dot{x} = \dot{y} = 0$). Din ecuațiile (6) rezultă că, în cădere, corpul deviază spre răsărit, pe sol $\left(z = 0,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$ deviația fiind:

$$y_{(z=0)} = \frac{2h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\omega\cos\lambda.$$

Deviația este maximă la ecuator. Pentru aplicația numerică deviația este:

$$y_{(z=0)} = \frac{2 \times 490}{3} \times \sqrt{\frac{2 \times 490}{9{,}8}} \times 0{,}0000727 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{m} = 0{,}168\,\mathrm{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

25.12. Într-un plan orizontal care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unui punct fix O se găsește un tub luciu. În interiorul tubului se găsește o sferă A de masă m. Știind că în momentul inițial sfera se găsea în $A_0(OA_0 = r_0)$ și avea viteza relativă v_0, tangentă la tub, să se determine viteza relativă v_r pentru o poziție oarecare $OA = r$ a sferei (fig. 25.12, *a*).

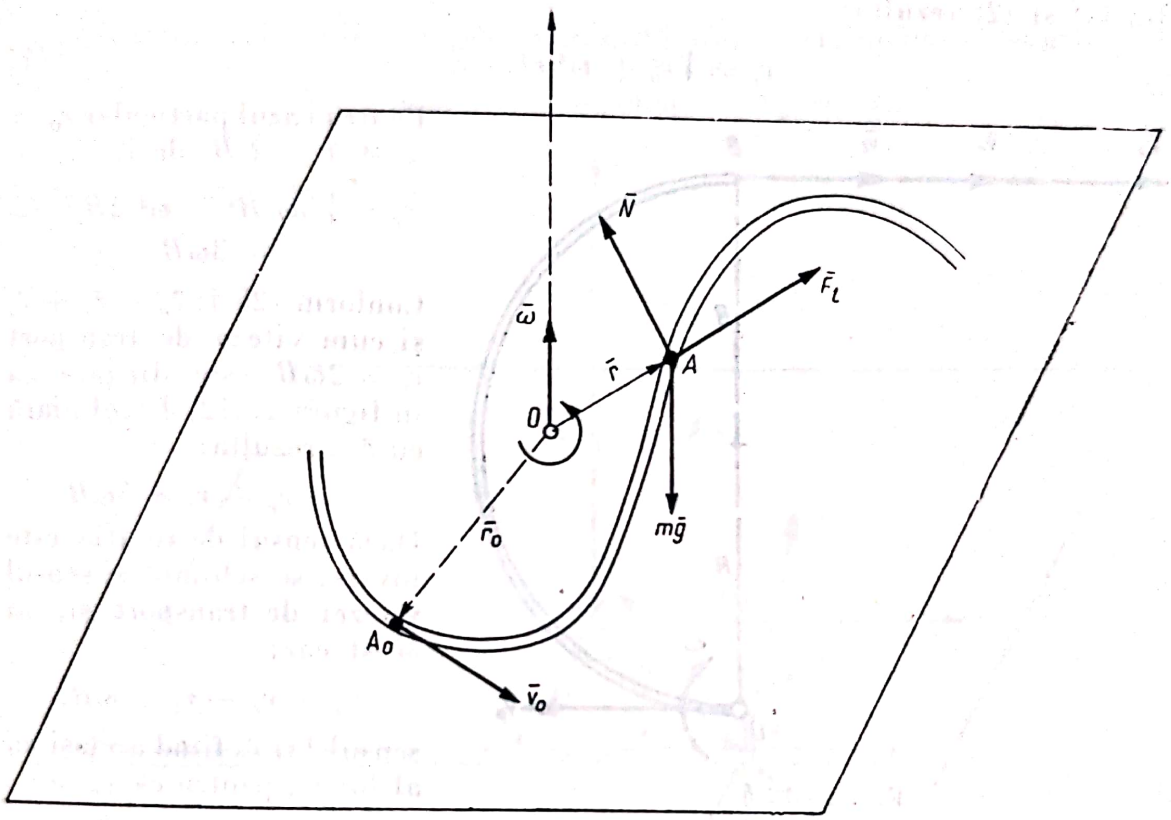


Fig. 25.12,*a*

Caz particular: tubul are forma unui semicerc OB de rază R, în momentul inițial sfera A se găsește în O și are viteza relativă $v_0 = \sqrt{5}\,\omega R$ (fig. 25.12, *b*). Să se determine viteza relativă și absolută a sferei în momentul în care părăsește tubul în B.

Rezolvare. Asupra sferei acționează greutatea proprie mg și reacțiunea normală $\bar{N}$ a tubului. Teorema energiei (25.11) elimină aceste două forțe, deoarece lucrul mecanic al lor este nul, deci:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathcal{L}_t. \qquad (1)$$

Lucrul mecanic al forței de transport (25.12) este:

$$\mathcal{L}_t = \int_{A_0A} \bar{F}_t \partial\bar{r} = \int_{A_0A} m\omega^2 r\,\partial\bar{r} = \int_{r_0}^{r} \partial\left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 - r_0^2) \qquad (2)$$

deoarece, conform (25.6):

$$\bar{F}_t = -m\,[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = -m\,[\bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{r}) - \bar{r}(\bar{\omega}\cdot\bar{\omega})] = m\omega^2\bar{r} \qquad (3)$$

$$(\bar{a}_0 = 0, \quad \dot{\bar{\omega}} = 0, \text{ iar } \bar{\omega} \perp \bar{r}).$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$v_r = \sqrt{v_0^2 + \omega^2(r^2 - r_0^2)}. \qquad (4)$$

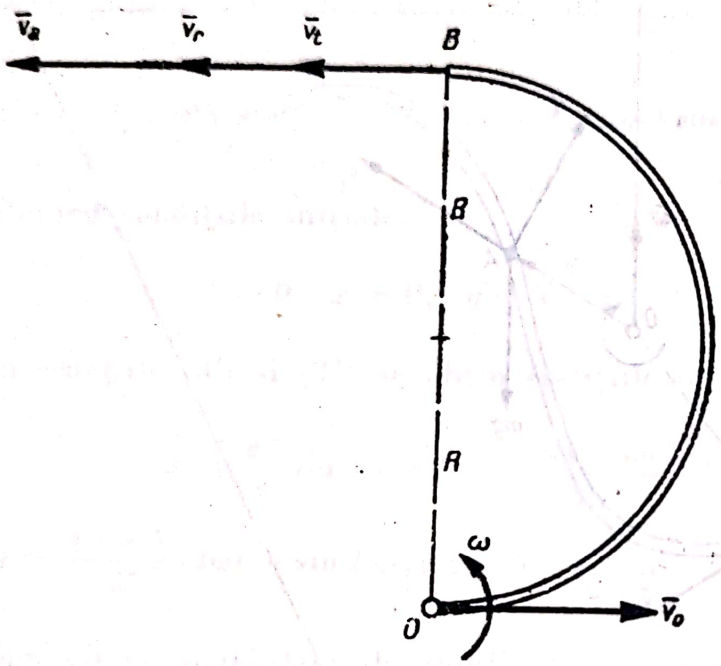


Fig. 25.12,*b*

Pentru cazul particular $r_0 = 0$, $r = 2R$, deci:

$$v_r = \sqrt{5\omega^2R^2 + \omega^2(2R)^2} = 3\omega R.$$

Conform (25.1) $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$ și cum viteza de transport $v_t = 2\omega R$ este dirijată ca în figura 25.12, *b* (coliniară cu $\bar{v}_r$), rezultă:

$$v_a = v_r + v_t = 5\omega R.$$

Dacă sensul de rotație este invers, se schimbă și sensul vitezei de transport și, în acest caz:

$$v_a = v_r - v_t = \omega R,$$

sensul lui $\bar{v}_a$ fiind același cu al lui $\bar{v}_r$, pentru că $v_r > v_t$.

25.13. Un tub drept luciu se rotește cu viteza unghiulară constantă ω într-un plan orizontal în jurul unui punct fix O situat la distanța $OA_0 = a$ de tub. În interiorul tubului se mișcă sfera A, de masă m, care în momentul inițial se găsește în A_0 și are viteza inițială relativă v_0 orientată ca în figura 25.13. Să se studieze mișcarea relativă a sferei în tub și să se determine reacțiunea dintre sferă și tub.

Rezolvare. Asupra punctului acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, reacțiunea $\bar{N}$ normală pe tub. Forțele complementare (25.6) și (25.7) fiind

$$\bar{F}_t = -m\,[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = -m\,[\bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{r}) - \bar{r}(\bar{\omega}\cdot\bar{\omega})] = m\omega^2\bar{r} =$$

$$= m\omega^2(x\bar{i} - a\bar{j})$$

$$\bar{F}_c = -2\,m\bar{\omega} \times \bar{v}_r = -2m\omega\dot{x}\bar{j},$$

deoarece $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$, $\bar{\omega} \perp \bar{r}$, $\bar{v}_r = \dot{x}\bar{i}$ și $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, proiecțiile ecuației fundamentale a dinamicii (25.5) pe axele din figura 25.13 sînt:

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \qquad 0 = N_y - m\omega^2 a - 2m\omega\dot{x} \qquad 0 = N_z - mg, \qquad (1)$$

unde N_y și N_z sînt proiecțiile reacțiunii normale $\bar{N}$ pe orizontală și verticală. Integrînd prima ecuație (1) și punînd condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ rezultă legea de mișcare a punctului în tub:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh}\omega t. \tag{2}$$

Componentele reacțiunii normale $\bar{N}$ rezultă din celelalte două ecuații (1):

$$N_y = m(\omega^2 a + 2\omega v_0 \operatorname{ch}\omega t) \qquad N_z = mg. \tag{3}$$

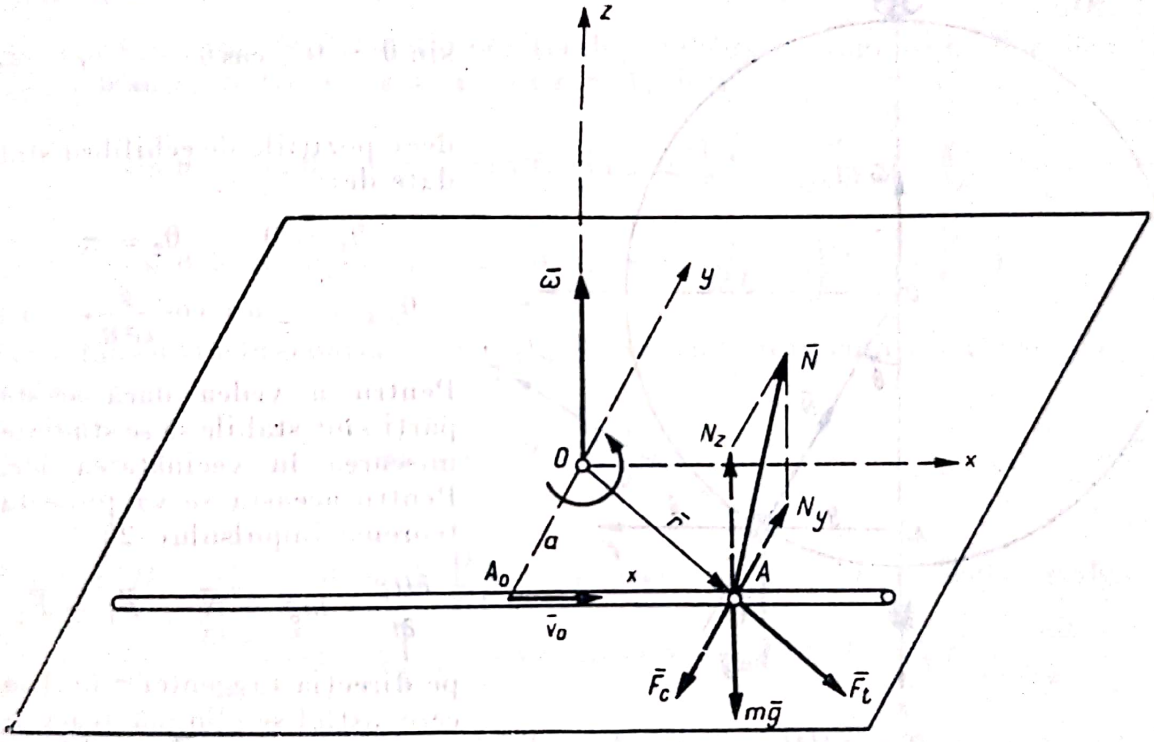


Fig. 25.13

25.14. Un cerc de sîrmă de rază R se rotește în jurul diametrului său vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Pe cerc poate luneca fără frecare un cursor A de masă m. Să se determine pozițiile de repaus relativ ale cursorului și să se studieze stabilitatea micilor oscilații ale cursorului în jurul acestor poziții de repaus.

Rezolvare. În poziția de repaus relativ, conform (25.13):

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_t = 0, \tag{1}$$

deoarece $\bar{F} = m\bar{g} + \bar{N}$ ($\bar{N}$ — reacțiunea normală a cercului). Forța complementară de transport este forța centrifugă:

$$F_t = m\omega^2 y = m\omega^2 R \sin\theta, \tag{2}$$

dirijată ca în figura 25.14, deoarece mișcarea de transport este o rotație uniformă (y — distanța de la A pînă la axa de rotație).

Proiectînd ecuația (1) pe direcția tangentei τ în A la cerc (pentru a elimina reacțiunea $\bar{N}$) rezultă:

$$-mg\sin\theta + F_t\cos\theta = 0, \tag{3}$$

și din (2) și (3):

$$\sin\theta(-mg + m\omega^2 R\cos\theta) = 0.$$

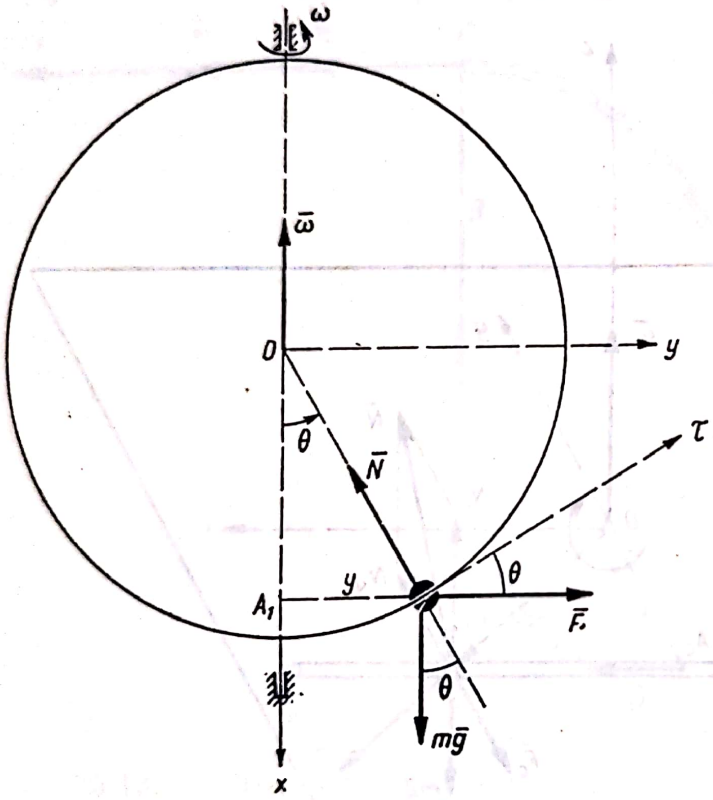


Fig. 25.14

Soluțiile acestei ecuații sînt:

$$\sin\theta = 0 \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}, \tag{4}$$

deci pozițiile de echilibru sînt date de:

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \pi$$

$$\theta_{3,4} = \pm \arccos\frac{g}{\omega^2 R}. \tag{4'}$$

Pentru a vedea dacă aceste părți sînt stabile să se studieze mișcarea în vecinătatea lor. Pentru aceasta se va proiecta teorema impulsului (25.8):

$$\frac{\partial \bar{H}_r}{\partial t} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_t + \bar{F}_c$$

pe direcția tangentei τ în A la cerc astfel se elimină reacțiunea normală $\bar{N}$ și forța complementară Coriolis $\bar{F}_c = -2m\bar{\omega}\times\bar{v}_r$, care fiind normală pe $\bar{v}_r$ este normală deci pe τ), $\frac{\partial \bar{H}_r}{\partial t} = m\bar{a}_r$ proiectat pe tangentă este $ma_{r\tau} = mR\ddot{\theta}$, deci ecuația de mișcare:

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 R\cos\theta\sin\theta. \tag{5}$$

Pentru micile oscilații în jurul punctului A_1 ($\theta = \theta_1 = 0$), $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, ecuația (5) luînd forma:

$$R\ddot{\theta} + (g - \omega^2 R)\,\theta = 0. \tag{6}$$

Pentru $g - \omega^2 R > 0$, $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ integrala ei generală este

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g-\omega^2 R}{R}}\,t - \varphi\right);$$

apar deci mici oscilații de perioada $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g-\omega^2 R}}$, pentru $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ integrala generală a ecuației (6) fiind de forma $\theta = C_1 e^{\sqrt{\frac{\omega^2 R - g}{R}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega^2 R - g}{R}}t}$ și poziția de echilibru fiind nestabilă (pentru condiții inițiale oarecare cursorul A depărtîndu-se de poziția de echilibru A_1).

Analog se arată că pentru orice valoare a lui ω poziția de echilibru $A_2(\theta = \theta_2 = \pi)$ este nestabilă.

Pentru micile oscilații din jurul punctului $A_3\left(\theta = \theta_3 = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}\right.$ se presupune cursorul depărtat din poziția de echilibru cu unghiul ε : $\theta = \theta_3 + \varepsilon$. Pentru mici oscilații: $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos\varepsilon \approx 1$, deci:

$$\sin\theta = \sin\theta_3\cos\varepsilon + \cos\theta_3\sin\varepsilon \approx \sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4 R^2}} + \frac{g}{\omega^2 R}$$

$$\cos\theta = \cos\theta_3\cos\varepsilon - \sin\theta_3\sin\varepsilon \approx \frac{g}{\omega^2 R} - \sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4 R^2}}\,\varepsilon;$$

făcînd înlocuirile în ecuația (5) și neglijînd termenii în ε^2, cum $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$, ecuația (5) devine:

$$R\ddot{\varepsilon} + \left(\omega^2 R - \frac{g^2}{\omega^2 R}\right)\varepsilon = 0. \tag{7}$$

Pentru $\omega^2 R - \frac{g^2}{\omega^2 R} > 0$, $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, poziția de echilibru este stabilă, $\varepsilon = A\cos\left(\frac{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}{\omega R}t - \varphi\right)$, perioada micilor oscilații $T = 2\pi\frac{\omega R}{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}$, și pentru $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ poziția de echilibru A_3 este nestabilă. Același rezultat se obține studiind micile oscilații în jurul punctului A_4 $(\theta = \theta_4 = -\arccos\frac{g}{\omega^2 R}\right)$.

Observație. Acest rezultat se putea obține folosind teorema lui Dirichlet (cap. XXXV). Sistemul de forțe format din greutatea proprie $m\bar{g}$ și forța de transport $\bar{F}_t$ este un sistem conservativ, ale cărui funcții de forțe sînt respectiv mgx și $\frac{1}{2}m\omega^2(y^2+z^2)$; deci:

$$U = mgx + \frac{1}{2}m\omega^2(y^2+z^2) = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2\sin^2\theta.$$

În pozițiile de echilibru $\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mgR\sin\theta + m\omega^2 R^2\sin\theta\cos\theta = 0$, ecuație din care rezultă pozițiile de echilibru (4′). Pentru ca pozițiile de echilibru să fie stabile

trebuie ca energia potențială V să fie minimă sau funcția de forță $U = -V$ maximă, adică $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mgR\cos\theta + m\omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1) < 0$. Or, pentru

$\theta = 0$	$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mR(-g + R\omega^2)$	< 0 pentru $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, echilibru stabil
		> 0 pentru $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, echilibru nestabil
$\theta = \pi$	$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mR(g + R\omega^2)$	> 0 echilibru nestabil
$\theta = \pm \arccos\frac{g}{\omega^2 R}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = m\left(\frac{g^2}{\omega^2} - R^2\omega^2\right)$	< 0 pentru $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, echilibru stabil
		> 0 pentru $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, echilibru nestabil

25.15. Un cerc de sîrmă de rază R se rotește în jurul diametrului vertical cu viteza unghiulară constantă ω. Pe acest cerc poate luneca un cursor A, de masă m. Cursorul este legat cu un resort ideal ($F = k\,BA$) de capătul B al diametrului vertical (fig. 25.15, *a*).

Să se determine poziția de repaus relativ a cursorului (unghiul θ).

Rezolvare. Asupra punctului material A acționează forțele $m\bar{g}$, $\bar{F}$ (tensiunea din resort) și $\bar{N}$ (reacțiunea normală a cercului). Condiția de repaus relativ (25.13) va fi deci:

$$m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_t = 0. \qquad (1)$$

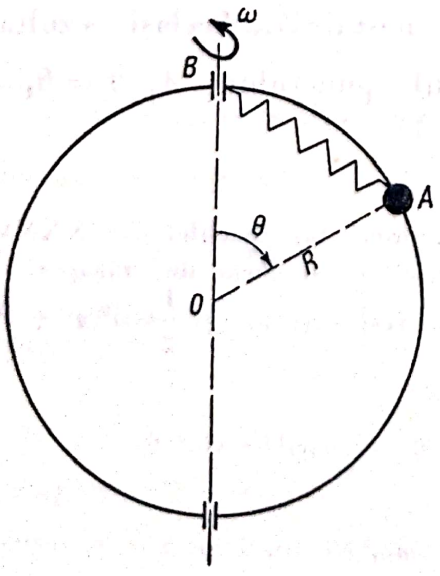


Fig. 25.15,*a*

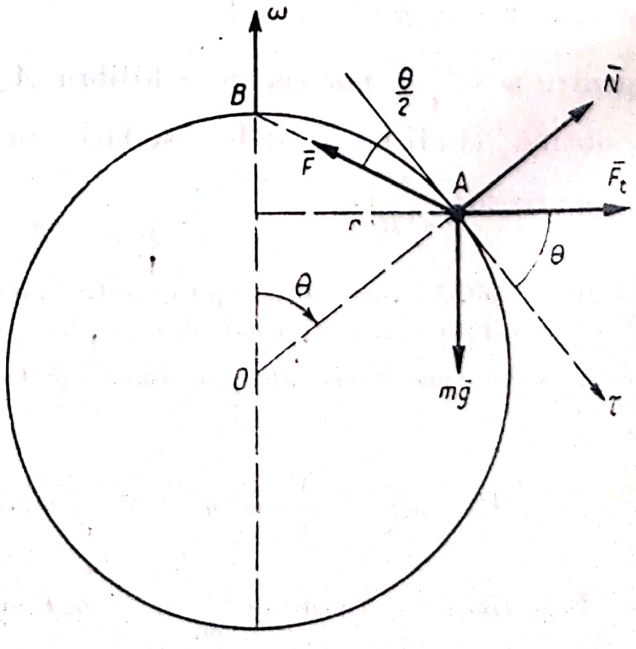


Fig. 25.15,*b*

Pentru a elimina reacțiunea $\bar{N}$ se proiectează această ecuație pe tangenta τ în A la cerc:

$$mg \sin \theta + F_t \cos \theta - F \cos \frac{\theta}{2} = 0. \qquad (2)$$

Forța complementară de transport este forța centrifugă dirijată ca în figura 25.15,*b* (mișcarea de transport este o rotație uniformă, și r — distanța de la cursorul A pînă la axa de rotație):

$$F_t = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \theta$$

$$F = k \cdot BA = 2kR \sin \frac{\theta}{2}.$$

Înlocuind în ecuația (2) se obține:

$$\sin \theta (mg + m\omega^2 R \cos \theta - kR) = 0. \qquad (3)$$

Soluțiile ecuației sînt:

$$\theta = 0, \qquad \theta = \pi, \qquad \theta = \pm \arccos \frac{kR - mg}{m\omega^2 R}.$$

25.16. Un tub luciu, a cărui linie axială este o curbă (C) situată într-un plan vertical, se rotește cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul unei axe verticale. În tub se găsește o sferă grea A, de masă m, care este atrasă de un punct fix O de pe axa de rotație cu o forță elastică de constantă elastică k. Să se determine ecuația curbei (C), astfel încît sfera A să fie în echilibru relativ indiferent (pentru orice poziție a ei în tub). Caz particular: asupra sferei acționează doar greutatea proprie ($k = 0$).

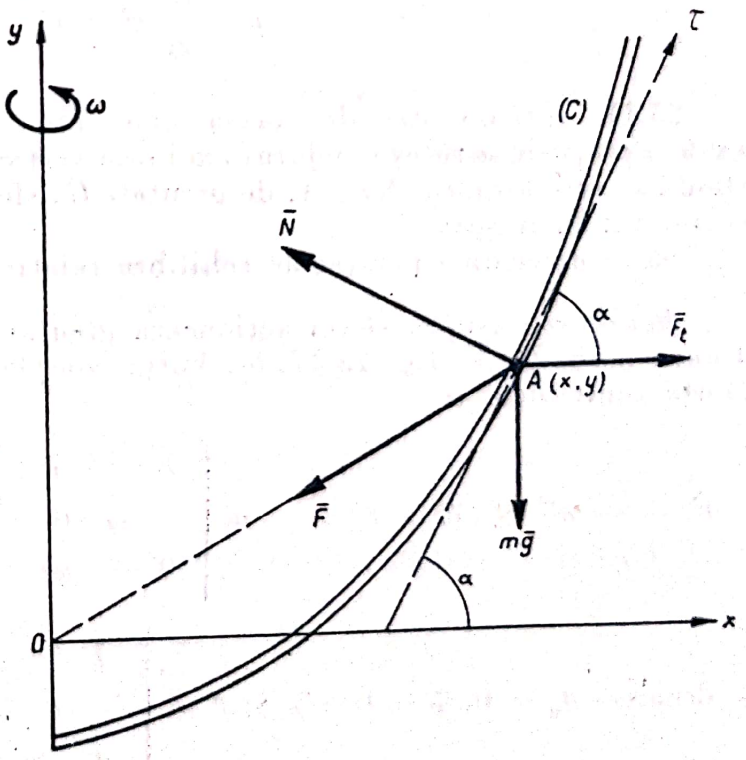


Fig. 25.16

Rezolvare. Asupra sferei acționează greutatea proprie $m\bar{g}$, forța elastică:

$$\bar{F} = -k\overline{OA} = -k(x\bar{i} + y\bar{j}) \qquad (1)$$

și reacțiunea normală $\bar{N}$ a tubului. (S-a ales drept axă Oy axa de rotație și drept origine centrul atractiv O). Forța complementară de transport $\bar{F}_t$ este forța centrifugă:

$$\bar{F}_t = m\omega^2 x\bar{i}, \qquad (2)$$

calculată ca în problema 25.7. Vom proiecta ecuația de echilibru relativ (25.13):

$$m\bar{g} + \bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_t = 0 \tag{3}$$

pe direcția tangentei τ la curba (C) în punctul A pentru a elimina reacțiunea $\bar{N}$. Proiecțiile versorilor $\bar{i}$ și $\bar{j}$ pe axa $A\tau$ fiind respectiv $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$ (α — unghiul dintre Ox și $A\tau$) se obține ținînd seamă de (1) și (2):

$$-mg\sin\alpha - kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + m\omega^2 x\cos\alpha = 0.$$

Împărțind prin $\cos\alpha$, cum $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, rezultă:

$$\frac{dy}{dx}(mg + ky) = x(m\omega^2 - k) \tag{4}$$

și prin integrare (ecuația diferențială cu variabile separabile) se obține ecuația familiei de curbe C, conicele:

$$(k - m\omega^2)x^2 + ky^2 + 2mgy + C = 0 \tag{5}$$

avînd axa de rotație drept axă de simetrie. Pentru $k > m\omega^2$, curbele (C) sînt elipse și pentru $k < m\omega^2$ sînt hiperbole.

În cazul particular $k = 0$, curba (C) este parabola:

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C.$$

25.17. Într-un vas de forma unui elipsoid de revoluție, cu semiaxele a și b, care se rotește în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă ω, este așezată sfera A, de greutate G; sfera se află în repaus față de elipsoidul în mișcare.

Să se determine poziția de echilibru relativ (distanța h) (fig. 25.17, a).

Rezolvare. Asupra sferei acționează greutatea proprie $\bar{G} = mg\,\bar{i}$ și reacțiunea normală $\bar{N}$ (fig. 25.17, b). Forța complementară de transport (25.6) (forța centrifugă) este:

$$\bar{F}_t = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = -m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega z & -\omega y \end{vmatrix} = m\omega^2(y\bar{j} + z\bar{k}), \tag{1}$$

deoarece $\bar{a}_0 = 0$, $\dot{\bar{\omega}} = 0$ și $\bar{\omega}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega z\bar{j} - \omega y\bar{k}.$

Pentru a elimina reacțiunea normală se aplică principiul lucrului mecanic virtual (25.15):

$$\delta\mathfrak{L} = (\bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_t)\,\delta\bar{r} = 0$$

și ținînd seama de (1) avem:

$$\delta\mathfrak{L} = mg\delta x + m\omega^2(y\delta y + z\delta z) = 0. \tag{2}$$

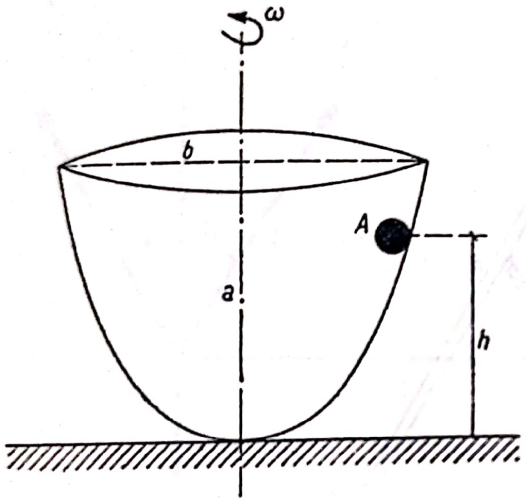


Fig. 25.17,*a*

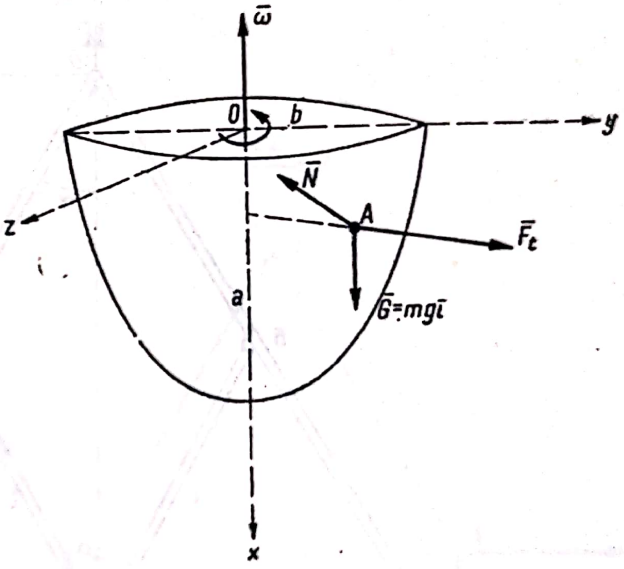


Fig. 25.18,*b*

Deplasările virtuale δx, δy, δz trebuind să fie compatibile cu legăturile prin diferențierea ecuației elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$, ele trebuie să satisfacă relația:

$$\frac{2x\delta x}{a^2} + \frac{2y\delta y + 2z\delta z}{b^2} = 0. \tag{3}$$

Eliminînd expresia $y\delta y + z\delta z$ din (2) și (3) rezultă:

$$\delta\mathfrak{L} = \left(mg - \frac{b^2}{a^2}\, m\omega^2 x\right)\delta x = 0$$

și cum lucrul mecanic virtual este nul pentru *orice* deplasare virtuală δx,

$$x = \frac{a^2 g}{b^2\omega^2},$$

iar

$$h = a - x = a - \frac{a^2 g}{b^2\omega^2}.$$

25.18. Un regulator centrifug de viteze Watt este compus din barele $OA = OA' = 2\,l$ și $BC = B'C = l$, unde $OB = OB' = l$ articulate ca în figura 25.18, *a*. În capetele A și A' ale barelor se găsesc două sfere de greutate P și în C este fixată o supapă, forța rezultantă care acționează asupra ei fiind Q.

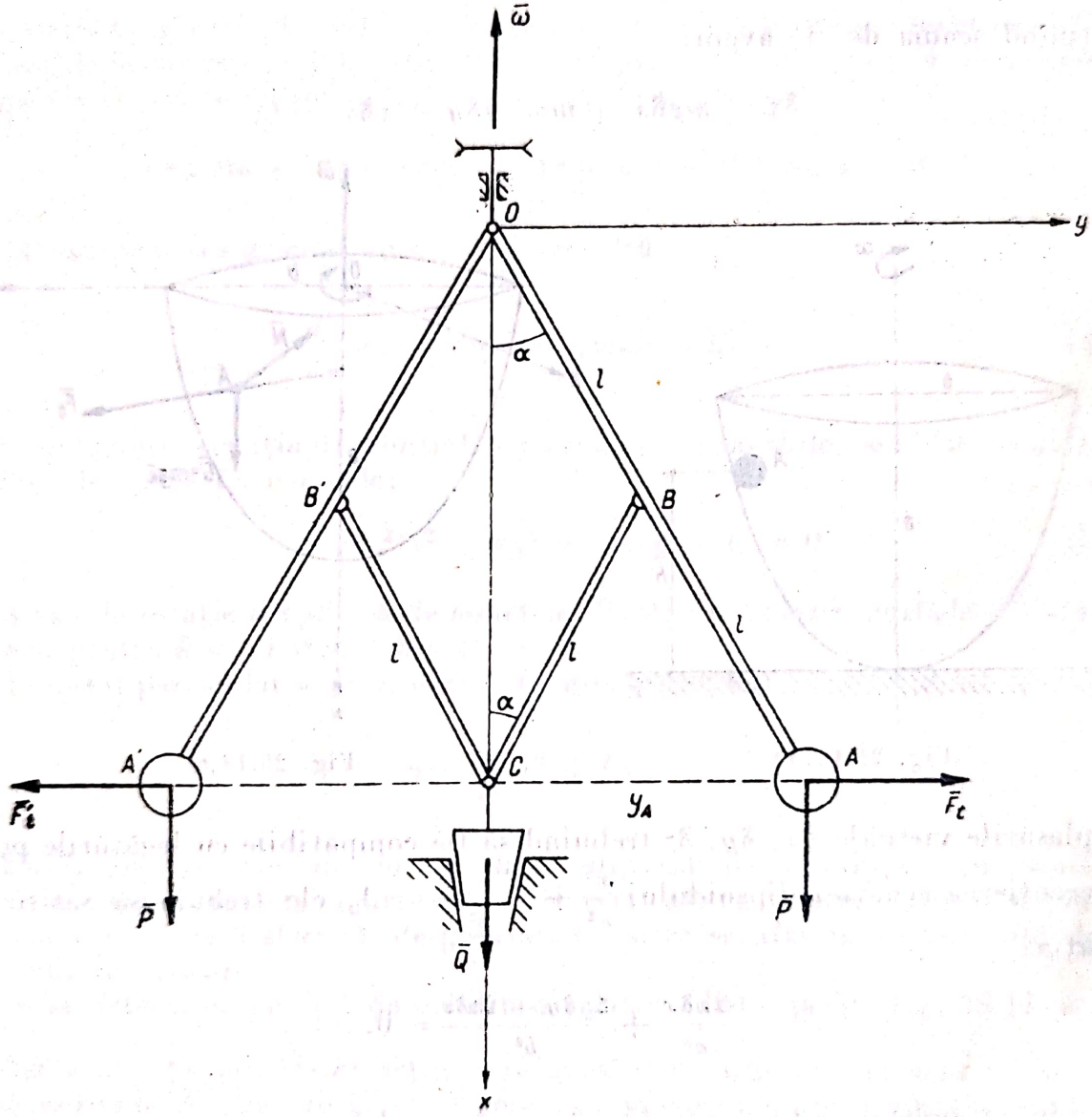


Fig. 25.18, *a*

Regulatorul se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul verticalei OC. Neglijîndu-se greutatea barelor să se determine unghiul α în poziția de repaus relativ. Să se rezolve apoi aceeași problemă ținînd seamă și de masa barelor, barele OA și OA' avînd greutatea $2G$, iar barele BC și $B'C$ avînd greutatea G.

Rezolvare. Asupra sistemului acționează forțele efectiv aplicate $\bar{P}$, $\bar{P}$ și $\bar{Q}$ și reacțiunea din articulația O. Forțele de transport sînt forțele centrifuge (mișcare de rotație uniformă):

$$\bar{F}_t = m_A \omega^2 y_A \vec{j} = \frac{P}{g} \omega^2\, 2l \sin\alpha \vec{j} \qquad \bar{F}_t' = -\bar{F}_t, \tag{1}$$

dar asupra supapei nu acționează nici o forță de transport, deoarece supapa găsindu-se pe axa de rotație $\bar{a}_{tC} = 0$ (fig. 25.18, *a*).

Conform (25.14), rezultanta și momentul rezultant al sistemului format din forțele efectiv aplicate, forțele de legătură și forțele de transport sînt în echilibru. Barele BC și $B'C$ sînt dublu articulate și acționate doar în articulații de forțe, ele vor putea fi numai întinse sau comprimate (v. cap. IX — Grinzi cu zăbrele).

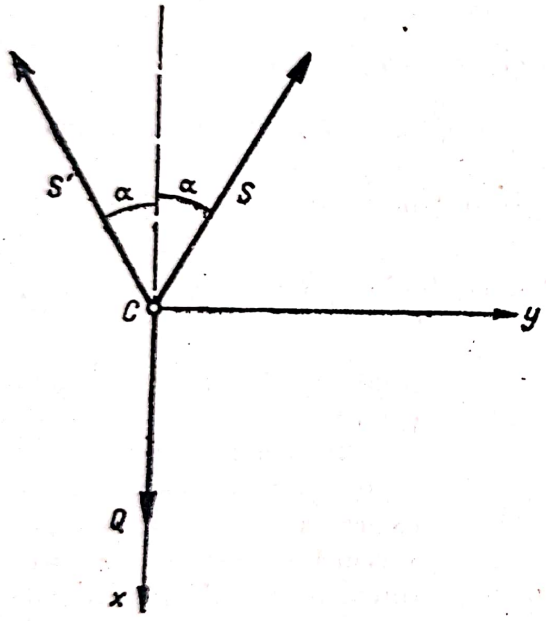


Fig. 25.18, *b*

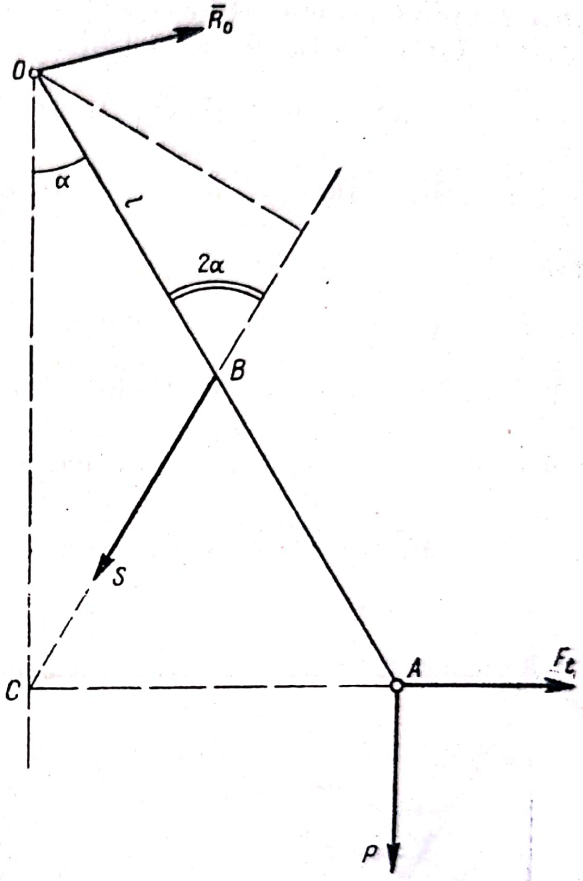


Fig. 25.18,*c*

Dacă S și S' sînt eforturile din cele două bare, izolînd articulația C (fig. 25.18,*b*) și scriind ecuațiile de proiecții:

$$S \sin \alpha - S' \sin \alpha = 0 \qquad Q - S \cos \alpha - S' \cos \alpha = 0$$

rezultă:

$$S = S' = \frac{Q}{2 \cos \alpha}, \tag{2}$$

Izolînd apoi bara OA (fig. 25.18, *c*) și scriind o ecuație de momente față de O pentru a elimina reacțiunea $\bar{R}_0$ din articulație rezultă:

$$F_t \cdot 2l \cos \alpha - P \cdot 2l \sin \alpha - S \cdot l \sin 2\alpha = 0$$

și ținînd seamă de (1) și (2), după simplificări se obține:

$$\sin \alpha \left(\frac{4P}{g} \omega^2 l \cos \alpha - 2P - Q \right) = 0, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = \arccos \frac{(2P + Q)g}{4Pl\omega^2} \quad \left(\text{dacă } \omega \geqslant \sqrt{\frac{(2P + Q)g}{4Pl}}\right). \tag{4}$$

Dacă se aplică principiul lucrului mecanic virtual (25.15) se ajunge la același rezultat fără ca să fie necesară izolarea corpurilor:

$$\delta\mathfrak{L} = (\bar{P} + \bar{F}_t)\delta\bar{r}_A + (P + \bar{F}_t')\,\delta\bar{r}_{A'} + \bar{Q}\,\delta\bar{r}_C = 0 \tag{5}$$

$$\delta\mathfrak{L} = P\delta x_A + F_t\,\delta y_A + P\delta x_{A'} - F_t'\,\delta y_{A'} + Q\delta x_C = 0. \tag{6}$$

Însă:

$$x_A = x_{A'} = x_C = 2l\cos\alpha \qquad y_A = -y_{A'} = 2l\sin\alpha$$

$$\delta x_A = \delta x_{A'} = \delta x_C = -2l\sin\alpha\,\delta\alpha \qquad \delta y_A = -\delta y_{A'} = 2l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

și din (1) și (6), înlocuite în ecuația (5), se obține:

$$\delta\mathfrak{L} = \left[\frac{8Pl^2\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha - (2P + Q)\,2l\sin\alpha\right]\delta\alpha = 0, \tag{7}$$

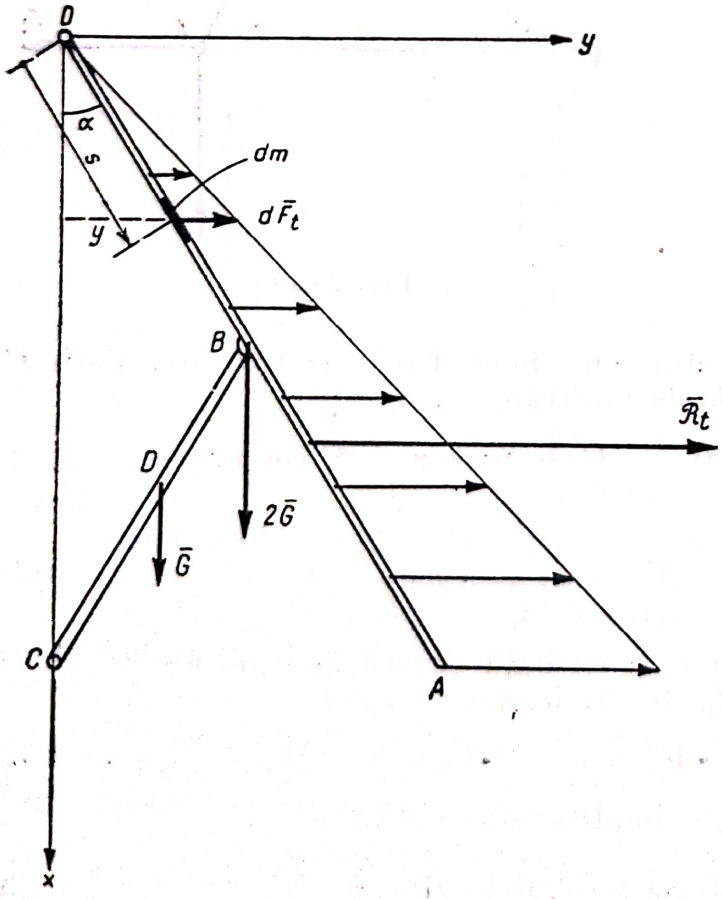


Fig. 25.18,*d*

relație identică cu ecuația (3).

În cazul cînd se ține seamă și de masa barelor în expresia lucrului mecanic virtual trebuie să se introducă și lucrul mecanic datorit greutăților barelor (fig. 25.18, *d*):

$$2G\delta x_B + G\delta x_D + 2G\delta x_{B'} + G\delta x_{D'} = -7\,Gl\sin\alpha\,\delta\alpha,$$

deoarece $x_B = x_{B'} = l\cos\alpha$,

$$x_D = x_{D'} = \frac{3}{2}\,l\cos\alpha,$$

$$\delta x_B = \delta x_{B'} = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

$$\delta x_D = \delta x_{D'} = -\frac{3}{2}\,l\sin\alpha\,\delta\alpha,$$

cum și lucrul mecanic datorit forțelor complementare de transport care acționează asupra barelor.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru bara OA sau OA', considerînd un element de lungime ds și de masă $dm = \frac{2G}{2gl} ds$, aflat la distanța s de capătul A al barei și la distanța y de axa de rotație, forța de transport corespunzătoare este:

$$d\bar{F}_t = dm\ \omega^2\ y\ \bar{j} = \frac{G}{gl}\omega^2\ s\ \sin\alpha\ ds\ \bar{j},$$

lucrul mecanic virtual al acestor forțe fiind:

$$\int_{OA} d\bar{F}_t \delta\bar{r} = \int_{OA} dF_t \delta y = \int_{OA} \frac{G}{gl}\omega^2\ s^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ \delta\alpha\ ds =$$

$$= \frac{G}{gl}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\ \delta\alpha \int_0^{2l} s^2\ ds = \frac{8Gl^2}{3g}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\ \delta\alpha,$$

deoarece $y = s\sin\alpha$ și $\delta y = s\cos\alpha\ \delta\alpha$.

Analog pentru bara CB sau CB' notînd cu s distanța de la elementul de masă pînă la articulația C, lucrul mecanic virtual al forțelor de transport este:

$$\int_{CB} d\bar{F}_t \delta\bar{r} = \int_{CB} dF_t \delta y = \int_0^l \frac{G}{gl}\omega^2 s^2 \sin\alpha\cos\alpha\ \delta\alpha\ \delta s = \frac{Gl^2}{3g}\omega^2\ \sin\alpha\ \cos\alpha\ \delta\alpha.$$

Lucrul mecanic virtual al tuturor acestor forțe de transport este deci:

$$2 \times \frac{8Gl^2}{3g}\omega^2 \sin\alpha\ \cos\alpha\ \delta\alpha + 2 \times \frac{Gl^2}{3g}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\ \delta\alpha = \frac{6Gl^2\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\ \delta\alpha,$$

iar lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor sistemului va fi ținînd seamă de (7):

$$\delta\mathfrak{L} = \left[\frac{8\,Pl^2\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha - (2P + Q)\,2l\sin\alpha - \right.$$

$$\left. - 7Gl\sin\alpha + \frac{6\,Gl^2\omega^2}{g}\sin\alpha\ \cos\alpha\right]\delta\alpha = 0,$$

deci echilibrul relativ este posibil pentru:

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = \arccos\frac{(4\,P + 2Q + 7G)g}{(8P + 6G)l^2\omega^2}.$$

Observație. Rezultanta forțelor complementare de transport care acționează asupra unei bare este:

$$\bar{\mathfrak{R}}_t = \int_{OA} d\bar{F}_t = \frac{G}{gl}\omega^2 \sin\alpha \left(\int_0^{2l} s\,ds\right)\bar{j} = \frac{2G}{g}\cdot\omega^2 l\ \sin\alpha\cdot\bar{j} = m\omega^2 y_B\bar{j} = -m\bar{a}_{tB},$$

deci egală cu minus masa înmulțită cu accelerația de transport $\bar{a}_{tB}$ a centrului B de greutate al barei.

Variația forțelor $d\bar{F}_t$ fiind liniară, centrul E al acestor forțe paralele (fig. 25.18,*d*) se va găsi la două treimi din lungimea barei de capătul O $\left(OE = \frac{2}{3}\cdot 2l = \frac{4l}{3}\right)$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

25.19. O pană al cărei profil este un sfert de cerc de rază R se mișcă pe un plan orizontal cu accelerația constantă $\bar{a}_0$. Pe suprafața penei se găsește

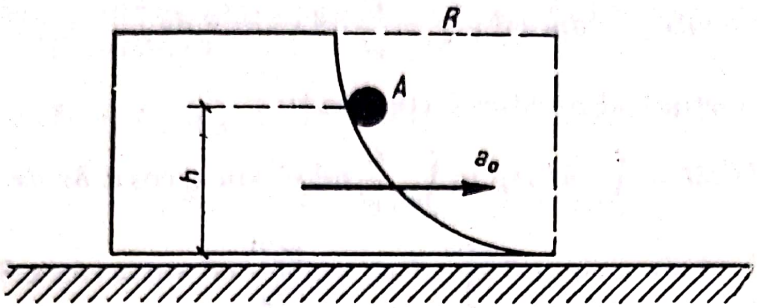


Fig. 25.19

o sferă A de greutate $\bar{G}$ (fig. 25.19). Să se determine poziția de repaus relativ a sferei în raport cu pana.

Răspuns: $h = R\left(1 - \frac{g}{\sqrt{a_0^2 + g^2}}\right)$.

25.20. Bara $OA = l$, articulată în O având în capătul A o sferă de greutate P, se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei verticale OB (fig. 25.20). Sfera este legată de axa de rotație printr-un resort ideal, orizontal, avînd constanta elastică k ($F = k\,BP$).

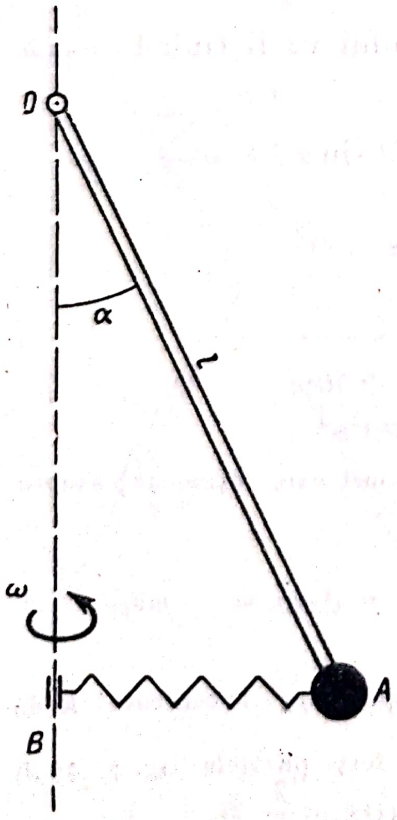


Fig. 25.20

Să se determine unghiul α în poziția de echilibru a barei în două ipoteze: *a)* neglijînd greutatea barei; *b)* ținînd seamă de greutatea G a barei.

Răspuns: a) $\alpha = 0$

$$\alpha = \arccos \frac{Pg}{(P\omega^2 - kg)l};$$

b) $\alpha = 0$

$$\alpha = \arccos \frac{(6P + 3G)g}{[(6P + 2G)\omega^2 - 6\,kg]l}.$$

25.21. Un echer $O'OB$, format din barele $O'O$ și OB, se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul axei verticale $O'O$. Pe bara OB lunecă cursorul greu A, care în momentul inițial se găsește în repaus relativ, la distanța $OA = a$ (fig. 25.21).

Să se determine viteza relativă a cursorului în momentul în care părăsește bara OB ($OB = l$).

Răspuns: $v_{rB} = \omega \sqrt{l^2 - a^2}$.

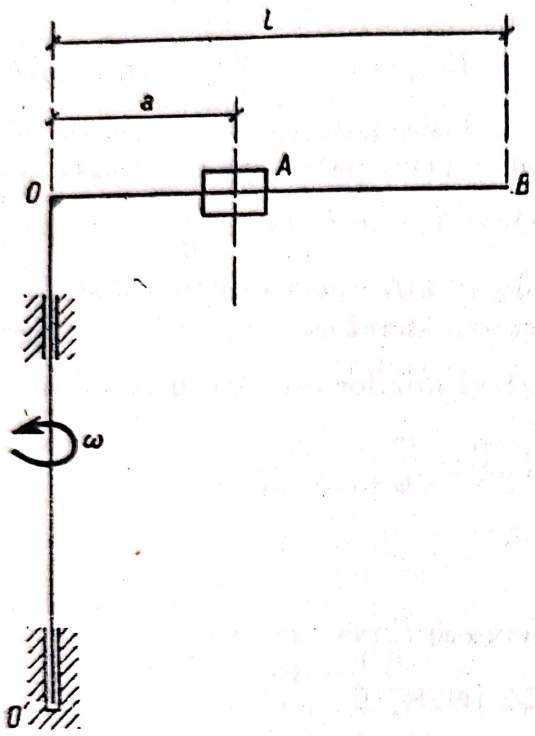


Fig. 25.21

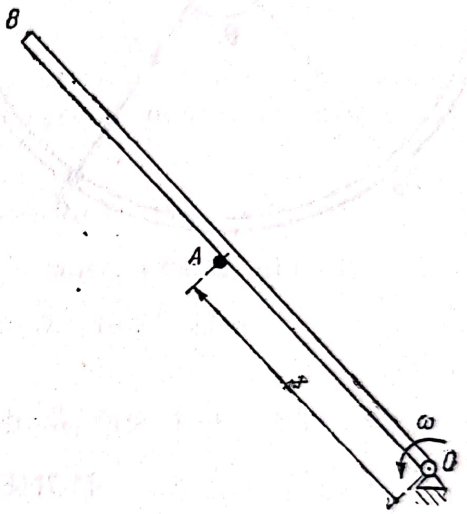


Fig. 25.22

25.22. O bară OB se rotește într-un plan orizontal în jurul capătului O cu viteza unghiulară constantă și împinge o sferă A, de masă m, situată pe acest plan (fig. 25.22). Să se studieze mișcarea relativă a sferei în lungul barei și să se determine reacțiunea normală N dintre sferă și bară, cunoscînd coeficientul de frecare $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ dintre bară și sferă și neglijînd frecarea dintre sferă și planul orizontal. În momentul inițial sfera se găsește la distanța x_0 de punctul O și are viteza relativă nulă.

Răspuns:

$$x = \frac{x_0}{2}\left[(1 + \sin\varphi)e^{\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\omega t} + (1 - \sin\varphi)e^{-\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\omega t}\right]$$

$$N = m\omega^2 x_0 \cos\varphi\left(e^{\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\omega t} - e^{-\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\omega t}\right).$$

25.23. Un tub luciu avînd forma unui cerc de rază R se rotește într-un plan orizontal în jurul unuia dintre punctele sale O cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 25.23). În interiorul tubului se poate deplasa o sferă A, de

masă m. Știind că în momentul inițial sfera se găsește în punctul diametral opus A_0 al lui O și are viteza relativă v_0, să se studieze mișcarea relativă a sferei A determinîndu-se viteza relativă v_r, reacțiunea $\bar{N}$ a tubului și perioada T a micilor oscilații ale sferei în jurul poziției de echilibru relativ.

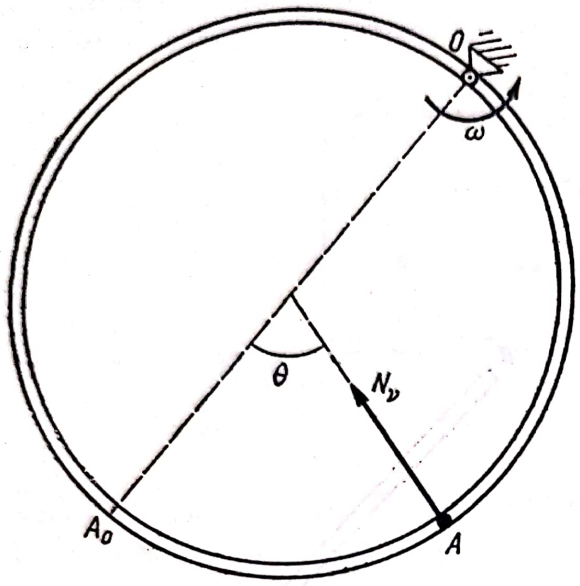


Fig. 25.23

Răspuns: $v_r = \sqrt{v_0^2 - 4R^2\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$.

Proiecțiile reacțiunii normale pe normala principală și pe binormala la cerc sînt: $N_\nu = mR\left[\left(\omega + \frac{v_r}{R}\right)^2 + \omega^2 \cos\theta\right]$, $N_\beta = mg$, ecuația diferențială de mișcare a sferei este $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$, în cazul micilor oscilații $\theta = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, și $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Capitolul XXVI

MOMENTE DE INERȚIE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE. SISTEM-PLAN DE PUNCTE MATERIALE

Moment de inerție axial. Se numește moment de inerție al unui sistem rigid de puncte materiale, în raport cu o axă Δ, expresia scalară:

$$J_\Delta = \sum md^2, \tag{26.1}$$

în care:

m este masa unui punct material din sistem;

d — distanța acelui punct material la axa Δ.

Pentru un sistem rigid de puncte materiale în plan, în care s-a ales un sistem de axe de coordonate Oxy:

$$J_x = \sum my^2; \qquad J_y = \sum mx^2. \tag{26.2}$$

Pentru un sistem de puncte materiale, plan, omogen și continuu:

$$J_x = \rho \int y^2 dA; \qquad J_y = \rho \int x^2 dA, \tag{26.3}$$

în care:

ρ este densitatea;

dA — elementul de suprafață.

Moment de inerție polar. Se numește moment de inerție polar, în raport cu punctul O al unui sistem rigid de puncte materiale, expresia:

$$J_0 = \sum md^2, \tag{26.4}$$

în care:

m este masa unui punct material din sistem;

d — distanța punctului material de la punctul O.

Într-un sistem de coordonate Oxy:

$$J_0 = J_x + J_y. \tag{26.5}$$

Moment centrifugal (sau produs de inerție). Se numește moment centrifug (un produs de inerție) al unui sistem rigid de puncte materiale, în raport cu axele Ox și Oy, expresia:

$$J_{xy} = \sum m \cdot x \cdot y. \tag{26.6}$$

Variația momentelor de inerție față de axe paralele este dată de relația:

$$J_{x'} = J_x + Md^2 \quad \text{(formula lui Steiner)}, \tag{26.7}$$

în care:

J_x este momentul de inerție axial în raport cu o axă care trece prin centrul de greutate;

$J_{x'}$ — momentul de inerție în raport cu o axă paralelă cu prima;

d — distanța dintre cele două axe;

M — masa sistemului de puncte materiale

sau pentru momente de inerție polare

$$J_{0'} = J_0 + Md^2, \tag{26.8}$$

în care notațiile sînt respectiv corespunzătoare celor din formula (26.7): sau pentru cele centrifugale

$$J_{x'y'} = J_{xy} + Mab, \tag{26.9}$$

în care notațiile sînt respectiv corespunzătoare celor din formula (26.7), a și b fiind distanțele axelor Ox' și Oy' de Ox și Oy.

Variația momentelor de inerție față de axe concurente. Cunoscînd momentele de inerție J_x, J_y și J_{xy} în raport cu sistemul de axe de coordonate Oxy, momentele de inerție în raport cu axele $Ox'y'$, care fac unghiul φ cu primele, sînt date de expresiile:

$$J_{x'} = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \tag{26.10}$$

$$J_{y'} = J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi + 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \tag{26.11}$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi. \tag{26.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Direcţii principale de inerţie. Momente principale de inerţie. Direcţiile după care momentele de inerţie sînt maxime şi minime se numesc *direcţii principale.*

Valorile unghiului φ, pe care axele direcţiilor principale de inerţie le fac cu axele Oxy, sînt date de expresia:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \tag{26.13}$$

Momente de inerţie principale.

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}. \tag{26.14}$$

Rază de inerţie. Raza de inerţie are expresia:

$$i = \sqrt{\frac{J}{M}}. \tag{26.15}$$

Elipsa de inerţie are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1.$$

Sisteme de puncte materiale în spaţiu. Momentele de inerţie axiale au expresiile:

$$J_x = \sum m(y^2 + z^2); \qquad J_y = \sum m(z^2 + x^2);$$

$$J_y = \sum m(x^2 + y^2). \tag{26.16}$$

Momentele de inerţie centrifugale au expresiile:

$$J_{xy} = \sum mxy; \qquad J_{xy} = \sum myz; \qquad J_{zx} = \sum mzx. \tag{26.17}$$

Momentul de inerţie polar este dat de expresia:

$$J_0 = \sum m(x^2 + y^2 + z^2). \tag{26.18}$$

Relaţia dintre momentele de inerţie axiale şi momentul de inerţie polar faţă de originea axelor este:

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z.$$

Scanned with OKEN Scanner

Variația momentelor de inerție față de axe paralele în spațiu este exprimată prin relațiile cunoscute sub numele de *formulele lui Steiner*:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x + M(y_6^2 + z_6^2) \\ J_{y'} &= J_y + M(x_6^2 + z_6^2) \\ J_{z'} &= J_z + M(x_6^2 + y_6^2) \\ J_{0'} &= J_0 + M(x_6^2 + y_6^2 + z_6^2) \\ J_{x'y'} &= J_{xy} + Mx_6y_6 \\ J_{y'z'} &= J_{yz} + My_6z_6 \\ J_{z'x'} &= J_{zx} + Mz_6x_6, \end{aligned} \tag{26.19}$$

unde:

x_6, y_6, z_6 reprezintă coordonatele centrului de greutate în raport cu sistemul de coordonate $Oxyz$:

J_x, J_y, J_z, J_0, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} sînt momentele de inerție axiale polare și centrifuge, în raport cu sistemul de axe $Oxyz$:

$J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$, $J_{0'}$, $J_{x'y'}$, $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$ sînt momentele de inerție axiale, polare și centrifuge în raport cu sistemul de axe $Ox'y'z'$ paralel cu sistemul $Oxyz$.

Momentul de inerție în raport cu o dreaptă variabilă. Cunoscînd momentele de inerție axiale și centrifuge, în raport cu un sistem de axe $O_1x_1y_1z_1$, se poate determina momentul de inerție al corpului în raport cu o axă Δ care trece prin originea O, a cărei direcție este determinată de unghiurile α, β, γ pe care le face cu axele O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, cu ajutorul relației:

$$\begin{aligned} J_\Delta = J_{x_1}\cos^2\alpha + J_{y_1}\cos^2\beta + J_{z_1}\cos^2\gamma - 2J_{x_1y_1}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2J_{y_1z}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{z_1x_1}\cos\gamma\cos\alpha. \end{aligned} \tag{26.20}$$

Elipsoidul de inerție. Dacă pe axa Δ se ia o distanță $O_1P = \frac{H}{J_\Delta}$, unde H este o constantă, locul geometric al punctelor P corespunzător tuturor pozițiilor posibile ale axei Δ este un elipsoid a cărui expresie este:

$$J_{x_1}x_1^2 + J_{y_1}y_1^2 + J_{z_1}z_1^2 - 2J_{x_1y_1}x_1y_1 - 2J_{y_1z_1}y_1z_1 - 2J_{z_1x_1}z_1x_1 = H^2, \tag{26.21}$$

unde x_1, y_1, z_1 sînt coordonatele lui P în sistemul $O_1x_1y_1z_1$.

Ecuația elipsoidului în raport cu axele sale de simetrie O_1x_1, O_1y_1 și O_1z_1, care se numesc și axe principale de inerție, este:

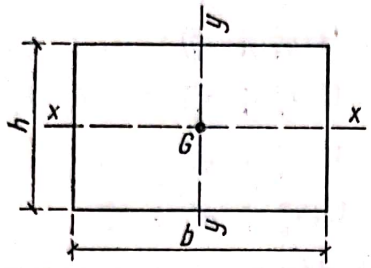
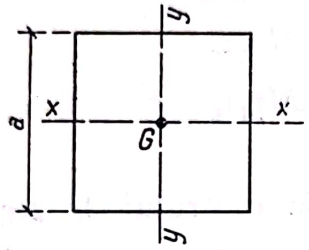
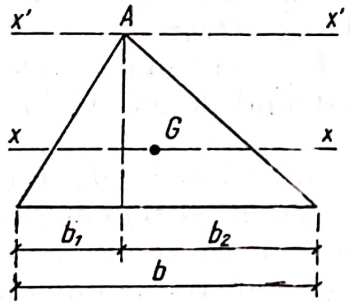
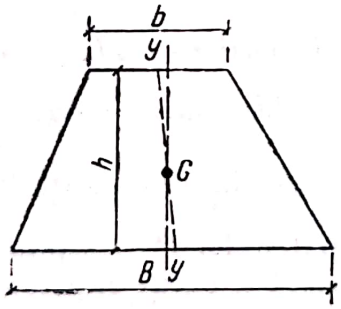
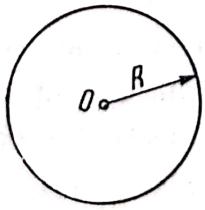
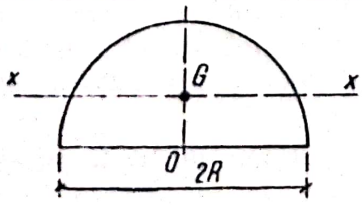
$$J_xx^2 + J_yy^2 + J_z^2z^2 = H^2. \tag{26.22}$$

Momentele de inerție J_x, J_y, J_z în raport cu aceste axe se numesc *momente de inerție principale*, corespunzătoare polului O_1. Dacă polul O_1 este chiar centrul de greutate al corpului, atunci momentele de inerție se numesc *momente de inerție principale centrale*.

În tabela 26.1 sînt date valorile unor momente de inerție pentru diferite corpuri.

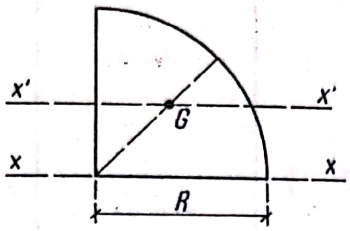
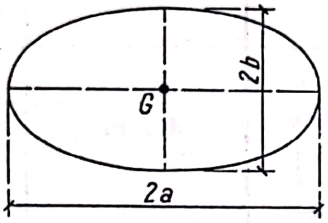
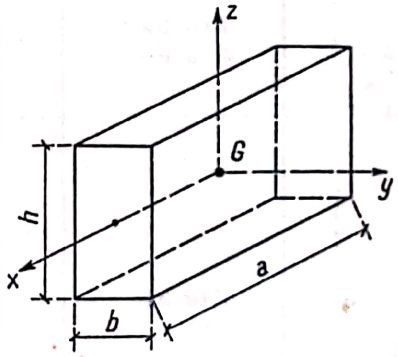
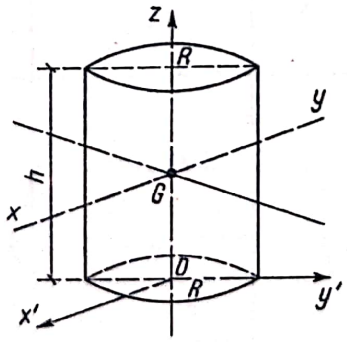
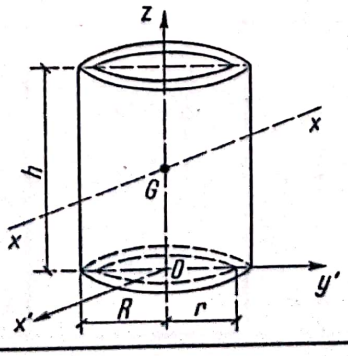
Scanned with OKEN Scanner

Momente de inerție ale diferitelor corpuri

Nr. crt.	Secțiunea	Profilul	Axa	Momentul de inerție mecanic
1	Dreptunghi		Latura b	$M h^2/3$
			Axa $x x$	$M h^2/12$
			Axa $y y$	$M b^2/12$
2	Pătrat		Latura a	$M a^2/3$
			Axa $x x$ Axa $y y$	$M a^2/12$
3	Triunghi		Baza b	$M h^2/6$
			Axa $x x$	$M h^2/18$
			Axa $x'x'$ prin vîrful A	$M h^2/2$
			Înălțimea h	$M(b_1^3 + b_2^3)/6b$
4	Trapez		Baza mică b	$M\frac{h^2}{6}\cdot\frac{3B+b}{B+b}$
			Baza mare B	$M\frac{h^2}{6}\cdot\frac{B+3b}{B+b}$
			Axa $y y$	$M\frac{B^2+b^2}{24}$
5	Cerc		Diametru	$MR^2/4$
			Moment de inerție polar în raport cu centrul O	$MR^2/2$
6	Semicerc		Diametrul d	$MR^2/4$
			Axa $x x$	$M\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$

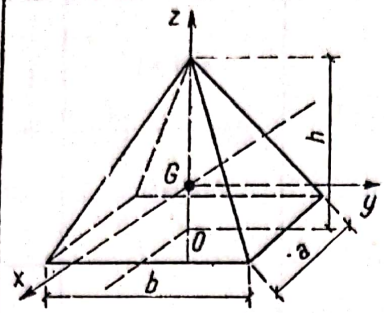
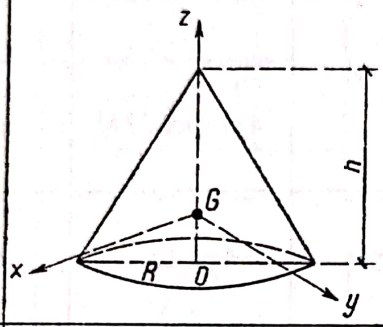
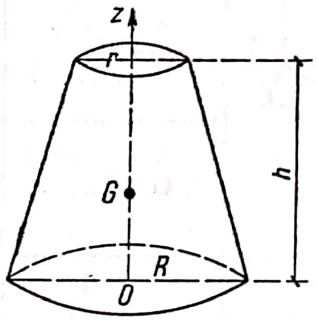
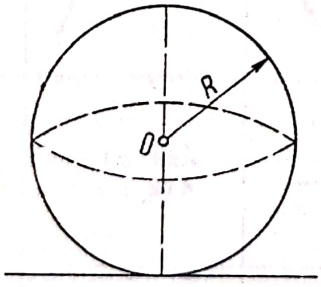
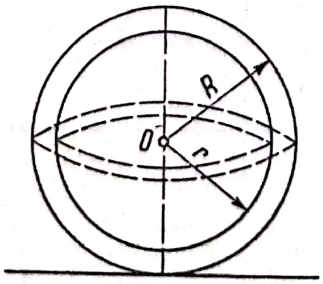
Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerție ale diferitelor corpuri (continuare)

Nr. crt.	Secțiunea	Profilul	Axa	Momentul de inerție mecanic
7	Sfert de cerc		Axa xx	$MR^2/4$
			Axa x'x'	$M\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$
8	Elipsă		Axa mare (2a)	$M\frac{b^2}{4}$
			Axa mică (2b)	$M\frac{a^2}{4}$
9	Paralelipiped		Axa Gx	$M\frac{b^2+c^2}{12}$
			Axa Gy	$M\frac{c^2+a^2}{12}$
			Axa Gz	$M\frac{a^2+b^2}{12}$
10	Cilindru circular drept		Axa Gz	$M\frac{R^2}{2}$
			Axa Gx Axa Gy	$M\frac{3R^2+h^2}{12}$
11	Cilindru gol		Axa Gz	$M\frac{R^2+r^2}{2}$
			Axa Gx	$M\frac{R^2+r^2+h^2/3}{4}$

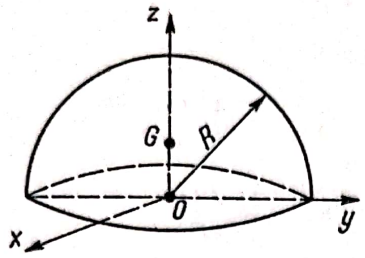
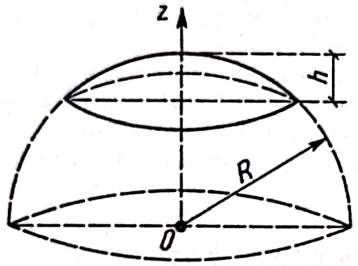
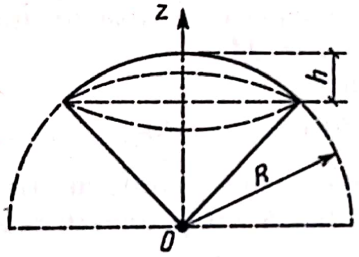
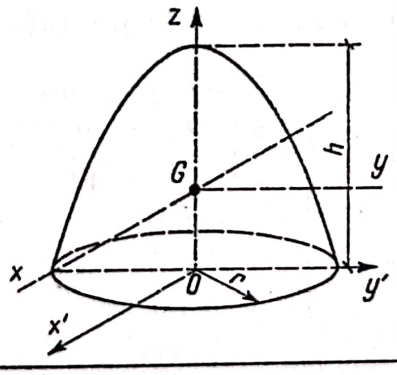
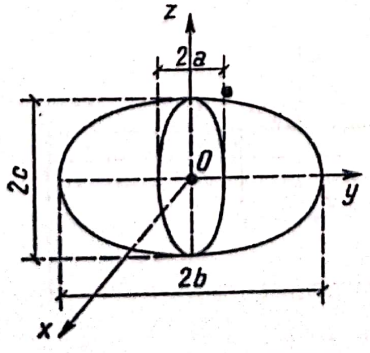
Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerție ale diferitelor corpuri (continuare)

Nr. crt.	Secțiunea	Profilul	Axa	Momentul de inerție mecanic
12	Piramidă dreptunghiulară		Axa Gz	$M\frac{a^2+b^2}{20}$
			Axa Gx	$M\frac{b^2+3h^2/4}{20}$
13	Con circular drept		Axa Gz	$M\frac{3R^2}{10}$
			Axa Gx Axa Gy	$M\frac{3}{20}\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)$
14	Trunchi de con		Axa Gz	$M\frac{3}{10}\cdot\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
15	Sferă		Diametru	$M\frac{2}{5}R^2$
			Tangentă	$M\frac{7}{5}R^2$
16	Sferă goală		Diametru	$M\frac{2}{5}\cdot\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$
			Tangenta	$M\frac{1}{5}\cdot\frac{7R^5-5R^2r^3-2r^5}{R^3-r^3}$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerție ale diferitelor corpuri (continuare)

Nr. crt.	Secțiunea	Profilul	Axa	Momentul de inerție mecanic
17	Emisferă		Axa Ox Axa Oy Axa Oz	$M\frac{2}{5}R^2$
18	Segment de sferă		Ax de simetrie Oz	$M\frac{h}{10}\cdot\frac{20R^2-15Rh+3h^2}{3R-h}$
19	Sector sferic		Ax de simetrie Oz	$M\frac{h}{5}(3R-h)$
20	Paraboloid		Axa Gz	$M\frac{R^2}{3}$
			Axa Gx Axa Gy	$M\frac{1}{18}(3R^2+h^2)$
21	Elipsoid		Axa Ox	$M\frac{b^2+c^2}{5}$
			Axa Oy	$M\frac{a^2+c^2}{5}$
			Axa Oz	$M\frac{a^2+b^2}{5}$

Scanned with OKEN Scanner

Raza de inerție reprezintă distanța pînă la axă sau pînă la pol, la care trebuie concentrată întreaga masă pentru a obține momentul de inerție axial sau polar corespunzător.

Expresiile razelor de inerție sînt:

$$i_\Delta = \sqrt{\frac{J_\Delta}{M}}; \quad i_{x_1} = \sqrt{\frac{J_{x_1}}{M}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}};$$

$$i_0 = \sqrt{\frac{J_0}{M}}; \quad i_G = \sqrt{\frac{J_G}{M}}.$$

Observație. În cazul plăcilor sau al corpurilor omogene, cînd se face abstracție de densitatea ρ, se obișnuiește a efectua calcule cu ajutorul momentelor de inerție geometrice. Calculul este în fond cu totul asemănător, deosebirea constînd în faptul că în locul elementului de masă se introduce elementul de lungime, de arie sau de volum, după natura corpului.

B. PROBLEME REZOLVATE

26.1. Să se calculeze momentul de inerție și raza de inerție a unei bare omogene, drepte, de lungime l și de masă M:

a) în raport cu centrul de greutate,

b) în raport cu unul dintre capete.

Rezolvare. a) Se aleg axele de coordonate, conform figurii 26.1, cu originea în centrul de greutate G. Se notează cu ρ densitatea liniară a barei, $\rho = \frac{M}{l}$. Se consideră un element de masă $\rho \cdot dx$ la distanța x de la originea G.

Momentul de inerție J_G, în raport cu centrul de greutate G, se calculează cu formula:

$$J_G = \int_{-l/2}^{+l/2} \rho \cdot dx \cdot x^2 = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \rho \frac{l^3}{12}$$

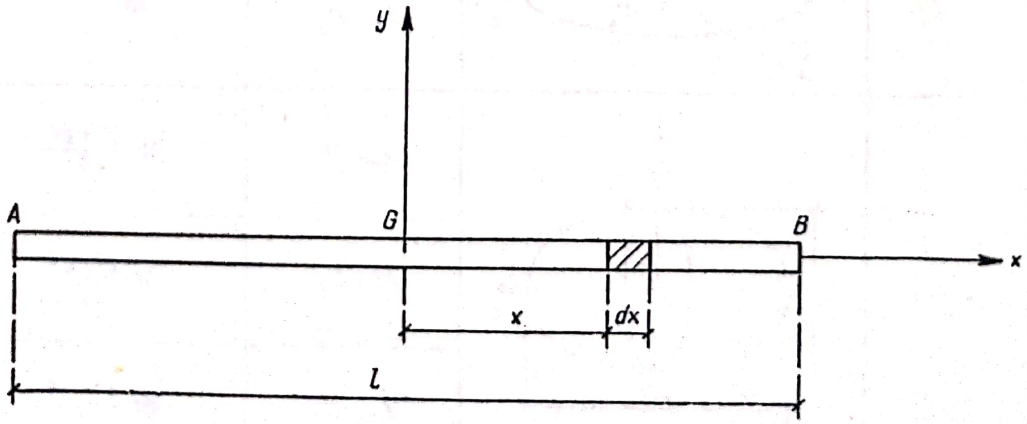


Fig. 26.1

sau introducînd masa barei $M = \rho \cdot l$:

$$J_G = \frac{Ml^2}{12}.$$

Raza de inerție în raport cu G, r_G, este:

$$i_G = \sqrt{\frac{J_G}{M}} = \frac{l^2}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

b) Momentul de inerție în raport cu capătul A, J_A, se calculează cu ajutorul teoremei lui Steiner:

$$J_A = J_G + M\left(\frac{l}{2}\right) = M\frac{l^2}{12} + M\frac{l^2}{4} = M\frac{l^2}{3}.$$

Raza de inerție r_A, în raport cu capătul A al barei, este:

$$r_A = \sqrt{\frac{Ja}{M}} = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{3};$$

$$r_A = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

26.2. Se cere să se calculeze pentru un dreptunghi $ABCD$ omogen de laturi a, b și de masă M:

a) momentul de inerție în raport cu laturile AB, AD;

b) razele de inerție în raport cu cele două axe;

c) momentul de inerție polar în raport cu centrul dreptunghiului;

d) momentul centrifug în raport cu cele două laturi;

e) să se determine direcțiile principale în colțul A al dreptunghiului.

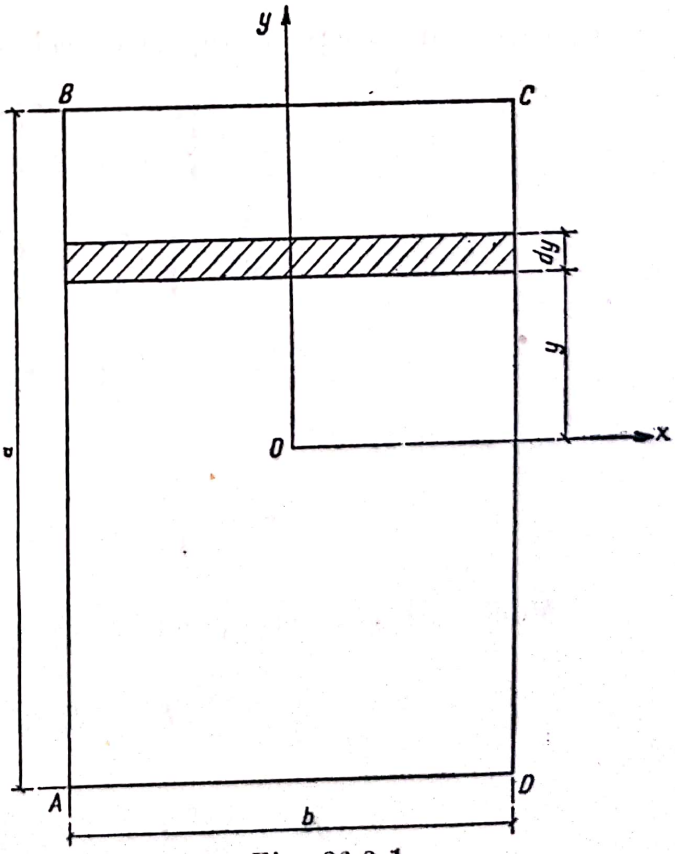


Fig. 26.2,1

Rezolvare. a) Se aleg ca axe de coordonate axele de simetrie xOy ale dreptunghiului.

Se notează cu M masa plăcii dreptunghiulare și cu ρ — densitatea suprafeței $\rho = \frac{M}{a \cdot b}$.

Momentul de inerție în raport cu axa Ox (fig. 26.2,1) se calculează cu ajutorul integralei:

$$J_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 \cdot \rho b \, dy = \rho \cdot b \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y \, dy = \rho \cdot b \, \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{\rho \cdot ba^3}{12} = \frac{Ma^2}{12}.$$

În raport cu axa Oy va rezulta în mod similar:

$$J_y = \frac{Mb^2}{12}.$$

Momentul de inerție în raport cu una dintre laturile dreptunghiului se calculează cu ajutorul formulei lui Steiner:

$$J_{AD} = J_x + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{3}.$$

În mod similar, în raport cu cealaltă latură, rezultă:

$$J_{AB} = \frac{Mb^2}{3}.$$

b) Razele de inerție în raport cu cele două axe:

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$r_{AB} = \sqrt{\frac{J_{AB}}{M}} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$r_x = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \qquad r_{AB} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

și, în mod similar:

$$r_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}; \qquad r_{AD} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

c) Momentul de inerție polar, în raport cu punctul O, se calculează din expresia:

$$J_0 = J_x + J_y;$$

deci:

$$J_0 = \frac{Ma^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Momentul centrifug al dreptunghiului, în raport cu laturile AB și Ad (fig. 26.2,2), se calculează cu formula:

$$J_{x'y'} = J_{ABD} = \rho \int_0^a \int_0^b xy\, dx\, dy = \frac{\rho a^2 b^2}{4} = M\frac{ab}{4}.$$

e) Direcția principală este dată de relația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{AB}}{J_{AB} - J_{AD}} = \frac{M\frac{ab}{2}}{M\frac{b^2}{3} - M\frac{a^2}{3}} = \frac{3ab}{2(b^2 - a^2)}.$$

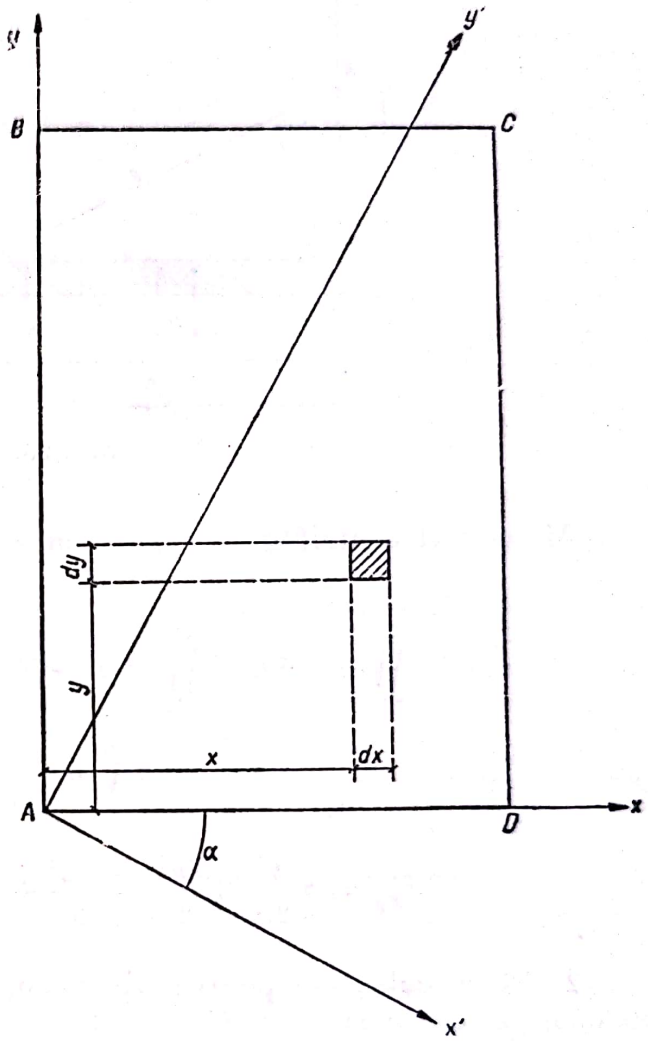


Fig. 26.2,2

26.3. 1) Să se calculeze pentru o placă cu forma unui triunghi dreptunghic, omogen, de laturi a,b,c (fig. 26.3.1), momentele de inerție axiale J_x și J_y, razele de inerție r_x și r_y și momentul de inerție centrifug, axele Ax și Ay având direcțiile catetelor.

Rezolvare. 1) Se notează cu ρ densitatea suprafeței triunghiului și cu M — masa triunghiului:

$$J_x = \int_0 x^2\, dm = \rho \int_0 x\, dy.$$

Din asemănarea triunghiului ABC și DBE rezultă:

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

sau $\frac{x}{b} = \frac{c \cdot y}{c}$;

$$J_x = \rho \int_0^c y^2 \frac{(c-y)}{c}\, b \cdot dy = \rho \frac{b}{c} \int_0^c y^2 (c-y)\, dy = \rho \frac{b}{c}\left(c\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^c$$

$$J_x = \rho \frac{bc^3}{12};$$ ținînd seamă că: $\rho \cdot \frac{bc}{2} = M$,

rezultă:

$$J_x = \frac{Mc^2}{6}, \quad \text{respectiv} \quad J_y = \frac{Mb^2}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Razele de inerție sînt:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \frac{c^2}{6} = \frac{c}{\sqrt{6}} \quad \text{și} \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

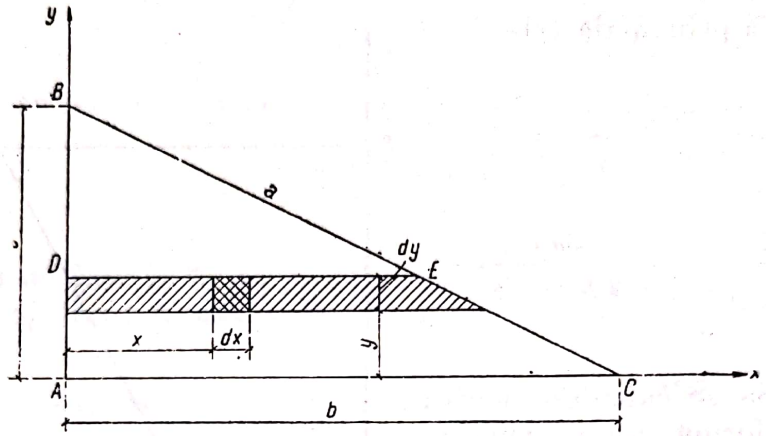


Fig. 26.3, 1)

Momentul centrifug în raport cu axele Ax și Ay are expresia:

$$J_{xy} = \iint xy \cdot dm = \iint x \cdot y \cdot \rho dx\, dy = \rho \int_0^c dy \int_{\frac{c-y}{c}b}^{b} x \cdot y \cdot dx =$$

$$= \rho \int_0^b y \frac{(c-y)^2}{2c^2} b^2 dy$$

$$J_{xy} = \rho \frac{b^2}{2c^2} \left| \left(\frac{c^2y^2}{2} - \frac{2cy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \right|_0^c = \rho \frac{b^2c^2}{12} M \cdot \frac{bc}{12}.$$

2) Să se calculeze pentru placa omogenă triunghiulară din figura 26.3,2 momentele de inerție:

a) în raport cu baza AC;
b) în raport cu axa paralelă, cu baza care trece prin centrul de greutate G;
c) în raport cu axa $x''x''$ paralelă la AC care trece prin vîrful B;
d) în raport cu înălțimea dusă prin B;
e) momentul de inerție polar în raport cu vîrful B;

Rezolvare. 2) Se aleg axele de coordonate conform figurii 26.3,2.
a) *Momentul de inerție în raport cu baza AC*
Se consideră masa elementară a fîșiei $DEFH$:

$$dm = \rho x dy$$

$$J_x = \int_0^h x\, dy\, y^2.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABC și DBE rezultă:

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h},$$

de unde $x = \frac{b}{h}(h-y)$;

$$J_x = \rho \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\, y^2 dy = \rho \cdot \frac{b}{h}\left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right) = \frac{\rho b \cdot h^3}{12}.$$

Deoarece $\frac{\rho bh}{2} = M$,

$$J_x = \frac{Mh^2}{6}.$$

b) *Momentul de inerție în raport cu axa $x'x'$* care trece prin centrul de greutate:

$$J_{x'} = J_x - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 =$$

$$= M\frac{h^2}{6} - M\frac{h^2}{9} = M\frac{h^2}{18}.$$

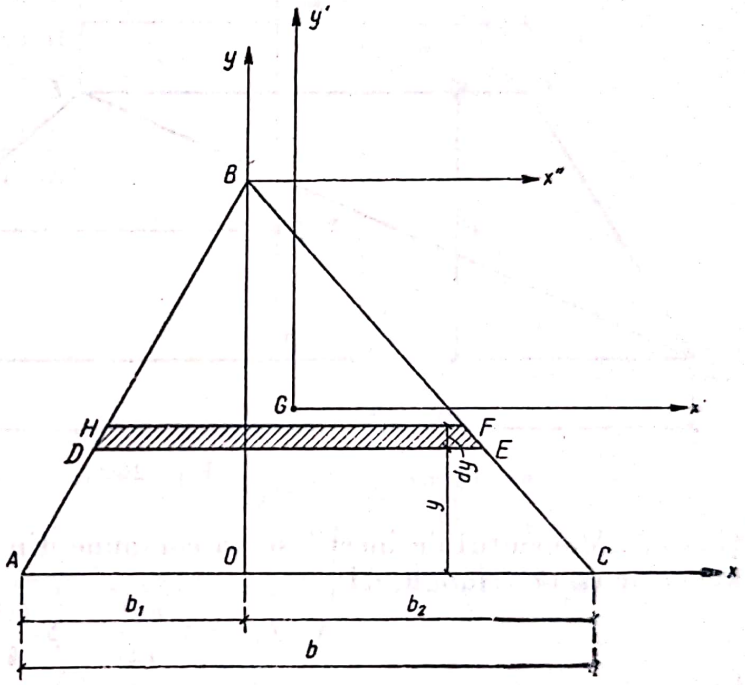


Fig. 26.3,2)

c) *Momentul de inerție în raport cu axa $x''x''$* care trece prin vîrful B:

$$J_{x''} = J_{x'} + M\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = M\frac{h^2}{18} + M\frac{4h^2}{9} = M\frac{h^2}{2}.$$

d) *Momentul de inerție în raport cu axa Oy.* Observînd că înălțimea h împarte triunghiul dat în două triunghiuri dreptunghice, cu bazele b_1 și b_2:

$$J_y = J_{y'} + J_{y_2} = \rho h \frac{b_1^3 + b_2^3}{12} = M\frac{b_1^3 + b_2^3}{6b}.$$

e) *Momentul de inerție polar în raport cu B:*

$$J_B = J_{x''} + J_y = \frac{Mh^2}{2} + M\frac{b_1^3 + b_2^3}{6b} = M\left[\frac{h^2}{2} + \frac{b_1^3 + b_2^3}{6b}\right].$$

26.4. Se cere să se calculeze momentul de inerție al unui trapez (fig. 26.4):
a) în raport cu una dintre baze;
b) în raport cu axa paralelă la bază, trecînd prin centru de greutate G.

Rezolvare. Se aleg axele de coordonate Ox ca în figura 26.4. Se descompune trapezul în două triunghiuri: $\triangle CDE$ și $\triangle CEF$, ambele avînd înăl-

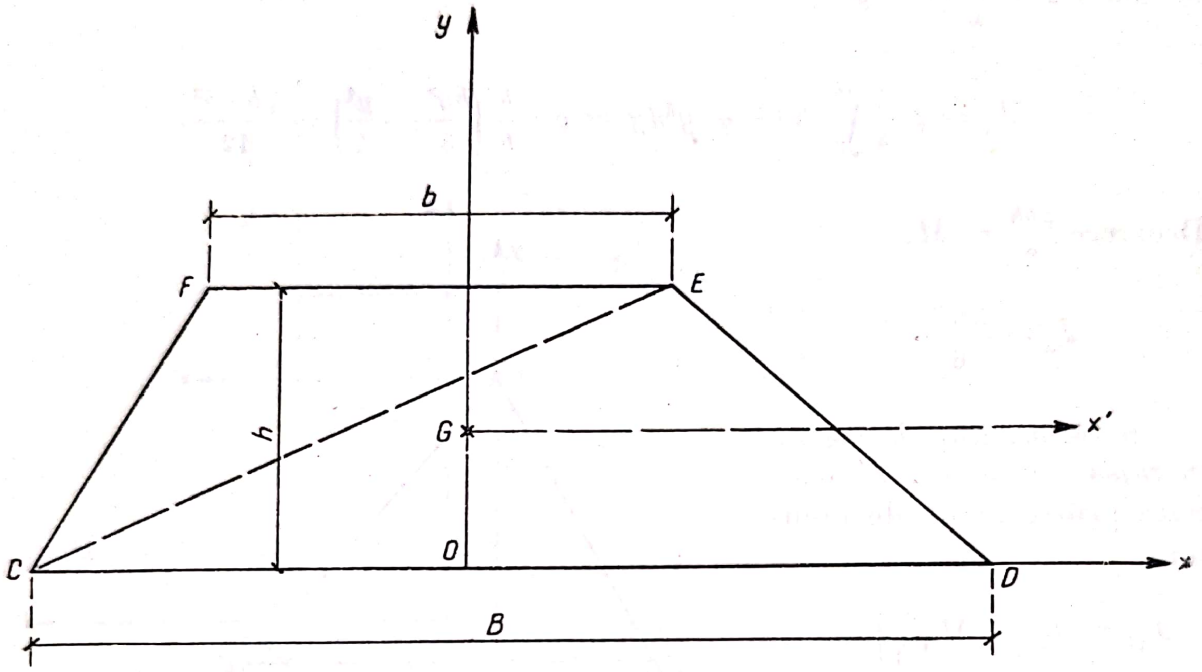


Fig. 26.4

țimea h. Momentul de inerție se va compune din suma momentelor de inerție ale celor două triunghiuri:

$$\text{a)}\quad J_x = \rho \frac{Bh^3}{12} + \rho \frac{bh^3}{4}.$$

Cum

$$\rho \frac{B+b}{2} h = M,$$

$$J_x = \frac{\rho(B+3b)h^3}{12} = \rho \frac{B+b}{B+b} \cdot \frac{(B+3b)h^3}{2 \cdot 6}$$

sau:

$$J_x = M \frac{h^2}{6} \cdot \frac{B+3b}{B+b}.$$

$$\text{b)}\quad J_{x'} = J_x - M(OG)^2;$$

$$OG = \frac{h}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b};$$

$$J_{x'} = M \frac{h^2}{6} \cdot \frac{B+3b}{B+b} - M \frac{h^2}{9} \cdot \frac{(B+2b)^2}{(B+b)^2} = M \frac{h^2}{18} \cdot \frac{3(B+3b)(B+b) - 2(B+2b)^2}{(B+b)^2};$$

$$J_{x'} = \frac{Mh^2}{18} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{(B+b)^2}.$$

26.5. Se cere să se determine pentru un arc de cerc de rază R și masă M:

a) momentul de inerție în raport cu axa de simetrie și cu axa perpendiculară pe ea trecînd prin centrul cercului și prin centrul de greutate;

b) momentul de inerție polar în raport cu centrul cercului și cu centrul de greutate;

c) elipsa de inerție în centrul cercului și în centrul de greutate.

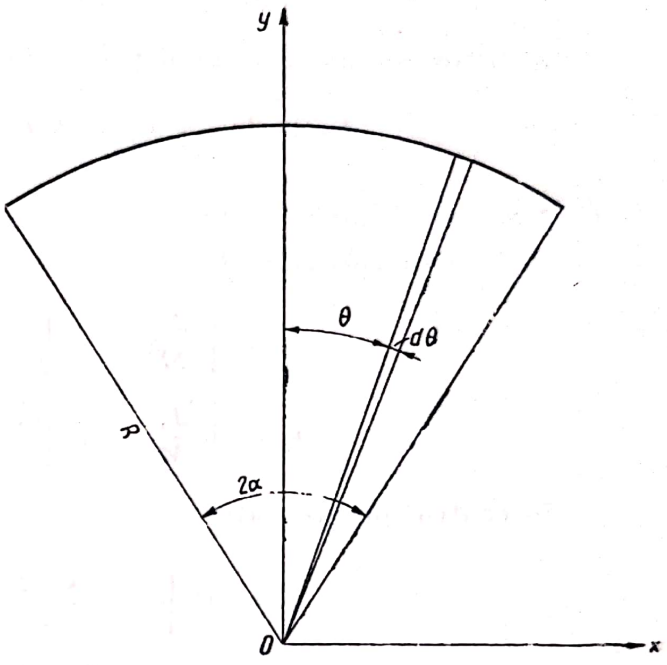


Fig. 26.5

Rezolvare. Se aleg axele de coordonate conform figurii 26.5. Se consideră masa unui element de arc, $Rd\theta$ la distanța unghiulară θ de axa de simetrie:

a) *Momentele de inerție axiale* — în raport cu axele trecînd prin centrul cercului:

$$J_x = \int \rho\, Rd\theta \cdot y^2 =$$

$$= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho\, Rd\theta \cdot R^2 \cos^2\theta;$$

$$J_x = \rho R^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \rho R^3 \left| \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$J_y = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho R d\theta x^2 = \rho R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2\theta d\theta = \rho R^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\, d\theta;$$

$$J_y = \rho R^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$J_x = \rho\, R^2 \cdot R \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{MR^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right);$$

$$J_y = \rho\, R^2 \cdot R \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) = \frac{MR^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right);$$

— în raport cu axele trecînd prin centrul de greutate:

J_y rămîne neschimbat,

$J_{x'} = I_x - Md^2$,

unde d este distanța centrului de greutate de la centrul cercului:

$$d = R \frac{\sin\alpha}{\alpha};$$

$$J_{x'} = MR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) - MR^2 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} = MR^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *Momentul de inerție polar*

— în raport cu centrul cercului:

$$J_0 = J_x + J_y = 2MR^2;$$

— în raport cu axele trecînd prin centrul de greutate:

$$J_G = J_{x'} + J_y = MR^2\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right).$$

c) *Semiaxele elipsei de inerție*

— în centrul cercului O:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = R\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}};$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = R\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}};$$

— în centrul de greutate:

$$i_1' = R\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}};$$

$$i_2' = R\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}.$$

26.6. Se cere să se calculeze pentru un sector circular omogen, de masă M, de rază R și unghi la centru 2α:

a) momentul de inerție și razele de inerție în raport cu axa de simetrie și cu axa perpendiculară pe prima, trecînd prin centrul cercului;

b) momentul de inerție polar în raport cu centrul cercului O;

c) aplicație în cazul sfertului de cerc, semicercului și cercului.

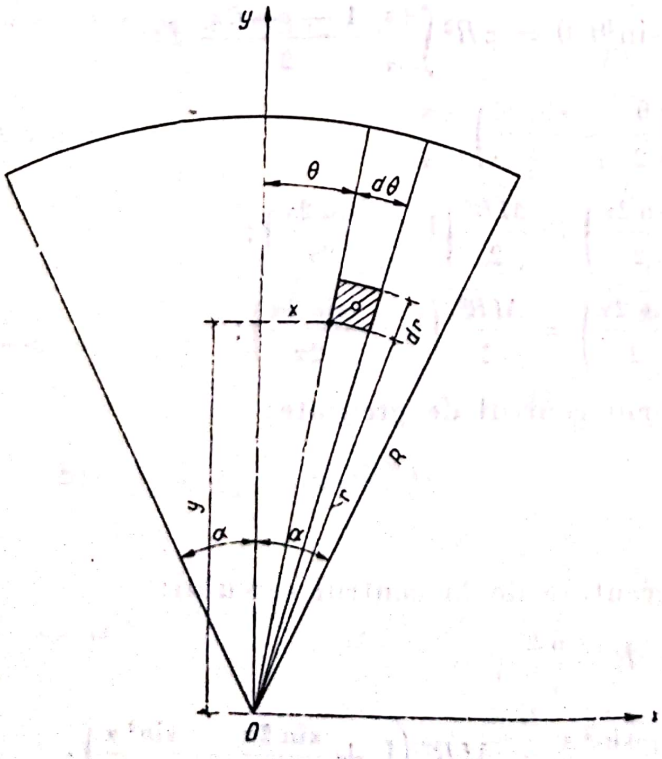


Fig. 26.6

Rezolvare. Se aleg ca axe de coordonate Ox și Oy, axele în raport cu care se calculează momentele de inerție și un element de masă $\rho r d\theta\, dr$.

Coordonatele elementului de masă în funcție de θ sînt

$$x = r\sin\theta; \quad z = r\cos\theta.$$

a) *Momentele de inerție* J_x *și* J_y:

$$J_x = \sum md^2 = \int_0^R \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho\, r d\theta dr \cdot y^2 = \rho \int_0^R \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^3 \cos^2\theta dr d\theta = \frac{\rho R^4}{4} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2\theta d\theta;$$

$$J_x = \frac{\rho R^4}{4} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\rho R^4}{4} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{\rho R^4}{4}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right).$$

Cum $\rho R^2 \alpha = M$,

$$J_x = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right);$$

$$J_y = \int_0^R \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho r\, d\theta dr x^2 = \rho \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \sin^2\theta dr d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right);$$

$$J_y = \frac{MR^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right).$$

Razele de inerție:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}$$

și

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_y}{M}} = \frac{R}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}.$$

b) *Momentul polar* J_0

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) + \frac{MR^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = \frac{MR^2}{2}.$$

Deci:

$$J_0 = \frac{MR^2}{2}.$$

c) *Aplicație la sfert de cerc, semicerc, cerc*

α	J_x	J_y	J_0	J_{cx}
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{MR^2}{4\pi}(\pi+2)$	$\frac{MR^2}{4\pi}(\pi-2)$	$\frac{MR^2}{0}$	$\frac{MR^2}{4}\left(1+\frac{2}{\pi}-\frac{90}{9\pi^2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{MR^2}{8}$	$\frac{MR^2}{8}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}\left(1-\frac{64}{9\pi^2}\right)$
π	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{4}$	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{MR^2}{4}$

26.7. Se cere să se calculeze momentul de inerție al sectorului circular de la problema 26.6, în raport cu axa Gx', care trece prin centrul de greutate G și este perpendiculară la axa de simetrie Oy.

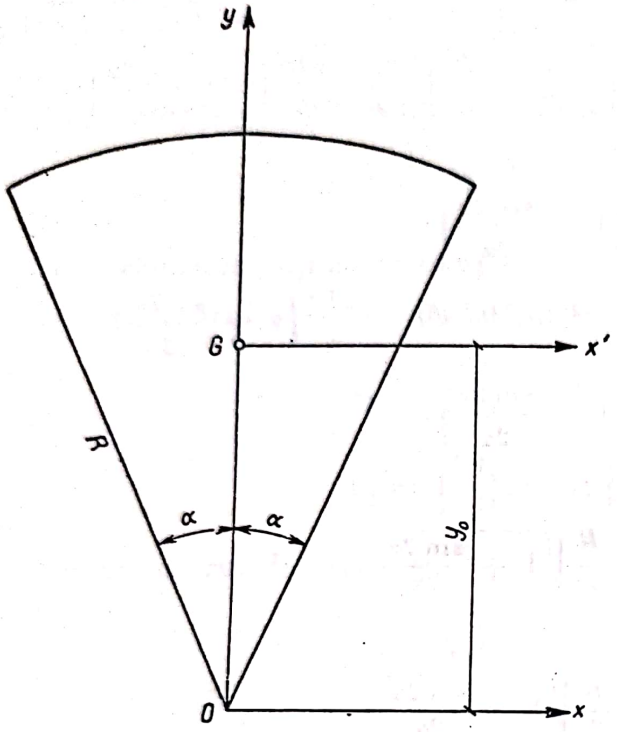


Fig. 26.7

Rezolvare. Cunoscînd

$$J_x,\ J_{x'} = J_x - My_0^2,$$

în care y_0 este distanța centrului de greutate G de la centrul cercului O:

$$y_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$J_{x'} = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) - \frac{M4R^2}{9} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{\alpha^2};$$

$$J_{x'} = \frac{MR^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16\sin^2\alpha}{9\alpha^2}\right).$$

26.8. Se cere să se traseze elipsele de inerție în centrul cercului O și în centrul de greutate pentru sectorul circular din problema 26.6.

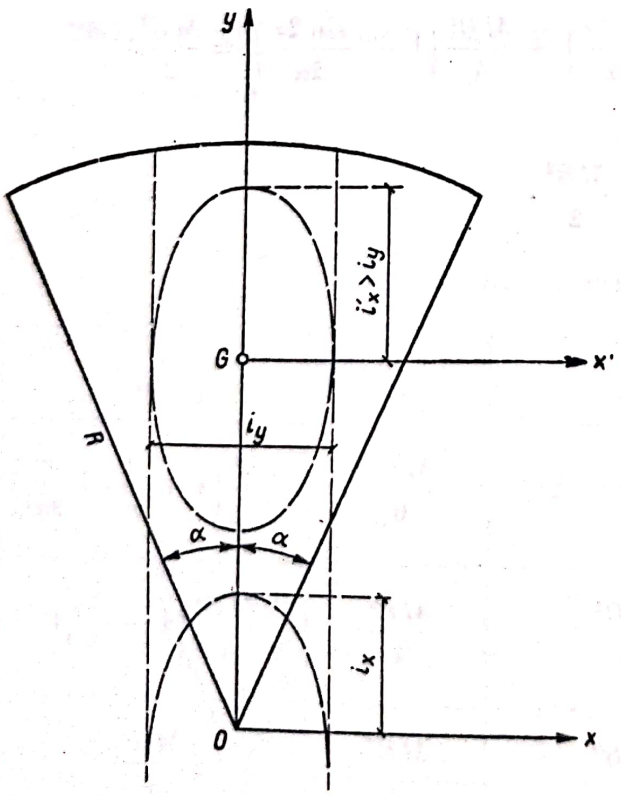


Fig. 26.8

Rezolvare. J_x, J_y și J_x sînt momente de inerție principale, deoarece Oy este axa de simetrie.

Elipsele de inerție vor avea axele după Ox și Oy, respectiv Gx' și Gy și sînt determinate prin semiaxele i_x, i_y și i'_x, i'_y care au expresiile:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} = R\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}};$$

$$i_y = R\sqrt{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}};$$

$$i'_x = \sqrt{\frac{J'_x}{M}} =$$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{1 + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{16\sin^2\alpha}{9\alpha^2}}.$$

Cunoscînd semiaxele, elipsa se trasează cu ajutorul uneia dintre metodele de construcție geometrice cunoscute.

26.9. Se cere să se determine momentele de inerție principale și elipsa de inerție în raport cu centrul de greutate al suprafeței omogene din figura 26.9 pentru dimensiunile:

$$h = 20 \text{ cm}; \quad b = 8 \text{ cm};$$
$$g = 1 \text{ cm}; \quad g_1 = 1{,}3 \text{ cm};$$
$$\rho = 1.$$

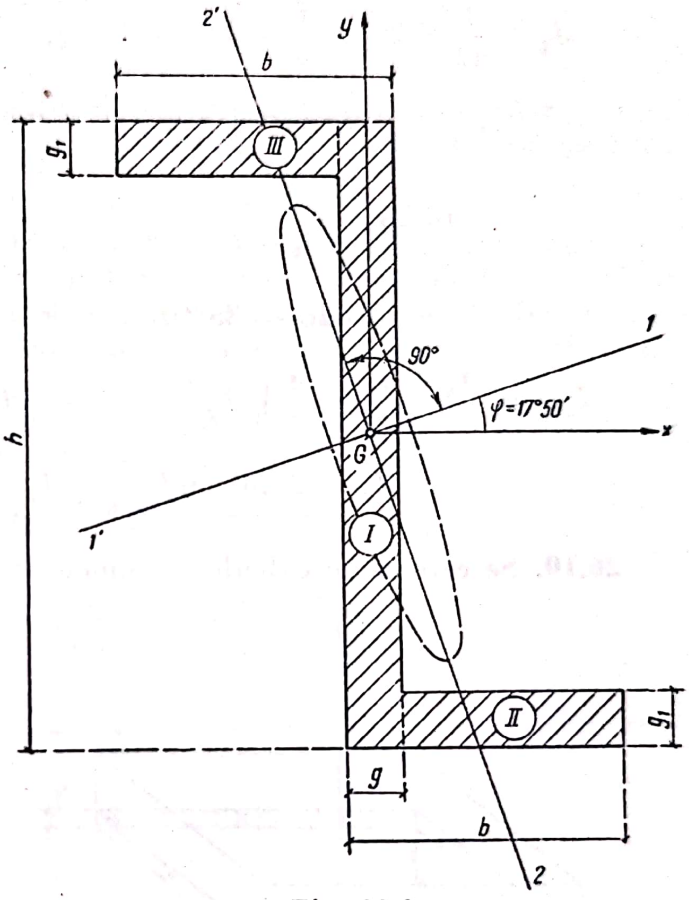


Fig. 26.9

Rezolvare. Se aleg axele de coordonate conform figurii 26.9.

Se descompune suprafața în trei dreptunghiuri: *I* de dimensiuni 1×20 cm, *II* și *III* de $7 \times 1{,}3$ cm:

$$J_x = J_{xI} + J_{xII} + J_{xIII} = \\ = J_{xI} + 2J_{xII};$$

$$J_{xI} = \frac{1}{12}\rho\, gh^3;$$

$$J_{xII} = J_{xIII} = \\ = \frac{1}{12}\rho\, g_s^3 (b - g) + \\ + \rho\, (b - g) g_1 \left(\frac{h - g_1}{2}\right)^2;$$

$$J_x = \frac{1}{12}\rho\, gh^3 + 2\frac{1}{12}\rho\, g_1^3 (b - g) + 2\rho\, (b - g)\, g_1 \left(\frac{h - g_1}{2}\right)^2;$$

$$J_y = J_{yI} + J_{yII} + J_{yIII};$$

$$J_{yI} = \frac{1}{12}\rho\, hg^3;$$

$$J_{yII} = J_{yIII} = \frac{1}{12}\rho\, (b - g)^3 g_1 + \rho\, (b - g)\, g_1 \frac{b^2}{4};$$

$$J_y = \frac{1}{12}\rho\, hg^3 + \frac{1}{12}\rho\, (b - g)^3 g_1 + 2\frac{\rho\, (b - g) g_1 b^2}{4};$$

$$J_{xy} = J_{xyI} + J_{xyII} + J_{xyIII} = J_{xyI} + 2J_{xyII};$$

$$J_{xyI} = O; \quad J_{xyII} = \rho\, (b - g)\, g_1 \frac{b}{2} \cdot \frac{h - g_1}{2};$$

$$J_{xy} = -2\rho\, (b - g)\, g_1 \frac{h - g_1}{2}.$$

Valorile numerice vor fi:

$$J_x = \frac{1}{12} \times 1 \times 20^3 + \frac{1}{6} \times 1{,}3 \times 7 + 2 \times 7 \times 1{,}3 \times 9{,}35^2 = 2\,260 \text{ cm}^2 \cdot \text{g};$$

$$J_y = \frac{1}{12} \times 20 + \frac{1}{6} \times 7^3 \times 1{,}3 + \frac{2{,}7 \times 1{,}3 \times 8^2}{4} = 367 \text{ cm}^2 \cdot \text{g};$$

$$J_{xy} = -2 \times 7 \times 1{,}3 \times 4 \times 9{,}35 = -680 \text{ cm}^2 \cdot \text{g};$$

$$\operatorname{tg} 2y = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{-2 \times 680}{367 \times 2\,260} = \frac{1\,360}{1\,893} = 0{,}718$$

$$2\varphi = 35°40'; \qquad \underline{\varphi = 17°50';}$$

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} = 1\,313 \pm 948 \text{ cm}^2 \cdot \text{g};$$

$$\underline{J_1 = 2\,261 \text{ cm}^4;} \qquad \underline{J_2 = 365 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}.}$$

26.10. Se cere să se calculeze momentul de inerție al unui paralelipiped omogen, de laturi a,b,c, în raport cu axa de simetrie paralelă cu latura c.

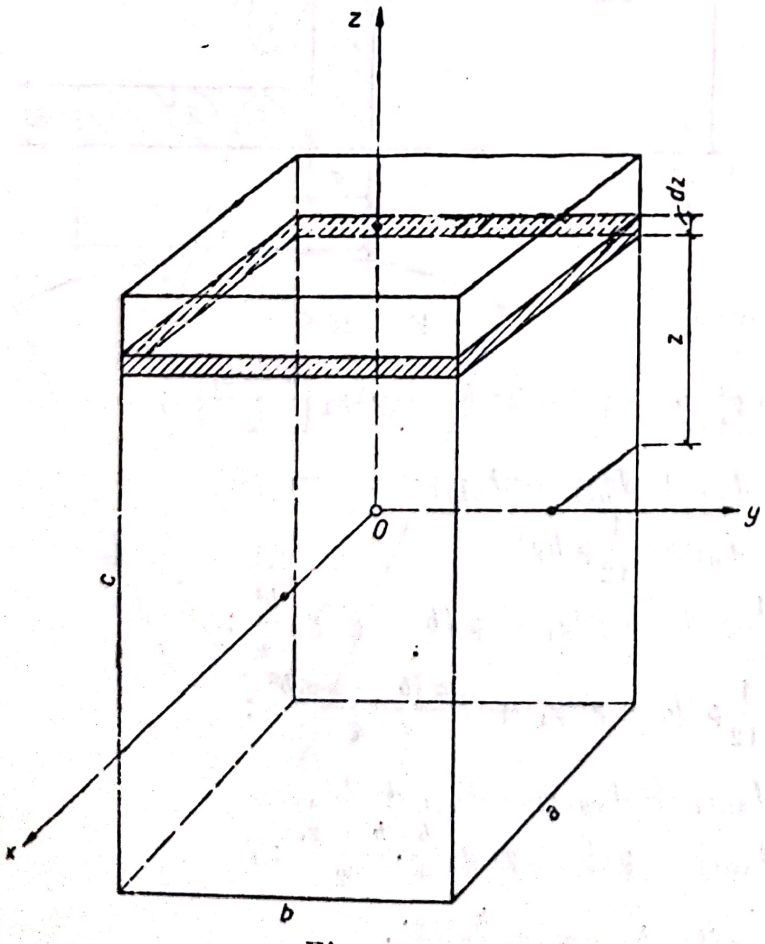


Fig. 26.10

Rezolvare. Se alege sistemul de coordonate conform figurii 26.10. Axa de simetrie este Oz.

Se consideră masa unui paralelipiped elementar de dimensiuni $a \cdot b \cdot dz$ și de masă $dm = \rho a \cdot b \cdot dz$.

Acesta poate fi considerat ca o placă dreptunghiulară.

Momentul de inerție al paralelipipedului elementar, în raport cu axa Oz, este același cu momentul de inerție polar al plăcii dreptunghiulare în raport cu centrul:

$$dJz = dm \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Momentul de inerție al paralelipipedului va fi:

$$J_z = \int dm \frac{a^2 + b^2}{12} = \int_{-c/2}^{c/2} \rho ab dz \frac{a^2 + b^2}{12} = \rho ab \frac{a^2 + b^2}{12} \int_{-c/2}^{c/2} dz$$

$$J_z = \rho abc \frac{(a^2 + b^2)}{12} = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

26.11. Să se determine momentul de inerție al unui con circular, drept, omogen, în raport cu axa de simetrie și în raport cu o axă paralelă cu baza care trece prin centrul de greutate.

Rezolvare. a) *Momentul de inerție în raport cu axa de simetrie Oz.*

Se notează raza bazei cu R și înălțimea cu h. Se consideră un trunchi de con elementar la distanța z de vîrf, avînd raza r și înălțimea dz (fig. 26.11). Acest trunchi de con poate fi considerat ca o placă circulară. Masa lui este $dM = \rho\pi r^2 dz$.

Momentul lui de inerție în raport cu axa Oz este același cu momentul de inerție polar în raport cu centrul său:

$$dJ_z = \frac{dMr^2}{h^2};$$

$$J_z = \int_0^h \frac{dMr^2}{2} = \int_0^h \frac{\rho\pi r^2 dz r^2}{2} = \int_0^h \frac{\rho\pi r^4}{2} dz.$$

Din triunghiurile asemenea ABO și CDO rezultă:

$$\frac{2r}{2R} = \frac{2}{h} \text{ sau: } r = \frac{zR}{h};$$

$$J_z = \int_0^h \frac{\rho\pi R^4 z^4}{2h^4} dz = \frac{\rho\pi R^4}{2h^4} \int_0^h z^4 dz =$$

$$= \frac{\rho\pi R^4 h^5}{2h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} MR^2.$$

b) *Momentul de inerție în raport cu o axă paralelă* cu baza trecînd prin centrul de greutate.

Se calculează întîi momentul de inerție în raport cu axa Ox trecînd prin vîrf (fig. 26.11).

Momentul de inerție al unui cilindru elementar în raport cu axa Ox va fi:

$$dJ_x = dM \frac{r^2}{4} + dMz^2;$$

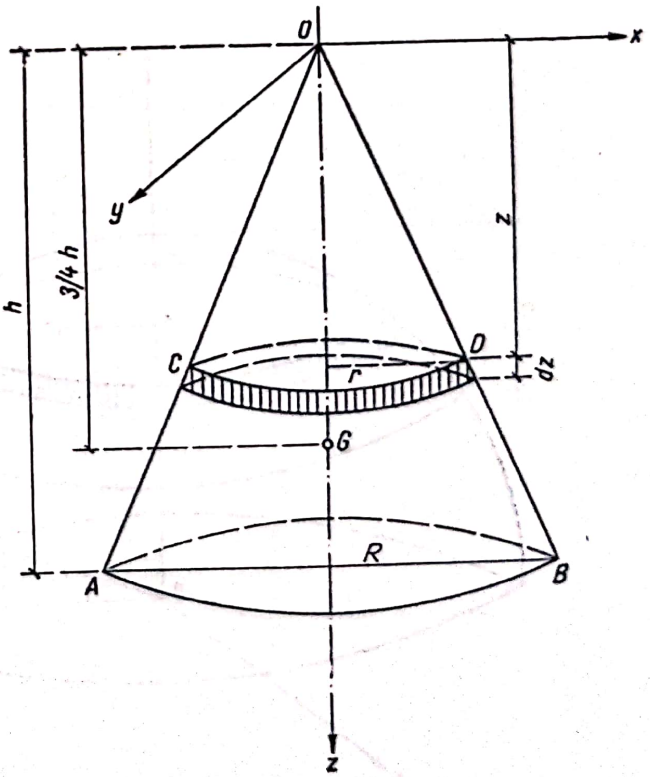


Fig. 26.11

cum

$$r = \frac{R}{h} z \quad \text{și} \quad dM = \rho\pi r^2 dz,$$

$$dJ_z = \frac{\rho\pi r^2 dz \cdot r^2}{4} + \rho\pi r^2 dz\, z^2 = \rho\pi \int_0^h \frac{r^4 dz}{4} + r^2 z^2 dz;$$

$$J_z = \rho\pi \int_0^h \left[\frac{R^4}{4h^4} z^4 + \frac{R^2}{h^2} z^4\right] dz = \frac{\rho\pi R^2}{4h^4} \int_0^h (R^2 + 4h^2) z^4 dz;$$

$$J_z = \frac{\rho\pi R^2 (R^2 + 4h^2)}{4h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{\rho\pi R^2 h (R^2 + 4h^2)}{20} = \frac{3}{20} M (R^2 + 4h^2).$$

În raport cu axa Gx', trecînd prin centrul de greutate,

$$J_{x'} = J_x - Md^2 = J_x - M \frac{3}{4} h^2 = \frac{3}{20} M (R^2 + 4h^2) - \frac{9}{16} M h^2 = \frac{3}{20} M \left(R^2 + \frac{5h^2}{4}\right).$$

26.12. Se cere să se calculeze momentul de inerție al unui segment sferic omogen, de masă M, avînd raza sferei R și înălțimea h. Caz particular: emisferă.

Rezolvare. Se aleg axele de coordonate conform figurii 26.12. Axa Oz este axa de simetrie.

Se separă prin două plane paralele și finit vecine un cilindru elementar, echivalent cu o placă circulară de rază r, de grosime dz și de masă $dM = \rho\pi r^2 dz$.

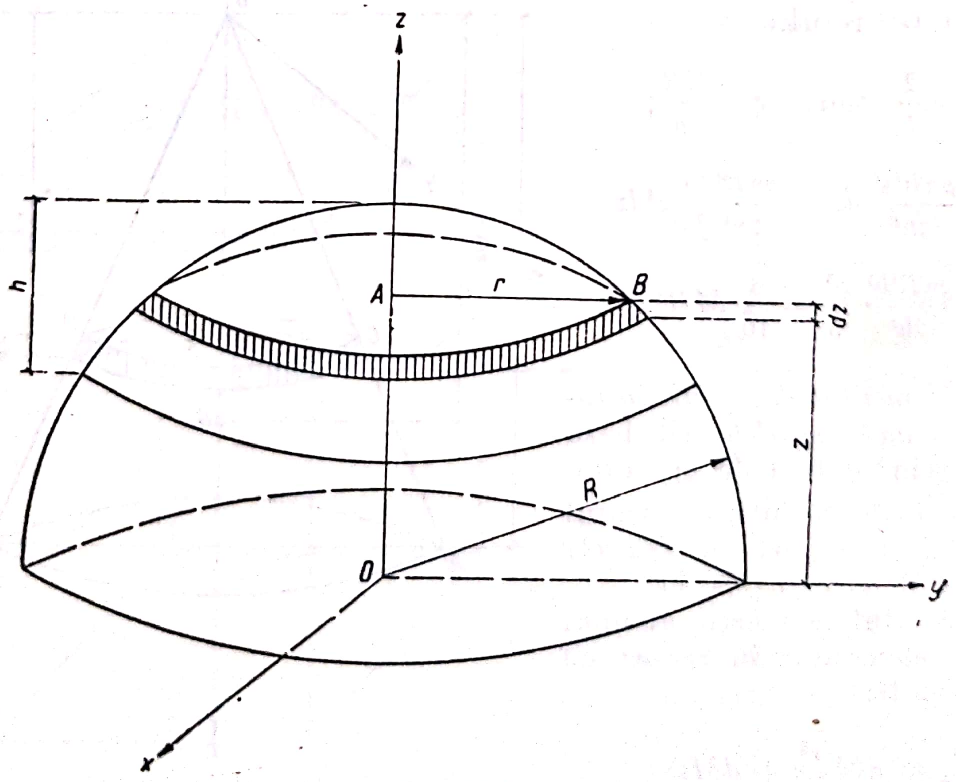


Fig. 26.12

Momentul de inerție al acestui element de masă în raport cu axa Oz, identic cu momentul de inerție polar în raport cu centrul circular, este:

$$dJ_z = \frac{dMr^2}{2} = \frac{\rho\pi r^2 dz r^2}{2};$$

$$J_z = \int_{R-h}^{R} dJ_z = \int_{R-h}^{R} \frac{\rho\pi r^4 dz}{2}.$$

Cum din triunghiul DAB: $r^2 = R^2 - z^2$,

$$J_z = \int_{R-h}^{R} dJ_z = \int_{R-h}^{R} \frac{\rho\pi (R^2 - z^2)^2 dz}{2} = \frac{\rho\pi}{2} \int_{R-h}^{R} (R^4 - 2R^2z^2 - z^4)dz;$$

$$J_z = \frac{\rho\pi}{2} \left(R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 - \frac{z^5}{5} \right) \Bigg|_{R-h}^{R} = \frac{\rho\pi h^3}{30} (20R^2 - 15Rh + 3h^2).$$

$$\text{Cum } \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)\rho = M,$$

$$J_z = M \frac{h}{10} \cdot \frac{20\ R^2 - 15\ Rh + 3h^2}{2R - h}.$$

Caz particular: emisferă,

$$h = R,$$

$$J_z = M \frac{R}{10} \cdot \frac{20R^2 - 15R^2 + 3R^2}{2R} =$$

$$= \frac{2}{5} MR^2.$$

26.13. Se cere să se calculeze momentul de inerție al unui paraboloid de revoluție omogen, avînd baza de rază R și înălțimea h, în raport cu axa de simetrie.

Rezolvare. Se aleg axele conform figurii 26.13. Prin două plane infinit apropiate se separă din paraboloid un cilindru elementar (fig. 26.13) avînd masa:

$$dm = \rho\pi r^2 dz.$$

Acest cilindru elementar poate fi considerat ca o placă circulară.

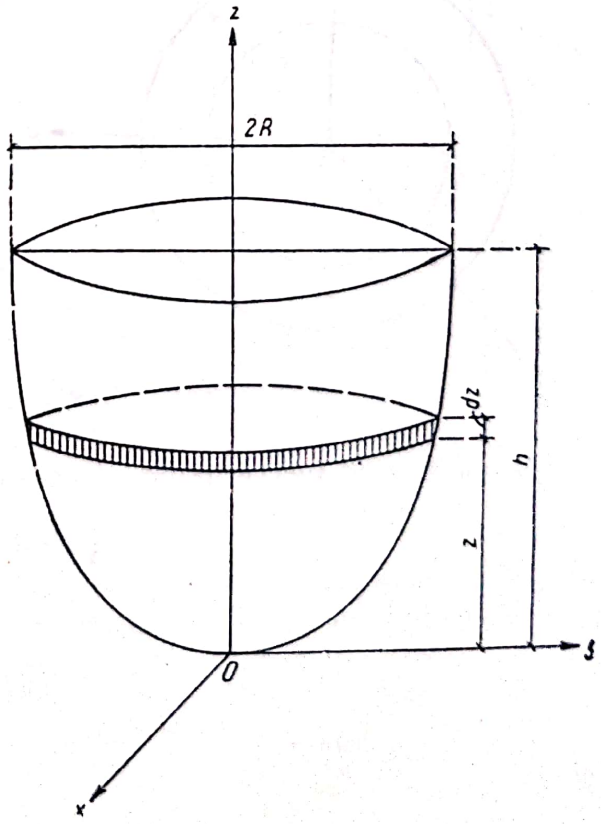


Fig. 26.13

Momentul de inerție în raport cu axa Oz este același cu momentul de inerție polar în raport cu centrul cercului:

$$dJ_z = dm\,\frac{r^2}{2} = \frac{\rho\pi r^3}{2}\,dz.$$

Momentul de inerție al paraboloidului este:

$$J_z = \int_0^h dJ_z = \int_0^h \frac{\rho\pi r^3}{2}\,dz = \frac{\rho\pi R^4 h}{8}.$$

$$\text{Cum } \frac{\rho\pi R^2 h}{2} = M, \quad J_z = \frac{M\cdot R^2}{4}.$$

26.14. Să se calculeze momentul de inerție al unei emisfere de masă M și rază R, în raport cu un diametru al suprafeței de bază.

Rezolvare (fig. 26.14). Pentru a calcula momentul de inerție cerut este util să se stabilească în prealabil momentul de inerție al unei suprafețe sferice față de un diametru al ei.

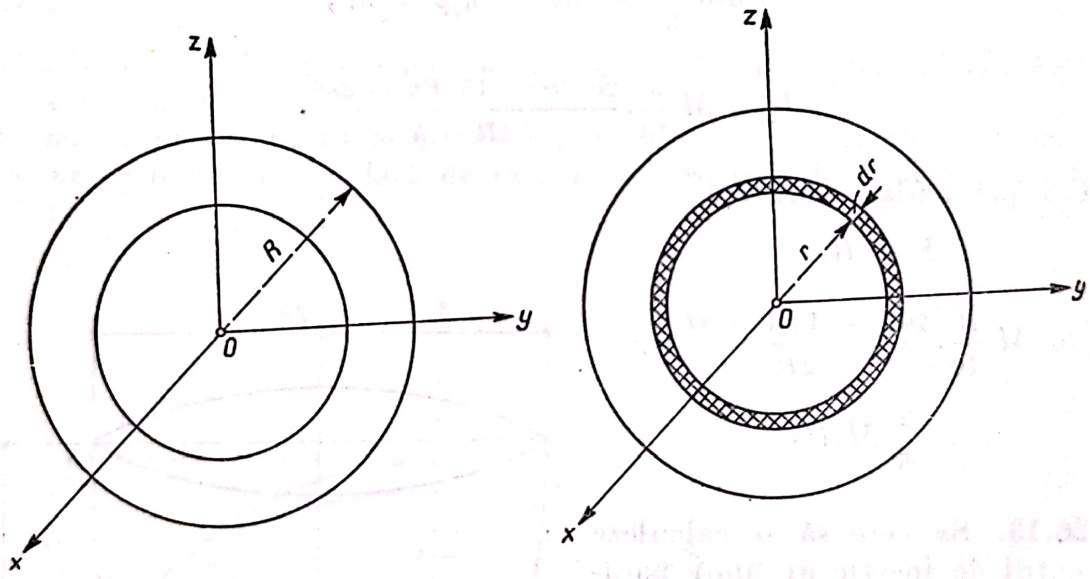


Fig. 26.14

Momentul de inerție polar al acestei suprafețe este:

$$J_0 = \int R^2\,dm = MR^2.$$

Observînd că datorită simetriei există relațiile:

$$J_x O_y = J_y O_z = J_z O_x;$$

$$J_0 = J_x O_y + J_y O_z + J_z O_x$$

și

$$J_x = J_x O_y + J_x O_z,$$

se deduce:

$$J_x = \frac{2}{3} MR^2.$$

Pentru a stabili momentul de inerție al unei sfere în raport cu o axă xx' se poate utiliza relația precedentă folosind o suprafață de grosime dr. Momentul de inerție al unui element de volum astfel obținut, în raport cu axa xx', este:

$$dJ_{xx'} = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{2}{3} r^2 \rho \cdot 2\pi r^2 dr.$$

Rezultă

$$J_{xx'} = \int_v dJ_{xx'} = \frac{4\pi}{3} \rho \int_0^R r^4 dr =$$
$$= \frac{4\pi}{3 \cdot 5} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2.$$

26.15. Să se stabilească momentele de inerție mecanice, în raport cu axele care trec prin centrul de greutate, pentru un corp format dintr-un cilindru la ale cărui capete s-au adăugat două conuri egale (fig. 26.15). Masa cilindrului este M_1 și a unui con este M_2. Raza bazelor este r.

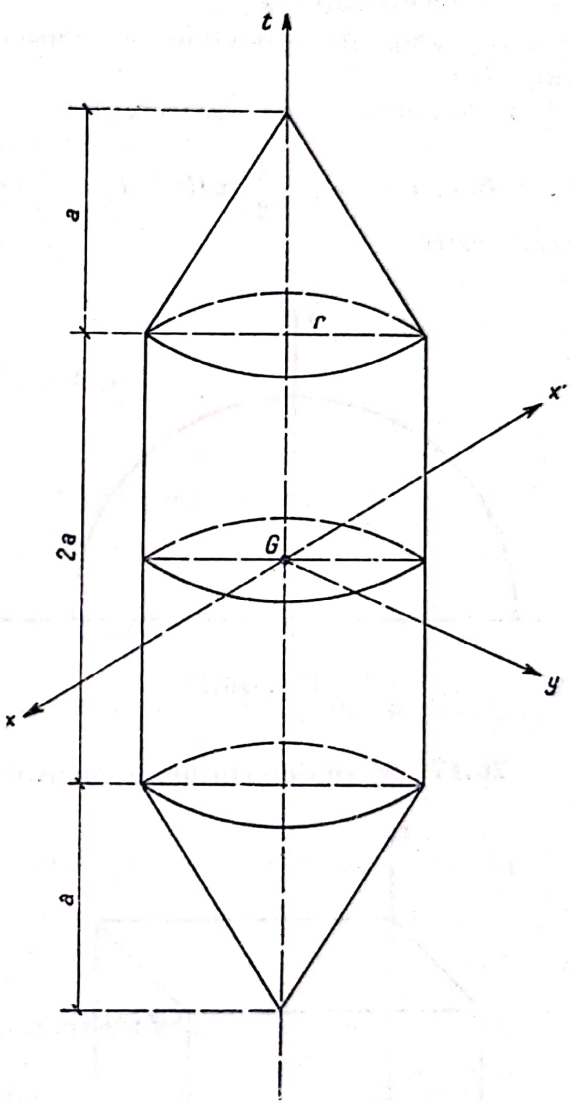


Fig. 26.15

Rezolvare. Momentul de inerție în raport cu axa de simetrie Gz este:

$$J_z = M_1 \frac{r^2}{2} + 2M_2 \frac{2r^2}{10}.$$

Dacă se notează cu M masa întregului corp se obține:

$$M_1 = \frac{3}{4} M \text{ și } M_2 = \frac{1}{8} M.$$

Rezultă:

$$J_z = \frac{9}{20} Mr^2.$$

Momentul de inerție în raport cu o axă xx' care trece prin centrul de greutate G este:

$$J_{xx'} = M_1 \frac{3r^2 + 4a^2}{12} + 2M_2 \frac{3}{20} \left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right) + 2M_2 \left(a + \frac{a}{4}\right)^2.$$

Înlocuind valorile cuvenite pentru M_1 și M_2 se obține:

$$J_{xx'} = M \left(\frac{9}{40} r^2 + \frac{13}{20} a^2\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME NEREZOLVATE

26.16. Să se determine momentele de inerție ale unei bare rectilinii în formă de semicerc (fig. 26.16), de rază R și densitate specifică liniară ρ față de:

— diametrul care unește extremitățile semicercului Ox;

— axa de simetrie a semicercului Oy;

— centrul O al semicercului.

Răspuns: $J_x = \frac{1}{2}\pi\rho R^3$; $J_y = \frac{1}{2}\pi\rho R^3$; $J_0 = \pi\rho R^3$.

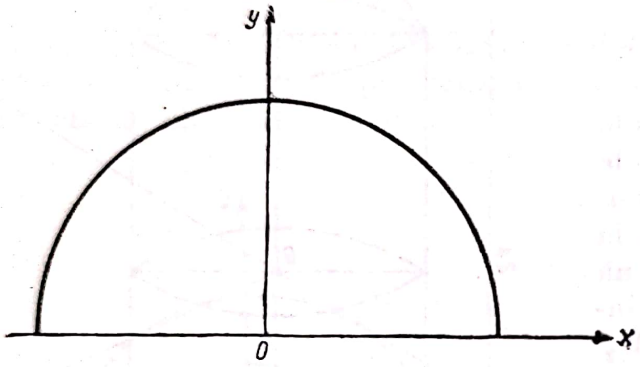


Fig. 26.16

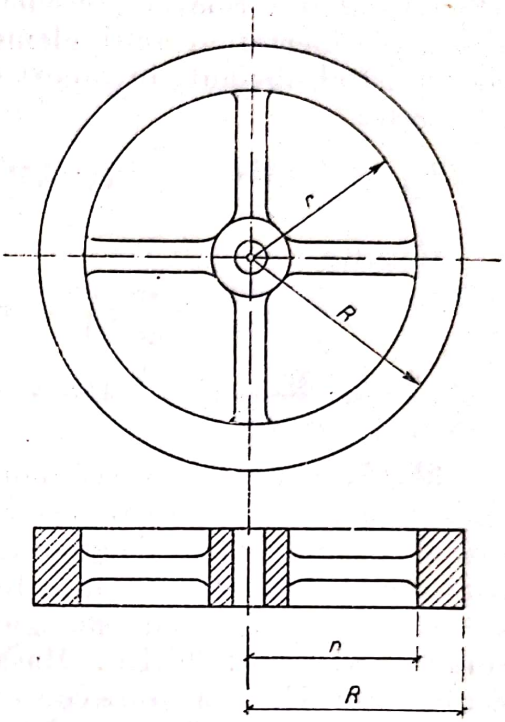


Fig. 26.17

26.17. Să se determine momentul de inerție polar al unui volant de formă inelară având razele R și r și masa totală M (fig. 26.17). Masa spițelor este neglijabilă.

Răspuns:

$$J_0 = MR^2.$$

26.18. Să se determine momentele de inerție față de un diametru și față de centru pentru o sferă plină, de rază R și de masă M.

Răspuns:

$$J_x = \frac{2}{5}MR^2;$$

$$J_0 = \frac{3}{5}MR^2.$$

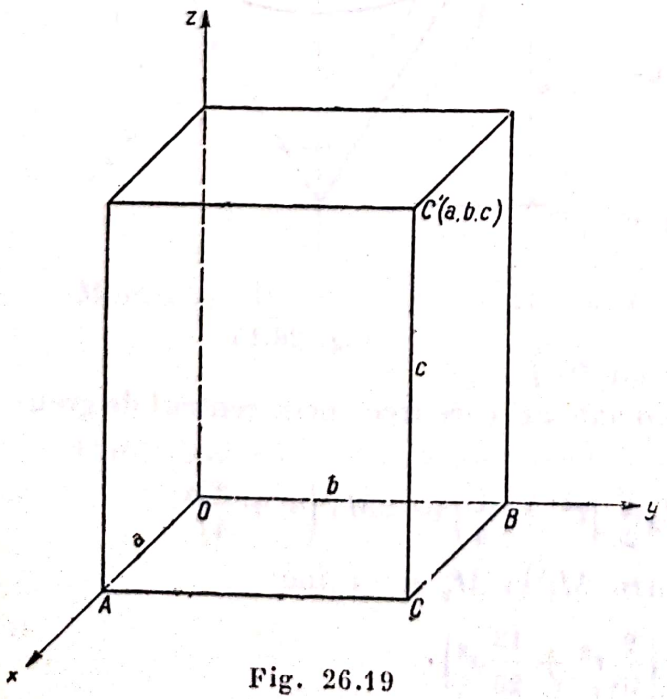


Fig. 26.19

26.19. Să se determine cele trei momente de inerție față de axele unui paralelipiped-dreptunghi avînd laturile a,b,c și greutatea G (fig. 26.19).

Răspuns: $J_x = \frac{1}{12}\frac{G}{g}(b^2 + c^2)$; $J_y = \frac{1}{12}\frac{G}{g}(c^2 + a^2)$; $J_z = \frac{1}{12}\frac{G}{g}(a^2 + b^2)$.

26.20. Să se stabilească momentul de inerție față de axa de simetrie pentru o bucșă cilindrică, a cărei greutate este G; înălțimea este h și razele exterioară și interioară sînt R și r.

Răspuns: $J_z = \frac{\pi h}{2}(R^4 - r^4)\rho = M\frac{R^2 + r^2}{2}$.

Capitolul XXVII

TEOREME GENERALE

27.1. TEOREMA IMPULSULUI ȘI TEOREMA MIȘCĂRII CENTRULUI DE MASĂ

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Prin impuls sau cantitate de mișcare a unui punct material se înțelege produsul dintre masa și viteza sa

$$\bar{H} = m\bar{v}.$$

Impulsul este un vector care are direcția și sensul vitezei punctului. Pentru un sistem de puncte materiale există:

$$\bar{H} = \sum m_i \bar{v}_i.$$

În cazul sistemelor continue de puncte materiale se va obține:

$$\bar{H} = \int v \cdot dm.$$

Pentru determinarea impulsului sistemelor continue de puncte se poate porni de la expresia centrului de mase

$$\bar{r}_0 = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i},$$

dar $\sum m_i = M$ reprezintă masa sistemului și se obține:

$$M\bar{r}_0 = \sum m_i \bar{r}_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd, rezultă:

$$M\bar{v}_0 = \sum m_i \bar{v}_i,$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$M\bar{v}_0 = \bar{H},$$

$\bar{v}_0$ fiind viteza centrului de greutate.

Deci: impulsul total $\bar{H}$ al unui sistem de puncte materiale continue nedeformabil se determină înmulțind masa întregului sistem cu viteza centrului de greutate.

Așadar, indiferent de mișcarea sistemului de puncte materiale continue (solid rigid), impulsul se stabilește considerînd toată masa concentrată în centrul său de greutate.

Teorema impulsului aplicată în cazul punctului material. Expresia impulsului stabilită anterior este:

$$\bar{H} = m\bar{v}.$$

Derivînd, rezultă:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$$

sau se mai poate scrie, observînd că $\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = m\bar{a};$$

deci:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F}.$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forțelor care acționează asupra punctului.

Observație. Dacă $\bar{F} = 0$, rezultă:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0, \text{ deci } \bar{H} = \text{const.}$$

Teorema impulsului aplicată în cazul sistemelor continue de puncte materiale și în cazul sistemelor de corpuri.

Se dă: $$\bar{H} = \sum m_i \bar{v}_i.$$

Derivînd, rezultă:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{v}_i,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum m \frac{d\bar{v}}{dt},$$

sau

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum m_i \bar{a}_i;$$

deci:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}.$$

Dar forțele pot fi grupate în două grupe: $\begin{cases} a) \text{ forțe interioare și} \\ b) \text{ forțe exterioare.} \end{cases}$

Relația va deveni:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}_e + \sum \bar{F}_i.$$

În cazul unui sistem, forțele interioare vor fi două cîte două egale și de semn contrar, astfel că $\sum \bar{F}_i = 0$.

Rezultă:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}_e,$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m \frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \sum \bar{F}_e.$$

Derivata în raport cu timpul a impulsului este egală cu suma forțelor exterioare.

Această relație vectorială poate fi exprimată analitic; proiectînd vectorii pe cele trei axe rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m \frac{dx}{dt}\right) = \sum X_e; \quad \frac{d}{dt}\left(\sum m \frac{dy}{dt}\right) = \sum Y_e; \quad \frac{d}{dt}\left(\sum m \frac{dz}{dt}\right) = \sum Z_e.$$

Teorema mișcării centrului de mase. Teorema impulsului se exprimă prin relația:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{F}_e$$

sau:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m \frac{dr}{dt}\right) = \sum \bar{F}_e,$$

Pe baza celor arătate la expresia impulsului unui sistem de puncte materiale, relația precedentă se poate scrie:

$$\frac{d}{dt} M\bar{v}_0 = \sum \bar{F}_e,$$

sau

$$M\bar{a}_0 = \sum \bar{F}_e,$$

unde M este masa întregului sistem concentrată în centrul său de greutate și $\bar{a}_0$ — accelerația centrului de greutate.

Centrul de mase al unui sistem se mișcă întocmai ca un punct material liber, a cărui masă este egală cu suma maselor din sistemul de puncte sau de corpuri, asupra căruia acționează forțele exterioare care se aplicau sistemului. Analitic expresia se transformă efectuînd proiecțiile pe axe:

$$\frac{d}{dt} M\ddot{x}_0 = \sum X_e;$$

$$\frac{d}{dt} M\ddot{y}_0 = \sum Y_e;$$

$$\frac{d}{dt} M\ddot{z}_0 = \sum Z_e.$$

Dacă $\sum \bar{F}_e = 0$ rezultă:

$$Ma_0 - \sum \bar{F}_e = 0,$$

$$M\bar{a}_0 = 0.$$

În cazul în care suma forțelor exterioare este zero, întregul sistem se mișcă astfel, încît centrul de masă al sistemului are accelerație nulă; sau se mai poate scrie:

$$M\bar{v}_0 = \text{const.};$$

deci, impulsul sistemului este conservativ.

B. PROBLEME REZOLVATE

27.1.1. Un bărbat greu de 50 kg sare din mers pe treapta unei trăsuri care cîntărește 240 kg și care se mișcă rectiliniu cu viteza de 3,6 km/h. Să se determine viteza trăsurii cu om cu tot, dacă forța de tracțiune este egală cu rezistența la înaintare datorită frecărilor.

Rezolvare. Greutatea omului și greutatea trăsurii fiind forțe verticale, rezultanta lor va fi o forță verticală. Deci proiecția rezultantei pe orizontală va fi nulă.

Se aplică teorema impulsului proiectată pe orizontală:

$$\frac{dH_x}{dt} = \sum X_{ext},$$

dar:

$$\sum X_{ext} = 0,$$

deci:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0.$$

Rezultă:

$$H_x = H_0 \tag{1}$$

$$H_0 = \frac{240}{g} 3{,}6$$

$$H_x = \frac{240 + 50}{g} v. \tag{2}$$

Înlocuind valorile (2) ale impulsului inițial și impulsului la un moment dat, în expresia (1), se obține:

$$\frac{240 + 50}{g} v = \frac{240}{g} 3{,}60.$$

Rezolvînd se obține:

$$v = \frac{240 \times 3{,}60}{290} = 2{,}98 \text{ km/h}.$$

27.1.2. Pe capătul unei scînduri omogene, care este așezată pe un plan perfect neted, stă un om, care — la un moment dat — începe să meargă de-a lungul scîndurii cu viteza relativă constantă u. Să se afle viteza absolută v și deplasarea x a omului, precum și viteza absolută v_1, și deplasarea x_1 a scîndurii în timpul t, dacă masa ei este M, și masa omului m.

Rezolvare. Se aplică teorema impulsului proiectată pe orizontală.

Atît greutatea scîndurii cît și greutatea omului fiind forțe verticale, proiecția pe orizontală a rezultantei este nulă. Deci se poate scrie:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0,$$

ceea ce dă:

$$H_x = H_0,$$

Dar:

$$H_x = (M + m)\, v_1 + m\, u.$$

Deci:

$$(M + m)\, v_1 + m\, u = H_0, \tag{1}$$

la

$$t = 0, \quad v_1 = 0, \quad u = 0, \quad \text{rezultă } H_0 = 0.$$

Ecuația (1) devine:

$$(M + m)\, v_1 + m\, u = 0; \tag{2}$$

rezolvînd, se obține viteza absolută a scîndurii:

$$v_1 = \frac{m}{M + m} \cdot u. \tag{3}$$

Scriind că:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$$

și ținînd seamă că pentru om $u = u_2$, $v_1 = v_t$ și $v_a = V$, rezultă:

$$v = u - \frac{m}{M+m}\,; \quad u = \frac{M}{M+m} \cdot u. \tag{4}$$

Înlocuind în relațiile (3) și (4) pe $v = \frac{dx}{dt}$ și

$v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ și integrînd, se obține:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m\,u\,t}{M+m} + C_1 \\ \text{și} \\ x &= \frac{M\,u\,t}{M+m} + C_2 \end{aligned}\right| \tag{5}$$

la momentul $t = 0$, $x = 0$ și x_1 rezultă:

$$C_1 = 0 \text{ și } C_2 = 0.$$

Relațiile (5) devin, deci:

$$x_1 = -\frac{m\,u\,t}{M+m},$$

$$x = \frac{M\,u\,t}{M+m}.$$

27.1.3. La capetele unei grinzi drepte, omogene, de lungime l și masă M, care se mișcă pe un plan orizontal, neted, acționează de-a lungul axei sale

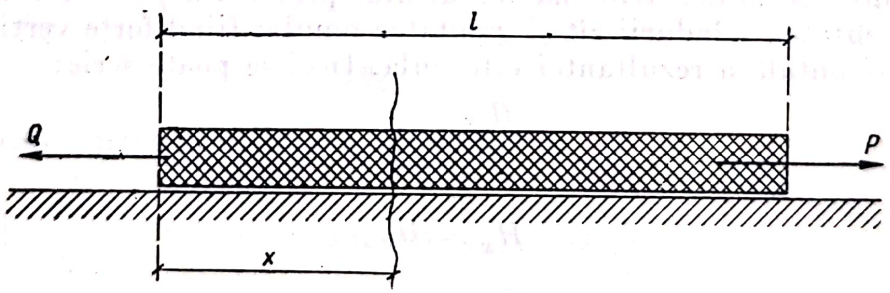


Fig. 27.1.3,*a*

două forțe, P și Q. Să se afle accelerația grinzii, precum și tensiunea într-o secțiune transversală oarecare, dacă $P > Q$ (fig. 27.1.3,*a*).

Rezolvare. Se aplică teorema impulsului:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F}_{ext};$$

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum F_{ext};$$

$$ma = \sum F_{ext};$$

în cazul problemei de faţă:

$$Ma = P - Q.$$

Rezultă:

$$a = \frac{P-Q}{M}.$$

Notînd cu T forţa de tensiune într-o secţiune oarecare (fig. 27.1.3,*b*) şi aplicînd din nou teorema impulsului, de data aceasta porţiunii de grindă cuprinsă între capătul ei şi secţiunea considerată, şi ţinînd seamă că masa acestei porţiuni de grindă este $\frac{x}{l}M$, se obţine:

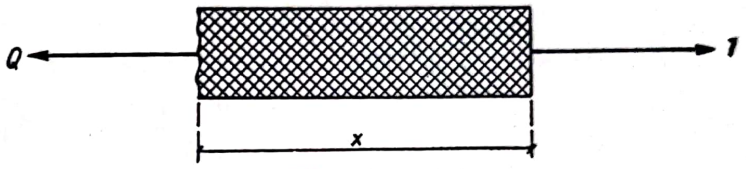


Fig. 27.1.3,*b*

$$\frac{x}{l}Ma = T - Q, \tag{1}$$

dar:

$$a = \frac{P-Q}{M},$$

deci substituind, ecuaţia (1) devine:

$$\frac{x}{l} \cdot M \cdot \frac{P-Q}{M} = T - Q,$$

sau:

$$\frac{x}{l}(P - Q) = T - Q. \tag{2}$$

Rezolvînd se obţine:

$$T = Q + \frac{x}{l}(P - Q).$$

27.1.4. Dintr-un tun de 125 t, aşezat pe o platformă netedă, orizontală, porneşte un proiectil de 350 kg cu viteza orizontală de 550 m/s. Neglijînd masa gazelor de explozibil, să se determine mărimea şi direcţia vitezei, care se transmit tunului cu această ocazie.

Rezolvare. Greutatea tunului şi greutatea ghiulelei fiind ambele forţe verticale, proiecţia pe orizontală a rezultantei forţelor exterioare este nulă.

Teorema impulsului proiectată pe orizontală se poate deci scrie:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0,$$

deci:

$$H_x = H_0,$$

unde

$$H_0 = \text{const.}$$

Notînd cu v viteza tunului după explozie se obține:

$$H_x = \frac{125}{g} v + \frac{0{,}350}{g} \times 550.$$

Înainte de explozie, la momentul $t = 0$, atît viteza tunului cît și viteza ghiulelei erau nule. Deci valoarea constantei este $H_0 = 0$. Rezultă:

$$\frac{125}{g} v + \frac{0{,}350}{g} \times 550 = 0.$$

Rezolvînd, se găsește:

$$v = -\frac{0{,}350 \times 550}{125} = -1{,}54 \text{ m/s}.$$

Viteza tunului după explozie este de 1,54 m/s și este îndreptată în sens invers vitezei ghiulelei.

27.1.5. Un remorcher de 600 t are o viteză de 1,5 m/s, după care cablul de remorcare s-a întins și șlepul care cîntărește 400 t a început să se miște. Să se afle viteza remorcherului și a șlepului, considerînd că forța motoare și forța de rezistență a apei își fac echilibru.

Rezolvare. Se aplică teorema impulsului proiectată pe orizontală:

$$\frac{dH_x}{dt} = \sum F_x. \tag{1}$$

Conform enunțului $\sum F_x = 0$, întrucît singurele forțe orizontale sînt forța motoare și rezistența apei.

Relația (1) devine deci:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0,$$

ceea ce dă:

$$H_x = H_0, \tag{2}$$

unde H_0 reprezintă o constantă.

Notînd cu v viteza comună a remorcherului și șlepului, după ce cablul de remorcare s-a întins, se obține:

$$H_x = 600\ v + 400\ v.$$

Înlocuind această valoare în relația (2) se obține:

$$600\ v + 400\ v = H_0; \tag{3}$$

pentru determinarea constantei H_0 se scrie că în momentul întinderii cablului viteza remorcherului era de 1,5 m/s și a șlepului era nulă. Ecuația (3) devine, în acest caz:

$$600 \times 1{,}5 + 400 \times 0 = H_0 = 900.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valoarea găsită pentru H_0 în ecuația (3) se obține:

$$600\ v + 400\ v = 900,$$

deci:

$$v = \frac{900}{1\ 000} = 0{,}9 \text{ m/s}.$$

27.1.6. O bară omogenă AB, care se sprijină cu capătul A pe o podea netedă, orizontală, se află la început în repaus: unghiul dintre bară și podea este α, apoi bara începe să cadă sub acțiunea gravitației (fig. 27.1.6,*a*).

Să se determine traiectoria punctului B. Lungimea barei este $2a$.

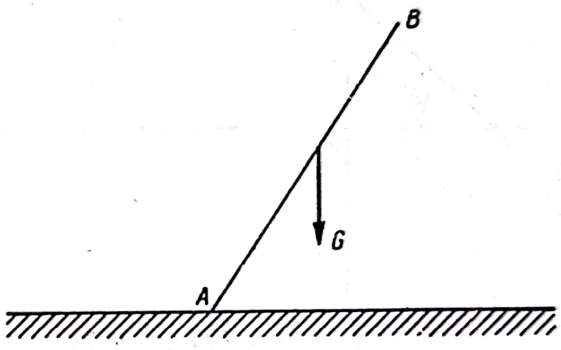


Fig. 27.1.6,*a*

Rezolvare. Singura forță exterioară este greutatea barei. Aceasta fiind o forță verticală rezultă că proiecția pe orizontală a rezultantei este nulă. Teorema mișcării centrului de greutate proiectată pe orizontală dă:

$$\frac{d}{dt}(Mv_x) = 0, \tag{1}$$

$$Mv_x = C_1.$$

Cum la $t = 0$, $v_x = 0$, rezultă $C_1 = 0$ și deci:

$$v_x = 0, \tag{2}$$

dar

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Înlocuind în ecuația (2) se obține:

$$\frac{dx_0}{dt} = 0,$$

de unde integrînd:

$$x_G = C_1, \tag{3}$$

ceea ce arată că centrul de greutate al barei rămîne, în tot timpul mișcării barei, pe aceeași verticală.

Ca sistem de referință se alege sistemul format de orizontală cu axa Ox și verticala centrului de greutate al barei ca axă Oy (fig. 27.1.6,*b*).

Față de acest sistem de referință coordonatele punctului B sînt:

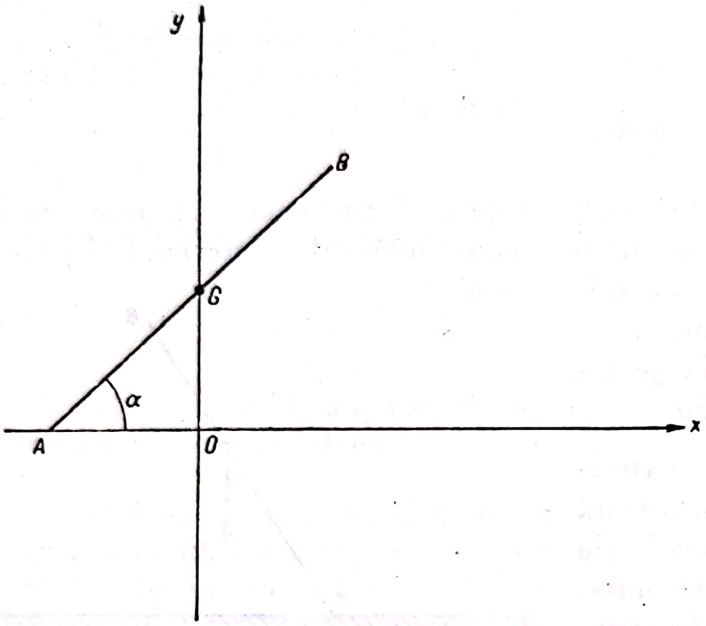


Fig. 27.1.6,*b*

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta, \\ y &= 2a\sin\theta, \end{aligned} \qquad (4)$$

unde $2a = AB$ (lungimea barei);

$\theta = f(t)$ — unghiul variabil pe care-l face în orice moment bara cu orizontala.

Eliminînd parametrul θ între ecuațiile (4) se obține ecuația traiectoriei punctului B. Ecuațiile (4) se pot scrie:

$$\frac{x}{a} = \cos\theta,$$

$$\frac{y}{2a} = \sin\theta.$$

Ridicînd la pătrat fiecare ecuație și adunîndu-le, se obține:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

Traiectoria punctului B este o elipsă.

27.1.7. Două puncte materiale libere A și B, de mase m_1 și m_2, se atrag între ele, după legea lui Newton. În momentul inițial punctul B are viteza v_2 îndreptată după AB, iar punctul A — viteza v_1 perpendiculară pe AB (fig. 27.1.7). Să se determine traiectoria și viteza centrului de mase al acestor puncte.

Rezolvare. Forța de atracție newtoniană dintre două puncte este dată de relația:

$$F = \frac{m_1 m_2}{d^2}, \qquad (1)$$

unde m_1 și m_2 sînt masele celor două puncte, și d — distanța dintre puncte.

Forțele de atracție dintre cele două puncte sînt egale și direct opuse. Rezultanta lor este deci nulă. Alegînd

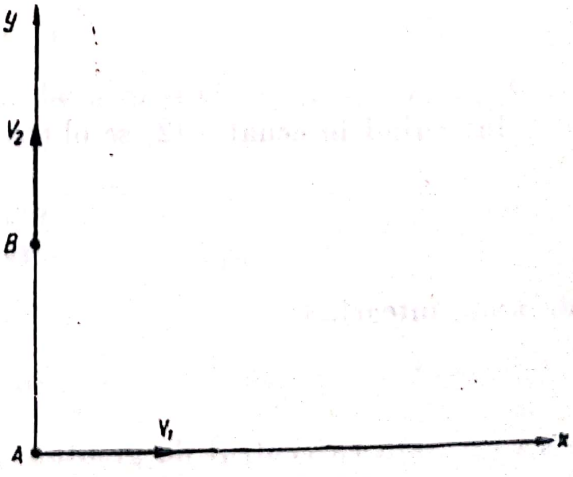


Fig. 27.7.1

sistemul de axe format de direcţiile vitezelor iniţiale ale celor două puncte, notînd cu x şi cu y coordonatele curente ale centrului de mase şi cu $v_x = \dot{x}$ şi $v_y = \dot{y}$, componentele vitezelor după drecţiile axelor, proiecţiile impulsului vor fi:

$$H_x = (m_1 + m_2)\, v_x,$$
$$H_y = (m_1 + m_2)\, v_y.$$

Ţinînd seamă că rezultanta forţelor este nulă şi că deci şi proiecţiile ei pe axe sînt de asemenea nule, şi aplicînd teorema impulsului se obţine:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0,$$
$$\frac{dH_y}{dt} = 0,$$

ceea ce dă:

$$H_x = C_1;$$
$$H_y = C_2,$$

sau înlocuind pe H_x şi H_y cu expresiile lor:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\, v_x &= C_1;\\ (m_1 + m_2)\, v_y &= C_2.\end{aligned} \qquad (1)$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină scriind că la $t = 0$ viteza corpului de masă în momentul $t = t_1$ este v_1, după direcţia axei x, şi a corpului de masă m_2 este v_2 după direcţia axei y. Rezultă:

$$m_1 v_1 = C_1,$$
$$m_2 v_2 = C_2.$$

Ecuaţiile (1) devin deci:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\, v_x &= m_1\, v_1,\\ (m_1 + m_2)\, v_y &= m_2\, v_2;\end{aligned} \qquad (2)$$

rezolvînd se obţin:

$$v_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \text{ şi } v_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Viteza totală a centrului celor două mase va fi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}} = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}.$$

Ecuaţiile (2) se pot scrie:

$$(m_1 + m_2)\, \dot{x} = m_1 v_1,$$
$$(m_1 + m_2)\, \dot{y} = m_2 v_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd se obține:

$$(m_1 + m_2)\, x = m_1 v_1 t + K_1$$
$$(m_1 + m_2)\, y = m_2 v_2 t + K_2;$$

eliminînd între aceste ecuații parametrul t se obține ecuația traiectoriei. Amplificînd prima ecuație cu m_2, a doua cu m_1 și adunînd

$$(m_1 + m_2)\,(m_2 x - m_1 y) = K_2 m_2 - K_1 m_1. \tag{3}$$

Ecuația (3) reprezintă o dreaptă.

27.1.8. Două puncte materiale libere A și B de mase egale, se află în momentul inițial pe aceeași verticală. Punctul A are viteza inițială orizontală v_0; viteza inițială a punctului B este egală cu zero. Să se determine traiectoria centrului de mase al celor două puncte și proiecțiile v_x și v_y ale vitezei lui.

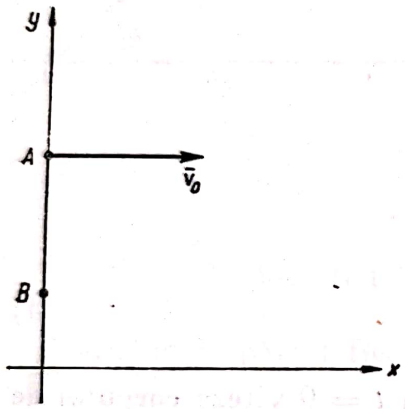


Fig. 27.1.8

Rezolvare. Se aplică teorema mișcării centrului de mase. Notînd cu v_G viteza centrului maselor, teorema se scrie:

$$\frac{d}{dt}(M v_G) = \sum \bar{F}_e. \tag{1}$$

Proiectînd ecuația (1) pe sistemul de axe ales în figura 27.1.8 (format de verticala pe care se află punctele în momentul inițial și de o perpendiculară pe acesta) și notînd cu v_x și v_y componentele vitezei centrului de mase, se obține:

$$\frac{d}{dt}(M v_x) = 0$$
$$\frac{d}{dt}(M v_y) = -Mg, \tag{2}$$

unde M reprezintă masa totală a celor două puncte.

Integrînd ecuațiile (2) se obține:

$$M v_x = C_1$$
$$M v_y = -Mgt + C_2 \tag{3}$$

sau, în funcție de masa fiecărui punct, $\frac{M}{2}$

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) v_x = C_1$$
$$\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) v_y = -\left(\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\right) gt + C_2. \tag{4}$$

Punînd în ecuațiile (4) condițiile inițiale $t = 0$, $v_{1x} = v_0$, $v_{1y} = 0$, $v_{2x} = 0$ și $v_{2y} = 0$ se determină valorile constantelor C_1 și C_2. Se obține:

$$\frac{M}{2} v_1 = C_1$$

și

$$O = C_2.$$

Cu aceste valori ale constantelor ecuațiile (3) devin:

$$M \cdot v_x = \frac{M}{2} v_1$$

$$M \cdot v_y = - Mgt$$

sau simplificînd cu M:

$$v_x = \frac{1}{2} v_1 \tag{5}$$

$$v_y = - gt,$$

relațiile (5) reprezintă componentele vitezei centrului maselor celor două puncte, dar notînd $\frac{dx}{dt} = v_x$ și $\frac{dy}{dt} = v_y$, ecuațiile (5) devin:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot v_1; \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = - gt.$$

Integrînd ecuațiile (6) se obține:

$$x = \frac{1}{2} v_1 t + C_3 \tag{7}$$

$$y = - \frac{1}{2} gt^2 + C_4 \frac{v_1^2}{2};$$

ecuațiile (7) sînt ecuațiile parametrice ale mișcării centrului maselor. Eliminînd parametrul t între ecuațiile (7) se obține ecuația traiectoriei centrului maselor.

Ridicînd la pătrat prima ecuație și adunînd-o cu a doua înmulțită cu $\frac{v_1^2}{g}$ rezultă:

$$x^2 + \frac{v_1^2}{g} y = C_3^2 + C_4 \frac{v_1^2}{g}, \tag{8}$$

v_1, g, C_3 și C_4 fiind constante, ecuația (8) reprezintă o parabolă.

27.1.9. Trei puncte libere A, B și C, de mase egale, se atrag între ele după legea lui Newton. Viteza inițială a punctului A este $K \cdot AB$, orientată după AB; viteza inițială a punctului B este $K \cdot BC$ orientată după BC. Să se determine mărimea și orientarea vitezei care trebuie imprimată punctului C, pentru ca centrul de masă al celor trei puncte să rămînă în repaus.

Rezolvare. Se aplică teorema mișcării centrului maselor:

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}_G) = \sum F_{ext};$$

dacă $\sum F_{ext} = 0$,

atunci:

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}_G) = 0,$$

de unde rezultă, prin integrare:

$$\bar{v}_G = C_1.$$

Constanta de integrare se determină scriind că în momentul inițial centrul maselor are o anumită viteză. Se obține astfel că valoarea constantei de integrare este însăși viteza inițială a centrului maselor. Deci, dacă $\sum F_{ext} = 0$, viteza centrului maselor este în orice moment constantă și egală cu viteza inițială:

$$v_G = v_0.$$

În cazul problemei date, dacă $\sum F_{ext} = 0$ va rezulta și $v_0 = v_G = 0$.

Impulsul inițial va fi:

$$\bar{H} = 3m\,\bar{v}_0 = m\bar{v}_A + m\bar{v}_B + m\bar{v}_C.$$

Simplificînd cu m și înlocuind vitezele punctelor A și B cu valorile lor, conform enunțului, se obține:

$$K\,\overline{AB} + K\,\overline{BC} + \bar{v}_C = 0,$$

$$K\,(\overline{AB} + \overline{BC}) + \bar{v}_C = 0. \qquad (1)$$

Dar suma vectorială a două laturi într-un triunghi este egală cu a treia latură. Deci:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -\overline{CA};$$

înlocuind în (1) rezultă:

$$-K\,\overline{CA} + v_C = 0,$$

de unde

$$\bar{v}_c = +K\,\overline{CA}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci viteza punctului C trebuie să fie proporţională cu latura CA, factorul de proporţionalitate fiind acelaşi, şi e dirijată după direcţia laturii în sensul de la C spre A.

27.1.10. Pe un plan orizontal perfect neted este aşezat un cerc de rază r şi masă M, de-a lungul căruia începe la un moment dat să se tîrască un gîndac, de masă m, cu viteza relativă constantă u. Să se afle traiectoriile centrului cercului şi a gîndacului.

Rezolvare. Se notează centrul cercului cu O şi poziţia gîndacului cu A.

Proiecţia pe orizontală a rezultantei este nulă, toate forţele fiind verticale. Se aplică teorema mişcării centrului de mase proiectate pe orizontală:

$$\frac{d}{dt}(M + m)\, V_g = 0. \tag{1}$$

Integrînd se obţine:

$$(M + m)\, V_G = C_1,$$

dar la $t = 0$, $V_G = 0$ şi deci $C_1 = 0$.

Rezultă:

$$V_G = 0. \tag{2}$$

Relaţia (2) arată că centrul maselor rămîne tot timpul în repaus. Punctele O şi A centrul cercului şi gîndacul, variabile ca poziţie, sînt mereu la aceeaşi distanţă de G; deci ele descriu cercuri concentrice cu centrul în G şi razele OG, respectiv AG.

Pentru determinarea razelor OG şi AG se scrisese că punctul G este centrul maselor M şi m aplicate în O şi în A. Centrul maselor se va găsi pe dreapta OA, la distanţele:

$$OG = \frac{m \cdot r}{M + m};$$

$$AG = \frac{Mr}{M + m}.$$

27.1.11. Pe o pană cu secţiunea triunghiulară avînd greutatea P şi cateta orizontală egală cu a se află o pană asemenea, de greutate p şi catetă orizontală b. Rezemarea se face după ipotenuză (fig. 27.1.11, a).

Să se afle cu cît se va deplasa pana mare cînd pana mică alunecă pe cea mare pînă ajunge cu vîrful pe planul orizontal. Se neglijează frecarea şi rezistenţa aerului.

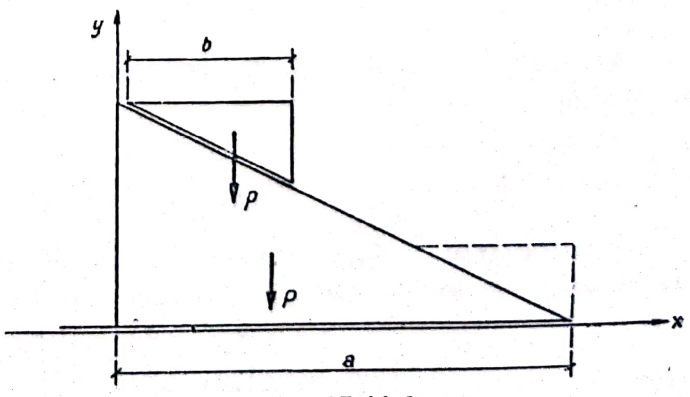


Fig. 27.11.1, a

Rezolvare. Se aplică teorema mişcării centrului de greutate. Greutăţile celor două pene fiind forţe verticale, proiecţia

pe orizontală a rezultantei forţelor exterioare este nulă. Notînd cu V_x componenta vitezei centrului de greutate după direcţia orizontalei se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}(Mv_x) = 0, \tag{1}$$

sau

$$M \cdot v_x = C_1, \tag{2}$$

dar cum la $t = 0$ vitezele celor două pene sînt nule, rezultă $C_1 = 0$. Deci:

$$Mv_x = 0,$$

sau

$$v_x = 0.$$

Dar

$$v_x = \frac{dx_G}{dt}.$$

Integrînd încă o dată se obţine:

$$x_G = x_{0G}, \tag{3}$$

unde s-a notat cu x_{0G} este constanta de integrare care reprezintă abscisa iniţială a centrului de greutate.

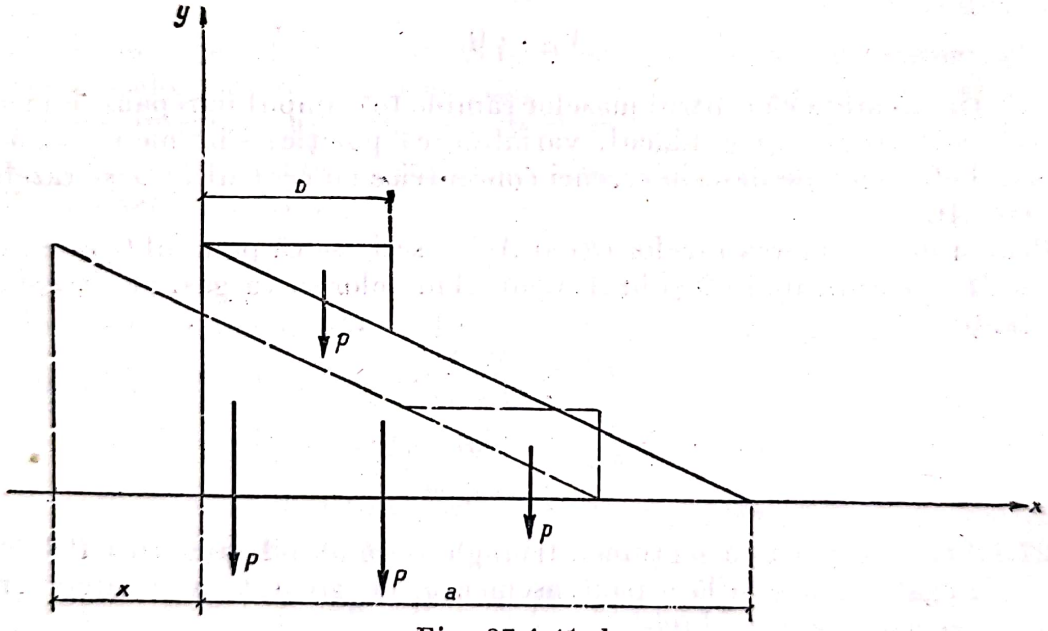


Fig. 27.1.11, *b*

Alegînd ca axe de coordonate poziţiile iniţiale ale catetelor penei mari se obţine:

$$x_{0G} = \frac{p\frac{a}{3} + p\frac{2b}{3}}{P + p}.$$

Notînd cu x deplasarea penei mari a abscisei în poziţia finală a centrului de greutate se obţine (fig. 27.1.11, *b*):

$$x_1 = \frac{P\left(x + \frac{a}{3}\right) + p\left(x + a - \frac{2b}{3}\right)}{P + p}.$$

Conform relației (3) $x_1 = x_{0G}$, deci:

$$P\left(x + \frac{a}{3}\right) + p\left(x + a - b + \frac{2a}{3}\right) = P\frac{a}{3} + p\frac{2b}{3}.$$

Rezolvînd parantezele și efectuînd reducerile, rezultă:

$$Px + px + p(a - b) = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{-p}{P + p}(a - b).$$

27.1.12. Trei greutăți P_1, P_2 și P_3 sînt legate printr-un fir imponderabil și inextensibil, trecut peste scripeții ficși B și C. Cînd greutatea P_1 coboară, greutatea P_2 se deplasează spre dreapta, pe baza superioară a unei prisme patrulatere $ABCD$ de greutate P_4, iar greutatea P_3 se ridică pe fața laterală AB a prismei. Unghiul dintre fața AB a prismei și orizontală este α (fig. 27.1.12). Neglijînd frecările și rezistența aerului să se afle deplasarea trunchiului de piramidă $ABCD$ față de dușumea, dacă greutatea P_1 coboară cu o distanță h.

Rezolvare. Suma proiecțiilor tuturor forțelor pe orizontală fiind nulă, va fi avantajos să se rezolve problema cu ajutorul teoremei mișcării centrului maselor:

$$\sum X_{ext} = 0 = M_G\,\ddot{x}_G;$$
$$\ddot{x}_G = 0.$$

În momentul inițial, sistemul de corpuri fiind în repaus, se va scrie că centrul maselor nu se deplasează pe orizontală cînd pozițiile maselor se schimbă:

$$\dot{x}_{0G} = 0; \qquad x_G = \text{const.}$$

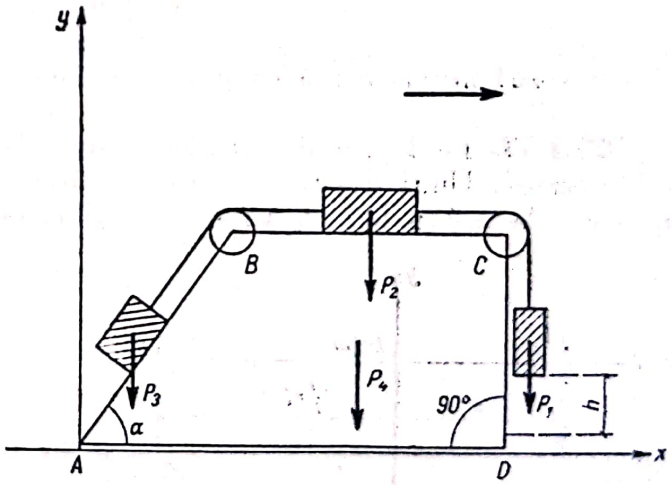


Fig. 27.1.12

Se alege sistemul de axe din figură (27.1.12), orizontala AD ca axă Ox și perpendiculara în A pe AB ca axă Oy. Notînd cu x_1, x_2, x_3 și x_4 abscisele, în momentul inițial, ale punctelor de aplicație ale forțelor P_1, P_2, P_3 și P_4 (x_4 fiind abscisa centrului de greutate al prismei, fără greutățile P_1, P_2, și P_3), abscisa centrului maselor x_G înainte de a începe mișcarea va fi:

$$x_G = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se notează cu x deplasarea pe care o va suferi prisma cînd greutatea P_1 coboară cu înălțimea h. Abscisa centrului maselor corespunzătoare va fi dată de relația:

$$x'_G = \frac{P_1 (x_1 + x) + P_2 (x_2 + h + x) + P_3 (x_3 + h \cos \alpha + x) + P_4 (x_4 + x)}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}.$$

Centrul maselor neavînd deplasare pe direcția axei xx' urmează că cele două valori ale abscisei centrului maselor x_G corespunzătoare momentului inițial și x'_G corespunzătoare unui moment oarecare trebuie să fie egale. Numitorii fracțiilor fiind egali rămîne să se scrie că și numărătorii sînt egali. Deci:

$$P_1 (x_1 + x) + P_2 (x_2 + h + x) + P_3 (x_3 + h \cos \alpha + x) + P_4 (x_4 + x) = \\ = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4. \qquad (2)$$

Desfăcînd parantezele și efectuînd reducerile posibile și grupînd termenii se obține:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)\, x + (P_2 + P_3 \cos \alpha)\, h = 0. \qquad (3)$$

Rezolvînd ecuația (3) se obține deplasarea x a prismei, în funcție de deplasarea h a corpului P_1:

$$x = -\frac{P_2 + P_3 \cos \alpha}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} \cdot h.$$

Semnul minus arată că prisma se deplasează spre stînga.

27.1.13. Pe banca din mijloc a unei bărci, care se află în repaus, stau doi oameni. Unul dintre ei, care cîntărește $P_1 = 50$ kg, se deplasează spre dreapta, la prova bărcii. În ce sens și la ce distanță trebuie să se deplaseze cel de-al doilea om care cîntărește $P_2 = 70$ kg, pentru ca barca să rămînă în repaus. Lungimea bărcii este $L = 4$ m.

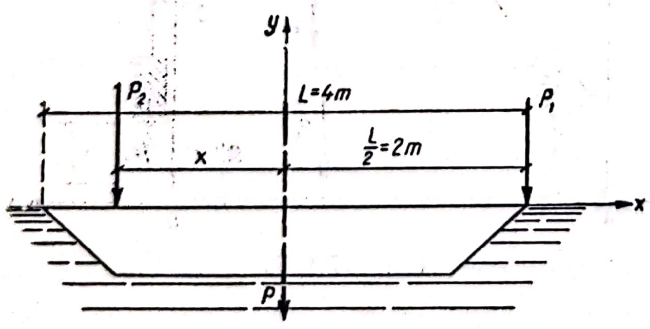


Fig. 27.1.13

Se neglijează rezistența apei.

Rezolvare.

Soluția 1. Pentru ca barca să rămînă în echilibru trebuie ca centrul de greutate al greutăților celor doi oameni să rămînă în permanență la mijlocul bărcii (adică în poziția în care a fost în momentul inițial) (fig. 27.1.13). Alegînd ca axe orizontala de plutire a bărcii și ca origine mijlocul ei, abscisa centrului de greutate al sistemului format din cei doi oameni și barcă va fi:

$$x_G = \frac{P_1 \frac{L}{2} + P_2 x}{P_1 + P_2}.$$

Punînd condiția:

$$x_G = 0 \text{ (deoarece: } \sum X_{ext} = 0 = M_G \ddot{x}_G \text{ și } \dot{x}_G = 0$$

rezultă:

$$P_1 \frac{L}{12} + P_2 x = 0;$$

$$x = -\frac{P_1 \frac{L}{2}}{P_2}.$$

Aplicație numerică:

$$x = \frac{50 \times 2}{70} = 1{,}43 \text{ m}.$$

Soluția a 2-a. Fie a deplasarea bărcii corespunzătoare deplasării omului de greutate P_1, cu distanța $\frac{L}{2}$ și a omului de greutate P_2, cu o distanță x.

Notînd cu P greutatea bărcii, centrul de greutate al sistemului de corpuri format de barcă și de cei doi oameni va avea, în raport cu aceleași axe ca în soluția 1, abscisa:

$$x'_G = \frac{P_1 \left(\frac{L}{2} + a\right) + P_2 (x + a) + Pa}{P_1 + P_2 + P} = \frac{P_1 \frac{L}{2} + P_2 x + (P_1 + P_2 + P)a}{P_1 + P_2 + P}.$$

Dar în momentul inițial $x_G = 0$ aplicînd teorema mișcării centrului de greutate putem scrie $X_G = 0$.

Deci:

$$P_1 \frac{L}{2} + P_2 x + (P_1 + P_2 + P)\, a = 0,$$

de unde rezultă deplasarea bărcii corespunzătoare oricărei deplasări x a omului de greutate P_2:

$$a = \frac{P_1 \frac{L}{2} + P_2 x}{P_1 + P_2 + P}.$$

Punînd condiția ca barca să stea în repaus, rezultă:

$$a = 0,$$

$$P_1 \frac{L}{2} + P_2 x = 0,$$

$$x = \frac{-P_1 \frac{L}{2}}{P_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

27.1.14. Să se determine deplasarea unei macarale plutitoare, care ridică o greutate $P_1 = 2t$, rotindu-și brațul cu $\alpha = 30°$ pînă la poziția verticală. Greutatea proprie a macaralei este $P_2 = 20$ t, lungimea brațului $OA = l = 8$ m (fig. 27.1.14). Rezistența apei, frecările și greutatea brațului macaralei se neglijează.

Rezolvare. În momentul inițial, sistemul format de macara și greutatea P_1 era în repaus. Suma proiecțiilor tuturor forțelor exterioare pe orizontală fiind nulă, centrul de greutate nu se deplasează pe orizontală.

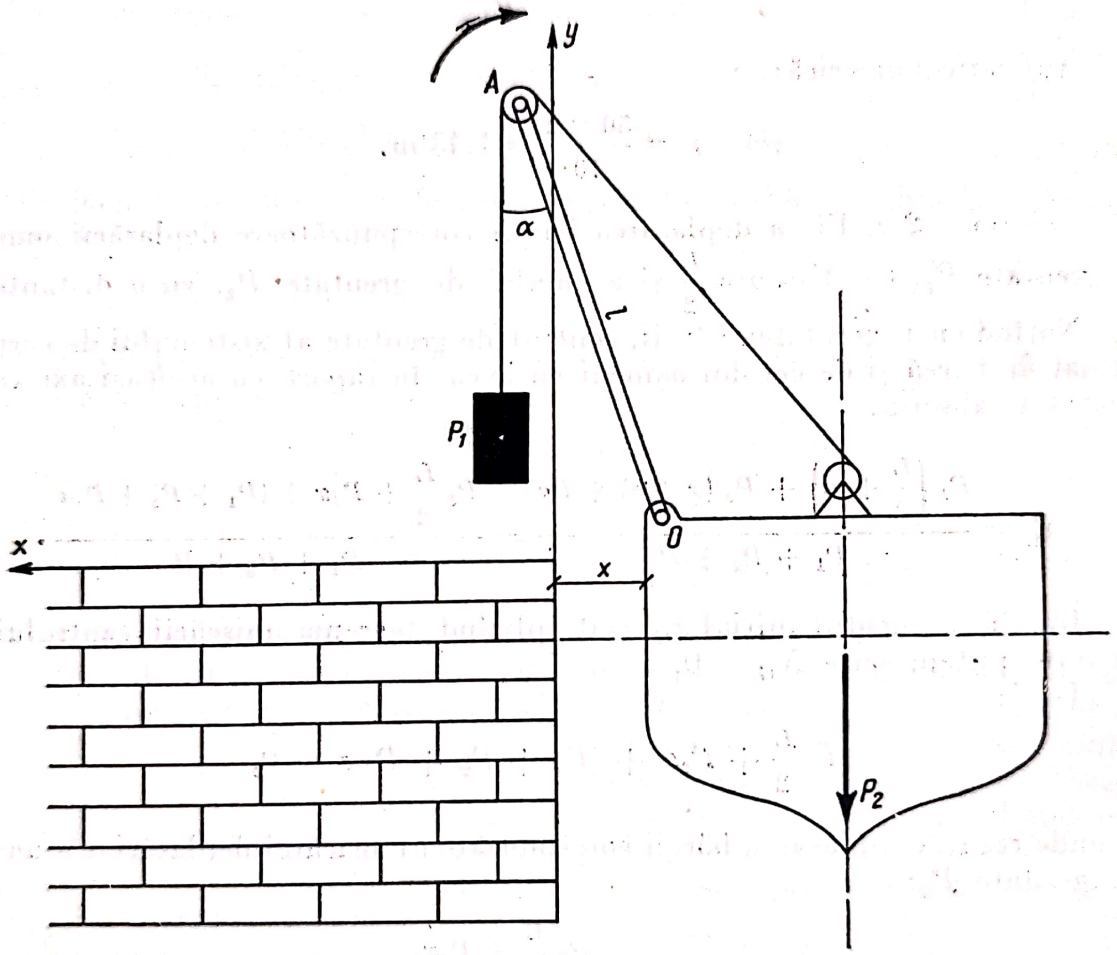


Fig. 27.1.14

Alegînd sistemul de axe din figura 27.1.14 și notînd cu x_1 și x_2 abscisele punctelor de aplicație ale forțelor P_1 și P_2, abscisa centrului de greutate al sistemului în momentul inițial va fi:

$$X_{0G} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}. \tag{1}$$

Notînd cu x deplasarea macaralei, abscisa centrului de greutate corespunzător unei rotiri a brațului macaralei cu un unghi α va fi:

$$X_G = \frac{P_1(x_1 + l \sin\alpha + x) + P_2(x_2 + x)}{P_1 + P_2}. \tag{2}$$

Întrucît centrul de greutate nu s-a deplasat pe orizontală, urmează că cele două valori ale abscisei centrului de greutate date de relațiile (1) și (2) sînt egale. Numitorii fiind egali urmează să se mai scrie că numărătorii sînt egali. Se obține:

$$P_1(x_1 + l \sin \alpha + x) + P_2(x_2 + x) = P_1x_1 + P_2x_2.$$

Desfăcînd parantezele, efectuînd reducerile și grupînd termenii se obține:

$$(P_1 + P_2)x + P_1 l \sin \alpha = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{-P_1 l}{P_1 + P_2} \sin \alpha,$$

semnul minus arată că macaraua se deplasează spre stînga.

Aplicație numerică:

$$x = -\frac{2 \times 8}{2 + 20} \sin 30° =$$

$$= -\frac{2 \times 8}{22} \times \frac{1}{2} = -\frac{4}{11} =$$

$$= -0{,}364 \text{ m}.$$

27.1.15. Să se determine traiectoria centrului de greutate al mecanismului elipsografului, format din culisele mici A și B, fiecare de greutate Q, din manivela OC de greutate P și din rigla AB de greutate $2P$. Se dă $OC = AC = CB = l$ (fig. 27.1.15).

Rigla și manivela se consideră bare omogene, iar culisele — ca niște puncte materiale.

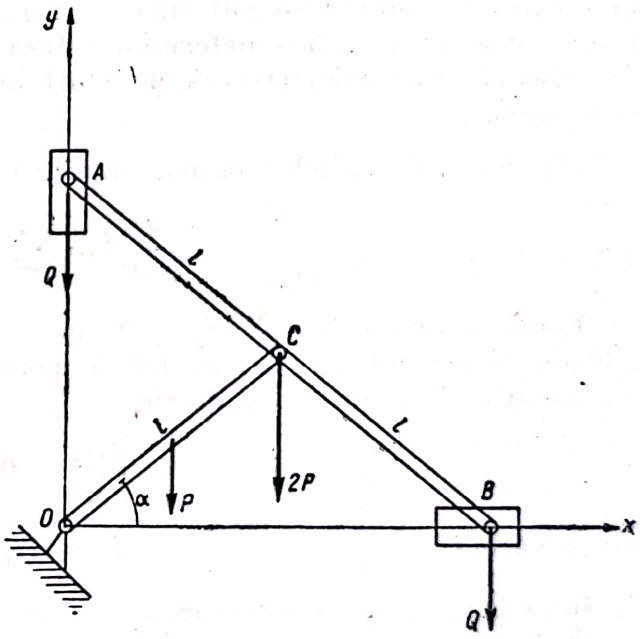


Fig. 27.1.15

Alegînd axele ca în figură, coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x = \frac{2P_1 \cos \alpha + P \frac{l}{2} \cos \alpha + Q\, 2l \cos \alpha}{2P + P + Q + Q} = \frac{5P + 4Q}{3P + 2Q} \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha \qquad (1)$$

$$y = \frac{2Pl \sin \alpha + P \frac{l}{2} \sin \alpha + Q2\, l \sin \alpha}{2P + P + Q + Q} = \frac{5P + 4Q}{3P + 2Q} \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha; \qquad (2)$$

în aceste expresii, $\alpha = f(t)$. Eliminînd parametrul α între ecuațiile (1) și (2) se obține ecuația traiectoriei centrului de greutate.

Ridicînd la pătrat fiecare ecuație, însumînd și dînd factor comun pe:

$$\left[\frac{5P + 4a}{3P + 2a} \cdot \frac{l}{2}\right]^2$$

se obține:

$$x^2 + y^2 = \left[\frac{5P + 4Q}{3P + 2Q} \cdot \frac{l}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Ecuația (3) reprezintă un cerc cu centrul în originea axelor și raza:

$$R = \frac{5P + 4Q}{3P + 2Q} \cdot \frac{l}{2}.$$

27.1.16. Un vapor în greutate de 200 t se mișcă cu o viteză medie de 10 m/s. Care este viteza centrului comun de greutate a corpului și a întregului utilaj al vaporului. Pistonul mașinii orizontale a vaporului cîntărește 100 kg, are o cursă de 1 m și face 240 curse pe minut. Considerînd că oscilațiile pistonului sînt armonice, să se determine viteza v a corpului vaporului, dacă roțile propulsoare (zbaturile) creează un efort motor egal în permanență cu rezistența apei.

Rezolvare. Se aplică teorema impulsului proiectată pe orizontală:

$$\frac{dH_x}{dt} = \sum F_x. \tag{1}$$

Conform enunțului, $\sum F_x = 0$, întrucît singurele forțe orizontale, forța motoare și rezistența apei, își fac în permanență echilibru.

Relația (1) se poate deci scrie:

$$\frac{dH_x}{dt} = 0$$

sau integrînd:

$$H_x = H_0, \tag{2}$$

H_0 fiind constanta de integrare.

Notînd cu v viteza corpului vaporului și cu u — viteza relativă a pistonului, componența orizontală a impulsului va fi:

$$H_x = \frac{(200 - 0{,}1)v}{g} + \frac{0{,}1}{g}(v + u) = \frac{200}{g}v + \frac{0{,}1}{g}u. \tag{3}$$

În această expresie, greutatea pistonului este exprimată în aceleași unități de măsură cu greutatea corpului vaporului, adică în tone.

Viteza relativă u a pistonului se determină știind că mișcarea lui este oscilatorie armonică, că lungimea cursei este 1 m și că face 240 curse pe minut. Ecuația de mișcare a pistonului va fi deci de forma:

$$x = a \sin \omega t. \tag{4}$$

Lungimea cursei pistonului fiind 1 m, rezultă că amplitudinea oscilației pistonului este $2a = 1$ m² și deci $a = 1/2$ m². Întrucît oscilația completă cu-

prinde 2 curse (1 cursă dus + 1 cursă întors), pistonul făcînd 240 curse pe minut, rezultă că face 240/2 = 120 oscilații/min. Deci, $n = \frac{120}{60} = 2$ oscilații/min.

Numărul n de oscilații pe secundă este dat de relația:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \tag{5}$$

Egalînd cele două valori ale lui n se obține:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 2,$$

$$\omega = 4\pi.$$

Înlocuind valorile lui a și ω în ecuația (4) se obține:

$$x = \frac{1}{2} \sin 4\pi\, t. \tag{6}$$

Derivînd relația (6) în raport cu timpul se află viteza relativă u a pistonului:

$$u = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos 4\pi t. \tag{7}$$

Înlocuind această valoare în expresia impulsului din relația (3) se obține:

$$H_x = \frac{200}{g} v + \frac{0,1}{g} 2\pi \cos 4\pi t.$$

Ținînd seamă de relația (2) se poate scrie:

$$\frac{200}{g} v + \frac{0,1}{g} 2\pi \cos 4\pi t = H_0.$$

Dar impulsul vaporului este în permanență egal cu $\frac{200}{g} \times 10$, această valoare fiind tocmai constanta H_0. Se poate deci scrie:

$$\frac{200}{g} v + \frac{0,1}{g} 2\pi \cos 4\pi t = \frac{200}{g} \times 10$$

și se obține succesiv:

$$200\, v + 200 \times 10 - 0,1 \times 2\pi \cos 4\pi t;$$

$$v = 10 - \frac{0,2\pi}{200} \cos \pi\, t;$$

$$v = 10 - 0,001\, \pi \cos 4\pi t.$$

Scanned with OKEN Scanner

27.1.17. Un om de greutate P care poartă în mîini greutatea p, sare sub unghiul α față de orizontală cu viteza V_0 și atingînd înălțimea maximă, omul aruncă greutatea p înapoi cu viteza relativă orizontală u. Cu cît se mărește distanța săriturii datorită acestui fapt?

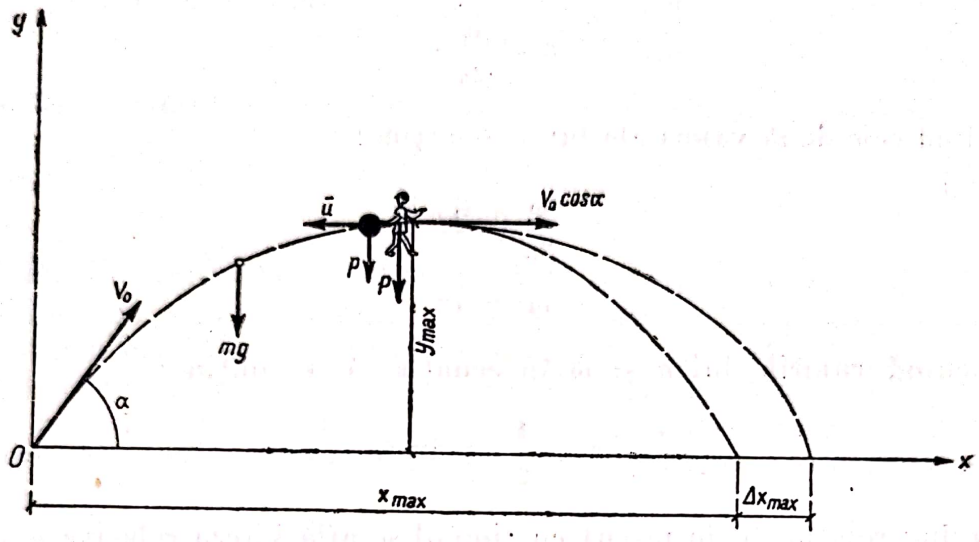


Fig. 27.1.17

Rezolvare. În prealabil se determină înălțimea maximă y_{max} și bătaia y_{max} pe care o realizează omul, fără să folosească sistemul aruncării greutății (v. fig. 27.1.17).

Ecuațiile mișcării sînt:

$$\frac{P+p}{g}\ddot{x} = 0;$$

$$\frac{P+p}{g}\cdot\ddot{y} = -(P+p),$$

$$\dot{x} = V_0 \cos\alpha,$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot gt,$$

$$x = V_0 t \cos\alpha,$$

$$y = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Bătaia se obține din condiția $y = 0$; rezultă:

$$t = 0 \quad \text{și} \quad t = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g},$$

de unde:

$$x_{max} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Înălțimea maximă se obține din condiția:

$$\dot{y} = 0;$$

rezultă:

$$V_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

sau

$$t = \frac{V_0 \sin \alpha}{g};$$

$$y_{max} = V_0 \sin \alpha \frac{V_0 \sin \alpha}{g} - g \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

abscisa corespunzătoare fiind:

$$x = \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{x_{max}}{2}.$$

În momentul aruncării greutății, viteza omului este:

$$v_1 = V_0 \cos \alpha$$

și are direcția orizontală.

Impulsul sistemului om și greutate pe direcția orizontală va fi constant, proiecțiile forțelor exterioare pe orizontală fiind nule. Egalizînd proiecția pe orizontală a impulsului sistemului înainte de aruncare cu cel de după momentul aruncării se obține:

$$H_x = \frac{P+p}{g} V_0 \cos \alpha = \frac{P}{g} v' - \frac{p}{h} (V_0 \cos \alpha - u),$$

de unde

$$v_1 = \frac{p \cdot u + PV_0 \cos \alpha}{P} = v_0 \cos \alpha + \frac{p}{P} \cdot u.$$

Rezultă că viteza omului după aruncarea greutății crește cu mărimea:

$$\frac{p}{P} \cdot u.$$

Pentru a determina sporul de bătaie este necesar să se determine noua distanță maximă la care ajunge. Folosind același sistem de referință se pot scrie ecuațiile de mișcare:

$$\dot{x}_1 = \frac{pu}{P} + V_0 \cos \alpha;$$

$$\dot{y} = -gt.$$

Integrînd se obține:

$$x = \left(\frac{p}{P} \cdot u + V_0 \cos \alpha\right) t + C_1;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Condițiile inițiale în acest caz sînt:

$$t = 0,\ x = x_0 = \frac{V_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g};$$

$$y = y_0 = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Rezultă ecuațiile de mișcare:

$$x = \left(\frac{p}{P} u + v_0 \cos \alpha\right) t + \frac{V_0 \sin \alpha \cos \alpha}{g};$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Pentru a determina bătaia se pune condiția $y = 0$ și rezultă:

$$-\frac{gt^2}{2} + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 0$$

sau

$$t = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Rezultă:

$$x_{1\max} = \frac{p \cdot u\ V_0 \sin \alpha}{g \cdot P} + \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Sporul de bătaie a săriturii va fi:

$$x_{1\max} - x_{\max} = \frac{puV_0 \sin \alpha}{g \cdot P} + \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Deci:

$$\Delta x_{\max} = \frac{p}{g \cdot P} u \cdot V_0 \sin \alpha.$$

27.1.18. Trei bărci de aceeași greutate G merg una în urma celeilalte cu aceeași viteză v. Din barca din mijloc se aruncă simultan în barca din față și în cea din spate, cu viteza u față de barca din mijloc, niște greutăți iden-

tice Q (fig. 27.1.18). Care sînt vitezele celor trei bărci după această operație? Se neglijează rezistența apei la înaintarea bărcilor și frecarea aerului.

Rezolvare. Pentru studiul vitezelor după aruncarea greutăților se va studia cazul fiecărei bărci în parte.

— *Barca din mijloc.* Sistemul de corpuri este alcătuit din barca din mijloc și din cele două greutăți. Forțele sînt toate verticale. Dacă se neglijează rezis-

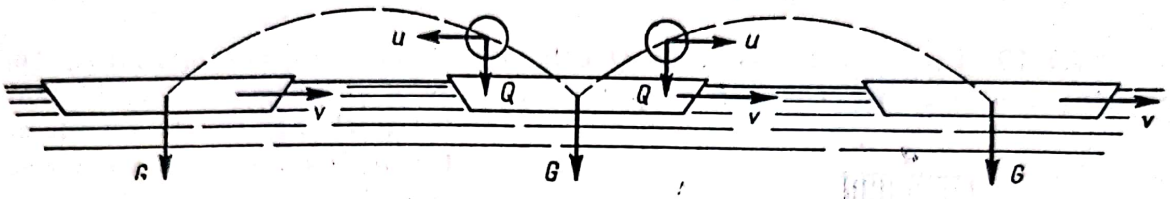


Fig. 27.1.18

tența apei și frecările în aer, proiecția tuturor forțelor exterioare pe orizontală este nulă:

$$\sum X_{ext} = 0.$$

Rezultă că proiecția impulsului sistemului pe orizontală este o constantă și își păstrează valoarea și după aruncarea greutăților:

$$H_x = \text{const.} = \frac{G + 2Q}{g} v = \frac{G}{g} v_2 + \frac{Q}{g} (u + v) + \frac{Q}{g} (v - u).$$

Se determină viteza bărcii după aruncare v_2. Rezultă:

$$v_2 = v.$$

Viteza bărcii din mijloc rămîne neschimbată.

— *Barca din față.* Sistemul se compune din barca din față și greutatea care urmează să cadă în barcă.

Proiecția impulsului sistemului pe orizontală este constantă. Se poate scrie:

$$H_x = \frac{G}{g} \cdot v + \frac{Q}{g} (v + u) = \frac{Q + G}{g} \cdot v_1.$$

Rezultă:

$$v_1 = v + \frac{Qu}{Q + G}.$$

Viteza bărcii din față crește.

— *Barca din spate.* Sistemul se compune din barca din față și greutatea care urmează să cadă.

Se poate scrie în mod asemănător:

$$H_x = \text{const.} = \frac{G}{g} v + \frac{Q}{g} (v - u) = \frac{Q + G}{g} \cdot v_3.$$

Rezultă:

$$v_3 = v - \frac{Qu}{Q+G}.$$

Viteza bărcii din spate scade.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

27.1.19. Un corp de greutate Q este așezat pe un plan orizontal. De el este fixat un fir, care trece peste un scripete și poartă la capăt greutatea P. Să se afle accelerația a, cu care se va mișca corpul, și tensiunea T a firului, dacă coeficientul de frecare dintre corp și plan este f (fig. 27.1.19).

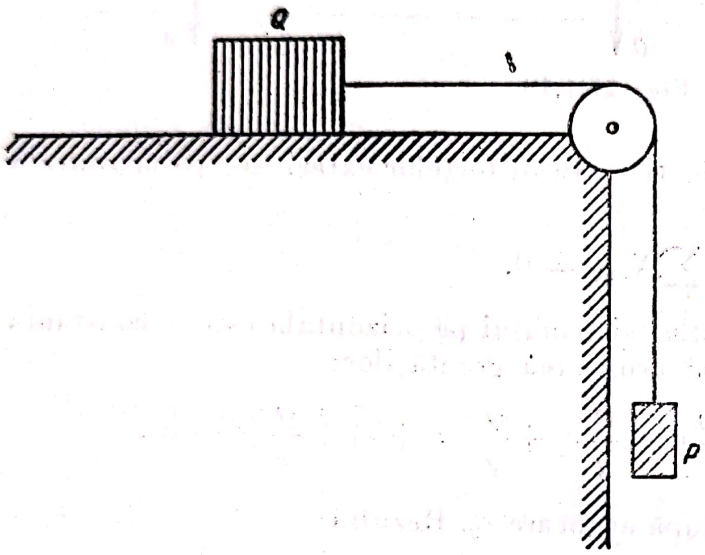


Fig. 27.1.19

Răspuns: $a = g\dfrac{P - fQ}{P+Q}$;

$$T = \frac{PQ\,(1+f)}{P+Q}.$$

27.1.20. Două sarcini A și B de greutățile P și Q, legate printr-un fir, care trece peste un scripete fără greutate, pot aluneca pe fețele unei prisme fixe, coeficientul de frecare fiind f. Să se afle accelerația a, cu care se vor mișca sarcinile, dacă unghiurile α și β sînt cunoscute.

Răspuns: $a = g\dfrac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Q(\sin\beta + f\cos\beta)}{P+Q}$.

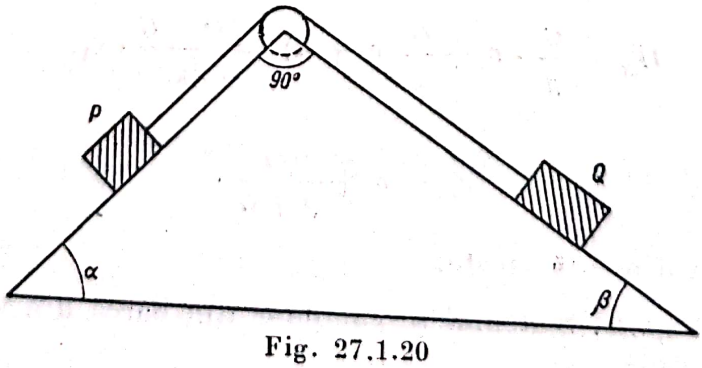


Fig. 27.1.20

27.1.21. O pană A cu unghiul α, de greutate P, se sprijină, cu o parte, pe un perete vertical neted, iar cu partea cealaltă, pe o prismă B de greutate Q, care poate aluneca fără frecare pe un plan orizontal fix.

Să se afle accelerațiile a și a_1 ale penei și prismei, precum și presiunea N a penei pe prismă.

Răspuns: $a = \dfrac{P}{P + Q\,\mathrm{tg}^2\alpha}\,g$; $a_1 = \dfrac{P\,\mathrm{tg}\alpha}{P + Q\,\mathrm{tg}^2\alpha}\,g$; $N = \dfrac{PQ\,\sin\alpha}{P\cos^2\alpha + Q\sin^2\alpha}$.

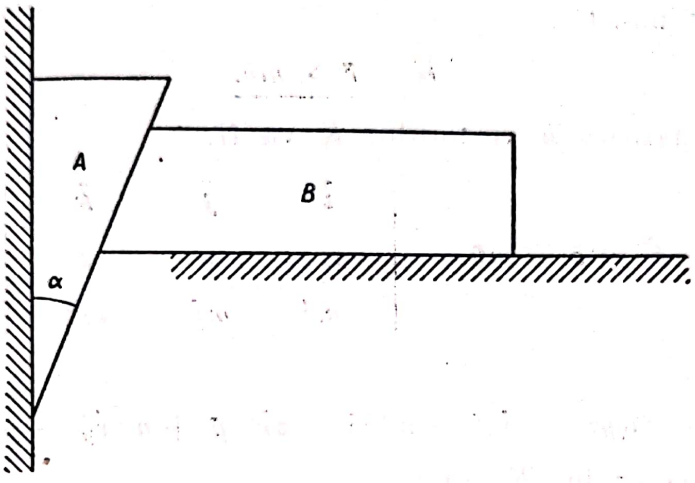


Fig. 27.1.21

27.1.22. La capetele unei grinzi drepte, omogene, de lungime l și masă M, care se mișcă pe un plan orizontal, neted, acționează de-a lungul axei sale două forțe $\bar{P}$ și $\bar{Q}$. Să se afle accelerația grinzii, precum și tensiunea într-o secțiune transversală oarecare, dacă $P > Q$.

Răspuns: Accelerația grinzii este $\dfrac{P-Q}{M}$.

Tensiunea în secțiunea aflată la distanța x de punctul de aplicare a forței $\bar{Q}$, este

$$T = \frac{x}{l}(R - Q) + Q.$$

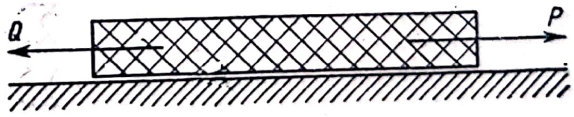


Fig. 27.1.22

27.1.23. Să se afle traiectoria absolută a sferei A, de masă m, care se rostogolește pe suprafața unui cilindru perfect neted, de masă M și rază r, așezat pe un plan orizontal perfect neted.

Răspuns: O elipsă cu semiaxele

$$\frac{M}{M+m}\,r \text{ și } r.$$

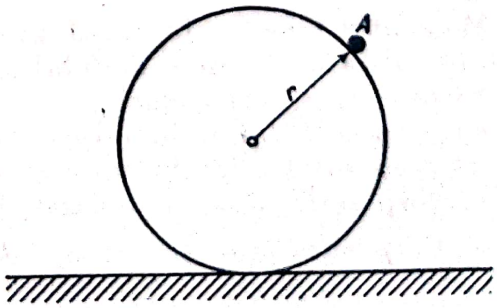


Fig. 27.1.23

27.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Prin moment cinetic al unui punct material în raport cu punct O se înțelege momentul vectorului impulsului (sau cantitatea de mișcare) în raport cu acest punct:

$$\underline{\bar{K} = \bar{r} \times m\bar{v}.}$$

Expresia analitică a vectorului $\bar{K}$ va fi:

$$\bar{K} = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

sau

$$\bar{K} = m(yz - z\dot{y})\bar{i} - m(x\dot{z} - z\dot{x})\ \bar{y} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\bar{k},$$

componentele vectorului K fiind:

$$K_x = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$
$$K_y = m(x\dot{z} - z\dot{y})$$
$$\underline{K_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).}$$

Momentul cinetic pentru un sistem de puncte materiale este dat de relația:

$$\underline{\bar{K} = \sum \bar{r} \times m\bar{v}}$$

și va avea componentele:

$$K_x = \sum m\,(y\dot{z} - z\dot{y})$$
$$K_y = \sum m\,(x\dot{z} - z\dot{x})$$
$$K_z = \sum m\,(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Momentul cinetic, în cazul unui sistem de puncte materiale continue aflat în mișcare, depinde de felul mișcării sistemului (corp solid rigid).

Se deosebesc trei cazuri:

a) corp solid aflat în mișcare de translație;
b) corp solid aflat în mișcare de rotație;
c) corp solid aflat în mișcare compusă — translație și rotație.

a) *Corp solid aflat în mișcare de translație:*

$$\bar{K} = \sum \bar{r} \times m\bar{v};$$

se notează:

$$\bar{r}_0 = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{\Sigma m_i};$$

unde:

r_0 este vectorul centrului de mase;

derivînd:

$$\bar{v}_0 = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{\Sigma m_i},$$

$\bar{v}_0$ — viteza centrului de mase;

se observă că $\sum m_i = M$ și se obține:

$$M \cdot \bar{v}_0 = \sum m_i \bar{v}_i.$$

Introducînd această relație în expresia momentului cinetic rezultă:

$$\bar{K} = \sum \bar{r}_i \times m\bar{v}_i;$$
$$\underline{\bar{K} = \bar{r}_0 \times M\bar{v}_0.}$$

La o mișcare de translație, momentul cinetic în raport cu un punct este același ca și cînd masa întregului sistem s-ar concentra în centrul de greutate al corpului.

Analitic se proiectează pe axe și se obține:

$$K_x = M(y_0 v_{0z} - Z_0 v_{0y})$$
$$K_y = M(Z_0 v_{0x} - X_0 v_{0z})$$
$$\underline{K_z = M(x_0 v_{0y} - Y_0 v_{0x})}$$

b) *Corp solid aflat în mișcare de rotație:*

Se dă:

$$\bar{K} = \sum \bar{r} \times mv$$

sau:

$$K = \sum \bar{r} \times m(\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Expresia analitică a acestui dublu produs vectorial se poate scrie:

$$K = \sum r_i x \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ mx & my & mz \end{vmatrix} = \sum r_i x \, [\omega_y mz - \omega_z my] \, \bar{i} -$$

$$- \sum r_i x \, [\omega_x mz - \omega_z mx] \, \bar{j} + \sum r_i x \, [\omega_x my - \omega_y mx] \, \bar{k}.$$

Această expresie se poate scrie sub forma unui produs vectorial:

$$\bar{K} = \sum \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \omega_x mz - \omega_z my & -\omega_x mz + \omega_z mx & \omega_x my - \omega_y mx \end{vmatrix}$$

sau:

$$\bar{K} = \sum m_i (\omega_x y^2 - \omega_y xy + \omega_x z^2 - \omega_z xz)\,\bar{i} - \sum m_i [\omega_x yx - \omega_y x^2 - \omega_y z^2 + \omega_z yz]\,J + \\ + \sum m_i [-\omega_x zx + \omega_z x^2 - \omega_y zy + \omega_z y^2]\,\bar{k}.$$

Dacă se desfăşoară parantezele şi se ţine seama de expresiile stabilite pentru momentele de inerţie rezultă:

$$K = [J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z]\,\bar{i} + [J_y\omega_y - J_{yx}\omega_x - J_{yz}\omega_z]\,\bar{j} + \\ + [J_z\omega_z - J_{zy}\omega_y - J_{zx}\omega_x]\,\bar{k}.$$

Pentru simplificare se consideră cazul $\bar{\omega} = \omega_z\bar{k}$, fiind cel mai des întîlnit în aplicaţii. Se obţine:

$$\underline{\bar{K} = J_{xz}\omega z\,\bar{i} + J_{yz}\omega z\,\bar{j} + J_z\omega z\,\bar{k},}$$

sau

$$\underline{K = J_{xz}\omega\,\bar{i} + J_{yz}\omega\,\bar{j} + J_z\omega\,\bar{k}.}$$

În cazul unei plăci plane rezultă: $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$, dacă se roteşte în jurul unei axe z, perpendiculară pe planul ei. Relaţia devine:

$$\underline{\bar{K} = J_z\bar{\omega}.}$$

c) *Corp solid aflat în mişcare compusă — translaţie şi rotaţie:*

Din translaţie rezultă un moment cinetic vectorul $\bar{K}_1$ care se calculează după metoda arătată la punctul *a)*. Din rotaţie rezultă un moment cinetic, vectorul $\bar{K}_2$, care se calculează după metoda arătată la punctul *b)*.

Momentul cinetic al solidului rigid va fi, în acest caz:

$$\underline{\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2.}$$

Teorema momentului cinetic. Derivînd expresia $\bar{K} = \bar{r} \times m\bar{v}$ a momentului cinetic se obţine:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \sum \bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt},$$

dar $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ şi deci primul produs (termenul întîi) se anulează şi se poate scrie:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{r} \times m\bar{a}$$

sau:

$$\frac{dK}{dt} = \sum \bar{M},$$

unde $\sum \bar{M}$ reprezintă suma momentelor care acţionează asupra punctului, sistemului de puncte materiale sau sistemului de corpuri. Se observă că:

$$\sum \bar{M} = \sum \bar{M}_e + \sum \bar{M}_i$$

Scanned with OKEN Scanner

și că deci și în cazul sistemelor $\sum \bar{F}_i = 0$:

$$\sum \bar{M}_i = 0,$$

$$\underline{\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{M}_e.}$$

Observația 1: Dacă $\sum \bar{M}_e = 0$,

$$\bar{K} = \text{const.},$$

deci momentul cinetic se conservă.

Observația 2: În cazul punctului material va rezulta:

$$\underline{\bar{K} = \text{const.} = \bar{r} \times m\bar{v},}$$

dar viteza areolară este dată de relația:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\bar{r} \times \bar{v}|,$$

deci:

$$\frac{1}{2}|\bar{r} \times m\bar{v}| = m\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$

Dacă $M_e = 0$, rezultă că viteza areolară este o constantă.

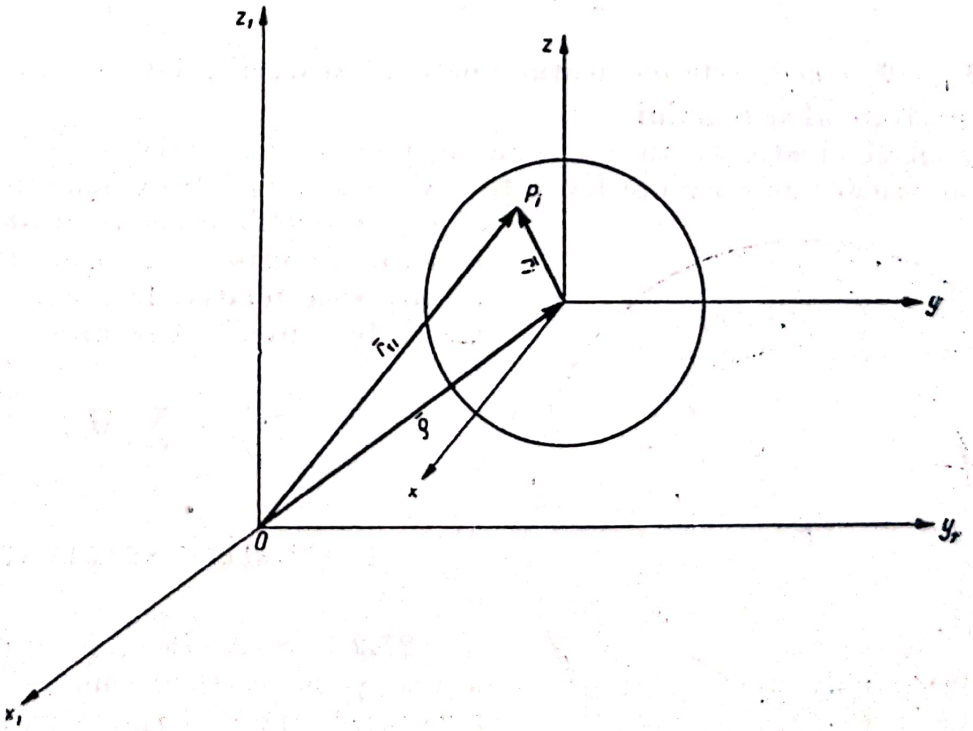


Fig. 27.2,1

Uneori teorema momentului cinetic se aplică față de un triedru mobil. Se aplică astfel teorema momentului cinetic în mișcare relativă față de centrul de greutate pentru a obține astfel relații cît mai simple.

Scanned with OKEN Scanner

Se dă:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{\rho} + \bar{r}_i.$$

Teorema momentului cinetic față de sistemul fix dă:

$$\frac{d\bar{K}_1}{dt} = \sum \bar{r}_{1i} \times \bar{F}_i,$$

relație care se poate transforma. Rezultă:

$$\bar{K}_1 = \sum \bar{r}_{1i} \times m_i \bar{v}_{1i},$$

sau

$$\bar{K}_1 = \sum (\bar{\rho} + \bar{r}_i) \times m_i (\bar{\rho} + \bar{r}_i).$$

Dezvoltînd se obține:

$$\bar{K}_1 = \bar{\rho} \times M\bar{v}_0 + \bar{\rho} \times \frac{d}{dt} \sum m_i \bar{r}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i.$$

Dacă O este centrul de greutate, al doilea termen se anulează, și se obține:

$$\underline{\bar{K}_1 = \bar{\rho} \times M\bar{v}_0 + \bar{K}_0},$$

unde: $\underline{K_0 = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i}$ este momentul cinetic al mișcării relative față de centrul de greutate al sistemului.

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale, în mișcarea sa față de un triedru de referință fix, este egal cu suma dintre momentul cinetic al masei sistemului concentrat în centrul său de mase și momentul cinetic în mișcarea relativă față de centrul de mase. În consecință rezultă:

$$\frac{d\bar{K}_i}{dt} = \sum \bar{M}_e.$$

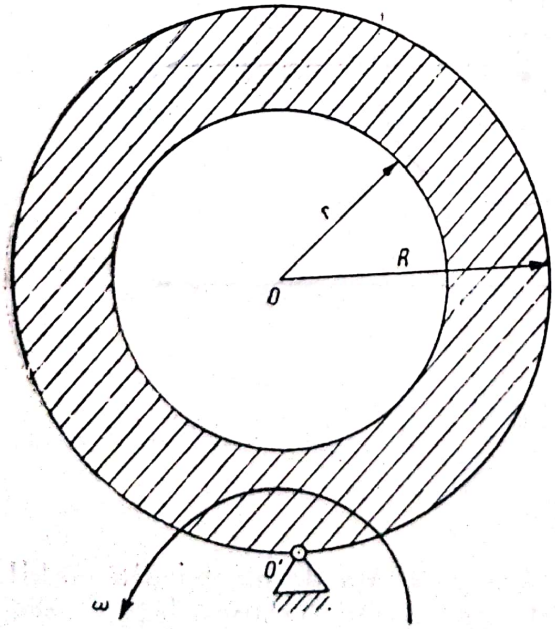


Fig. 27.2.1

B. PROBLEME REZOLVATE

27.2.1. Să se afle momentul cinetic al unei șaibe verticale omogene avînd raza interioară r și raza exterioară R, și greutatea G, știind că ea se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe perpendiculare pe planul său și trecînd printr-un punct O', de pe periferia sa (fig. 27.2.1).

Rezolvare.

$$K = J_{o'} \cdot \omega;$$

$$J_{o'} = J_o + MR^2;$$

$$J_{o'} = \frac{G(R^2 + r^2)}{2g}$$

(vezi cap. Momente de inerție)

$$J_{o'} = \frac{G(R^2 + r^2)}{2g} + \frac{GR^2}{g} = \frac{G(3R^2 + r^2)}{2g};$$

$$\bar{K} = \frac{G(3R^2 + r^2)}{2g}\bar{\omega}.$$

27.2.2. Să se afle momentul cinetic al unei sfere omogene, de rază R și greutate G, care se rotește (fig. 27.2.2):

a) cu viteza unghiulară ω = const., în jurul diametrului vertical Oy;

b) cu viteza unghiulară ω_1 = const., în jurul unei axe verticale Ay, tangentă la sferă.

Rezolvare. Se știe (vezi capitolul Momente de inerție) că momentul de inerție al unei sfere omogene, de rază R și greutate p, pe unitatea de volum, în raport cu centrul ei, este:

$$J_0 = \frac{4\pi pR^5}{5g},$$

sau în funcție de greutatea totală a sferei G:

$$J_0 = \frac{12GR^2}{5g}.$$

Momentul de inerție al sferei în raport cu axele rectangulare xyz, care trec prin centrul ei, sînt egale din cauza simetriei. Folosind relația:

$$J_0 = J_x + J_y + J_z$$

și ținînd seamă că $J_x = J_y = J_z$, rezultă:

$$J_x = J_y = J_z = \frac{J_0}{3} = \frac{4\pi pR^5}{15g} = \frac{4GR^2}{5g}.$$

Folosind relația lui Steiner se obține și momentul de inerție al sferei în raport cu axa Ay:

$$J_{y'} = J_y + MR^2 = \frac{4GR^2}{5g} + \frac{GR^2}{g} = \frac{9GR^2}{5g}.$$

Momentul cinetic al unui corp în mișcare de rotație este dat de formula:

$$\bar{K} = J_\Delta \bar{\omega},$$

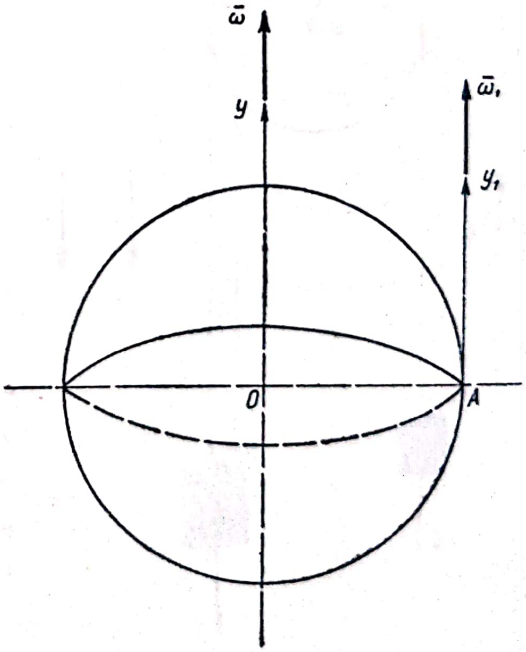


Fig. 27.2.2

unde J_Δ — momentul de inerție în raport cu axa de rotație. În cazul acestei probleme:

$$K = J_y\omega = \frac{4GR^2}{5g}\omega$$

și

$$K_1 = J_{y1}\omega_1 = \frac{9GR^2}{5g}\omega_1.$$

27.2.3. Peste un scripete fix, omogen, de greutate G și rază R, trece un fir imponderabil și inextensibil, la extremitățile căruia sînt suspendate greutățile P și Q $(P > Q)$. Să se afle accelerația cu care se deplasează greutățile P și Q. Nu se ține seamă de frecări și de rezistența aerului (fig. 27.2.3).

Rezolvare. Momentul de inerție al scripetelui, considerat ca disc omogen, în raport cu centrul său, este:

$$J_0 = \frac{GR^2}{2g}.$$

Notînd cu v și a, respectiv ω și ε, vitezele și accelerațiile cu care se mișcă cele două greutăți și scripetele rezultă:

$$v = R\omega,$$

$$a = R\omega^2.$$

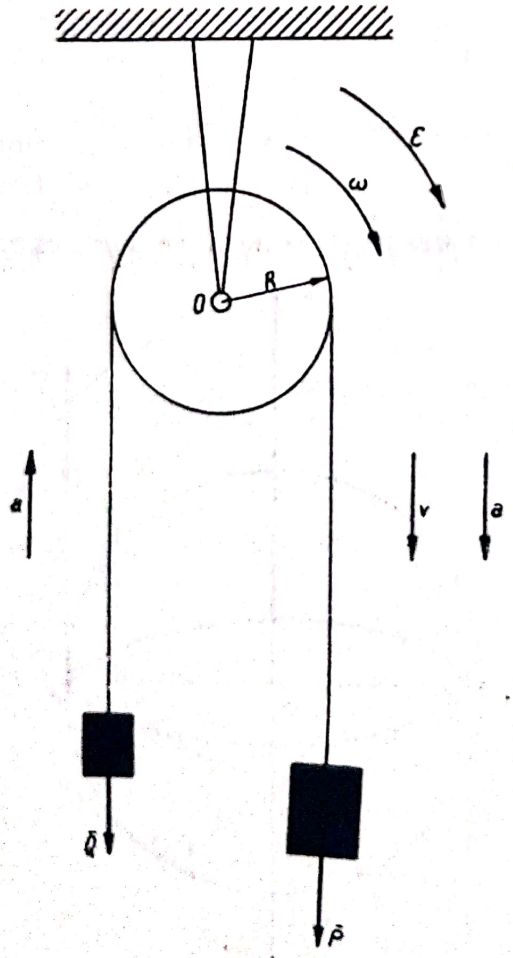


Fig. 27.2.3

Momentul cinetic al sistemului format de disc și de greutățile P și Q, în raport cu axa de rotație care trece prin centrul discului, este:

$$K = J\omega + \frac{P}{g}R^2\omega + \frac{Q}{g}R^2\omega$$

sau

$$K = \left(\frac{GR^2}{2g} + \frac{PR^2}{g} + \frac{QR^2}{g}\right)\omega;$$

$$K = \frac{(G + 2P + 2Q)R^2}{2g}\omega.$$

Derivata momentului cinetic în raport cu timpul este:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{(G+2P+2Q)R^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{(G+2P+2Q)R^2}{2g}\varepsilon.$$

Suma momentelor forțelor exterioare în raport cu axa care trece prin centrul scripetelui este:

$$\sum M_{ext} = (P - Q)R.$$

Aplicînd teorema momentului cinetic:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{M}_{ext}$$

se obține:

$$\frac{G + 2P + 2Q}{2g} \cdot \varepsilon = (P - Q) R,$$

de unde:

$$\varepsilon = \frac{2(P - Q)}{(G + 2P + Q)R} g \quad \text{și} \quad a = R\varepsilon = \frac{2(P - Q)}{G + 2P + Q} g.$$

27.2.4. Pe un ax orizontal sînt fixați solidar doi scripeți avînd razele r și R, peste care sînt înfășurate două fire care au legate la capete greutățile P și Q (fig. 27.2.4).

Să se afle accelerația unghiulară ε a axului: *a)* considerînd greutățile ansamblului celor doi scripeți neglijabile; *b)* ținînd seamă și de greutățile scripeților și considerînd momentul de inerție J al întregului ansamblu de scripeți cunoscut.

Se neglijează frecările.

Rezolvare. Se notează viteza unghiulară a axului cu ω.

a) Momentul cinetic al sistemului este:

$$\bar{K} = \frac{P}{g} r^2 \bar{\omega} + \frac{Q}{g} R^2 \bar{\omega};$$

$$\sum M_{ext} = P \cdot r - QR;$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{P}{g} r^2 \varepsilon + \frac{Q}{g} R^2 \varepsilon = \frac{Pr^2 + QR^2}{g} \varepsilon;$$

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum M_{ext};$$

$$\frac{Pr^2 + QR^2}{g} \varepsilon = Pr - QR;$$

$$\varepsilon = \frac{Pr - QR}{Pr^2 + QR^2} g.$$

b) $K = \frac{P}{g} r^2 \omega + \frac{Q}{g} R^2 \omega + J\omega;$

$$\sum M_e = Pr - QR;$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{P}{g} r^2 \varepsilon + \frac{Q}{g} R^2 \varepsilon + J\varepsilon = \frac{Pr^2 + QR^2 + Jg}{g} \varepsilon.$$

Deci: $\frac{Pr^2 + QR^2 + Jg}{g} \cdot \varepsilon = Pr - QR;$

$$\varepsilon = \frac{Pr - QR}{Pr^2 + QR^2 + Jg} g.$$

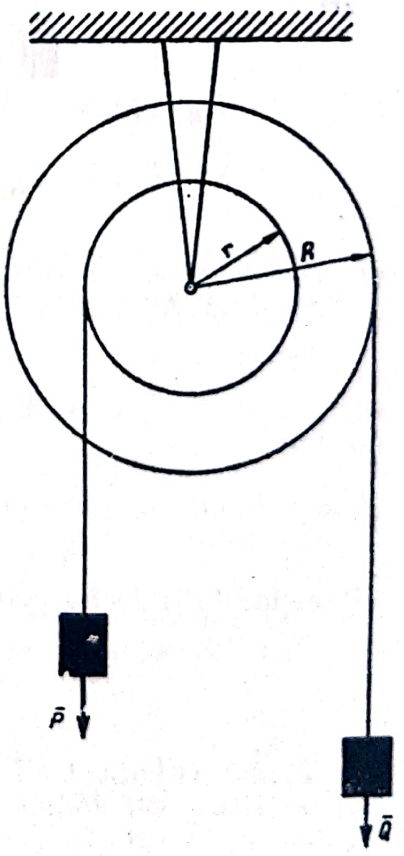


Fig. 27.2.4

27.2.5. Peste un scripete vertical, de masă neglijabilă, care se poate roti în jurul unei axe orizontale ce trece prin centrul său, este trecută o funie. Scripetele este în repaus.

De capetele funiei se agață doi oameni de aceeași masă. Viteza relativă a primului om fiind zero și a celui de-al doilea u, se cere să se afle cu ce viteză se va mișca (o dată cu funia) primul om (v. fig. 27.2.5).

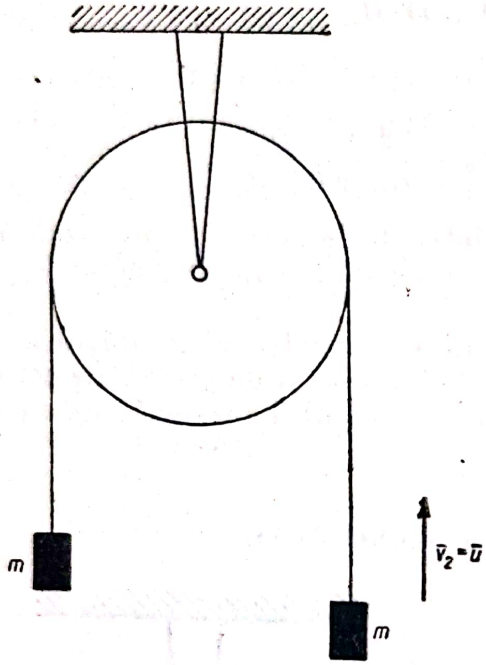


Fig. 27.2.5

Se neglijează frecările și rezistența aerului.

Rezolvare. Greutățile celor doi oameni fiind egale, distanțele liniilor de acțiune ale forțelor reprezentate de aceste greutăți (fig. 27.2.5) la axa de rotație fiind de asemenea egale, suma momentelor forțelor exterioare este nulă. Deci se poate scrie:

$$\frac{dK}{dt} = 0;$$

rezultă:

$$K = K_0 \text{ (constant)}.$$

Notînd cu ω viteza cu care se va roti scripetele, valoarea momentului cinetic este:

$$K = 2mR^2\omega + mRu = K_0,$$

dar la $t = 0$, $\omega = 0$ și $u = 0$.

Rezultă $K_0 = 0$.

Deci:

$$2mR^2\omega + mRu = 0,$$

de unde

$$\omega = -\frac{u}{2R},$$

viteza funiei și deci a primului om va fi:

$$V = R\omega = -\frac{u}{2}.$$

27.2.6. O bară AOB în formă de unghi drept se poate roti în jurul laturii sale verticale AO. Pe latura ei orizontală este așezată o greutate C de masă m. În momentul inițial, sarcina se află la distanța a de punctul O. Se imprimă sistemului o viteză unghiulară ω_0 în jurul axei OA (fig. 27.2.6).

Să se afle relația dintre viteza unghiulară a barei ω și distanța $OC = x$, dacă momentul de inerție al barei față de AO este J.

Rezolvare. Forțele exterioare care acționează asupra sistemului sînt greutatea $C = mg$ și greutatea barei AOB. Aceste forțe fiind paralele cu axa de rotație AO dau momente, față de această axă, nule. Deci, aplicînd teorema momentului cinetic se poate scrie:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{M}_{ext};$$

$$\frac{dK_z}{dt} = 0 \text{ și deci:}$$

$$K_z = K_0 \text{ (constant).}$$

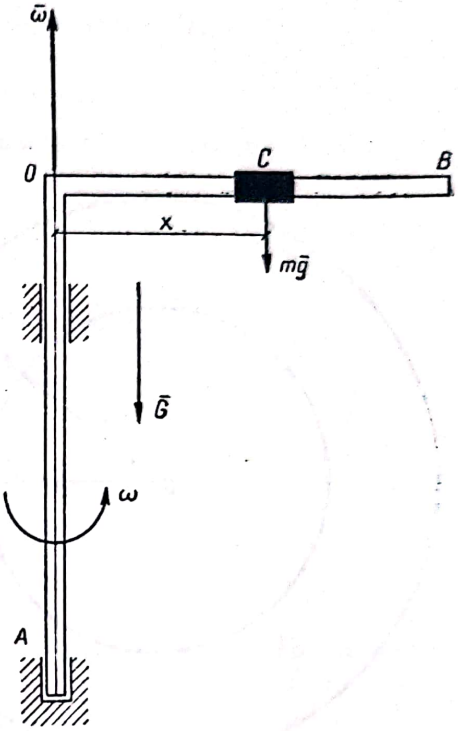


Fig. 27.2.6

Valoarea momentului cinetic rămîne constantă în tot timpul mișcării, aceasta înseamnă că momentul cinetic la un moment oarecare trebuie să fie egal cu momentul cinetic inițial.

$$J\omega + mx^2\omega = J\omega_0 + ma^2\,\omega,$$

de unde:

$$\omega = \omega_0 \frac{J + ma^2}{J + mx^2}.$$

27.2.7. Un disc omogen orizontal, de rază r și greutate P, se poate roti în jurul unei axe verticale, care trece prin centrul O al discului. Pe marginea discului merge un gîndac B de greutate p, legea mișcării lui fiind arc $AB = s = \frac{1}{2}at^2$ (fig. 27.2.7).

În momentul inițial, discul se află în repaus. Să se afle viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε a discului.

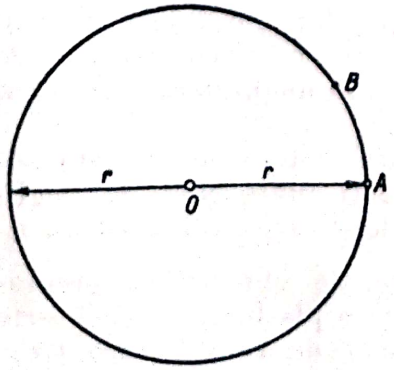


Fig. 27.2.7

Rezolvare. Viteza relativă a gîndacului va fi:

$$v = \dot{s} = at.$$

Forțele P și p fiind paralele cu axa de rotație, momentul lor în raport cu această axă este nul. Deci se poate scrie:

$$\frac{dK}{dt} = 0,$$

ceea ce înseamnă:

$$K = K_0 \text{ (constant).}$$

Viteza absolută a gîndacului are expresia:

$$v_a = r \cdot \omega + at.$$

Momentul cinetic față de sistemul fix, la un moment dat, este:

$$K = J\omega + \frac{p}{g} v_a r = \left(\frac{Pr^2}{2g} + \frac{pr^2}{g} \right) \omega + \frac{p}{g} r\, at;$$

$$\frac{(P + 2p)\, r^2}{2g} \omega + \frac{p \cdot r \cdot at}{g} = K_0,$$

dar la

$$t = 0;\ \omega = 0.$$

Rezultă:

$$K_0 = 0.$$

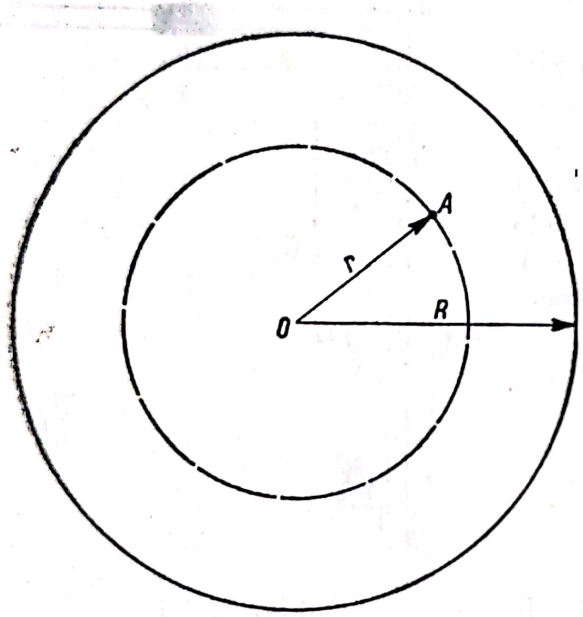
Deci:

$$\frac{(P + 2p)\, r^2}{2g} \omega + \frac{prat}{g} = 0,$$

de unde:

$$\omega = -\frac{2\, pat}{(P + 2p)\, r}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -\frac{2\, pa}{(P + 2p)\, r}.$$



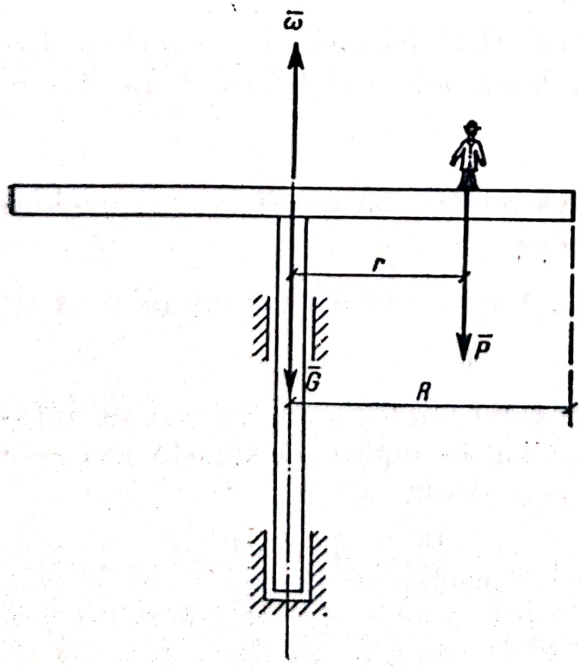


Fig. 27.2.8

27.2.8. O platformă orizontală, care poate fi considerată ca un disc omogen, avînd greutatea G și raza R, se poate roti în jurul unei axe verticale care trece prin centrul ei O.

Pe platformă, la o distanță $OA = r$, se află un om de greutate P. Platforma și omul sînt în stare de repaus. La un moment dat, omul începe să se miște descriind o circumferință de rază r cu viteza unghiulară relativă ω (fig. 27.2.8).

Să se afle viteza unghiulară cu care se va roti platforma. Se neglijează frecările și rezistența aerului.

Rezolvare. Se observă că greutatea omului și a platformei, fiind forțe paralele cu axa de rotație care trece prin centrul platformei, dau momente

nule în raport cu această axă. Aplicînd teorema momentului cinetic se poate scrie:

$$\dot{K}_z = \dot{K} = 0 \text{ și deci } K = K_0 = \text{const.}$$

Momentul de inerție al platformei față de axa de rotație este dat de relația:

$$J = \frac{GR^2}{2g}.$$

Dacă se notează cu Ω viteza unghiulară a platformei, viteza absolută a omului este dată de relația:

$$v_a = \Omega r + \omega r,$$

ținînd seamă că la $t = 0$, $\omega = 0$, $\Omega = 0$ se deduce $K_0 = 0$.

Se obține relația:

$$K_0 = 0 = \frac{GR^2}{2g}\Omega + \frac{Pr^2}{g}(\Omega + \omega),$$

de unde:

$$\Omega = -\frac{2Pr^2}{2Pr^2 + GR^2}\omega.$$

27.2.9. O șaibă de rază r și greutate G este înfășurată de un fir, a cărui extremitate este fixată de tavan (fig. 27.2.9). Să se afle accelerația a cu care se mișcă centrul șaibei în timpul căderii și accelerația ε a șaibei.

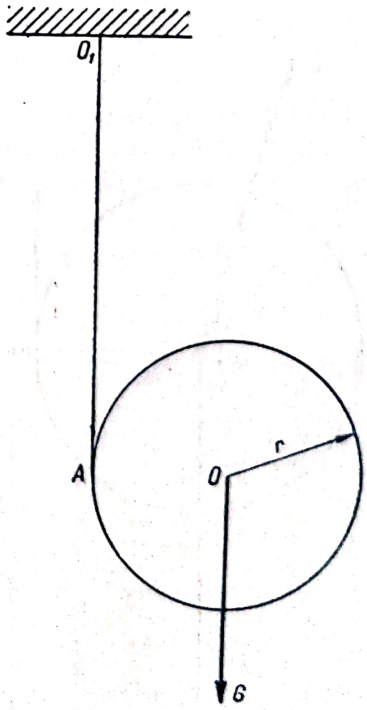


Fig. 27.2.9

Rezolvare. Teorema momentului cinetic aplicată în raport cu axa orizontală, O_1z, care trece prin O_1, dă:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z. \qquad (1)$$

Notînd cu v viteza centrului șaibei și cu ω viteza unghiulară a șaibei, expresia proiecției K_z a momentului cinetic, pe axa O_1z se poate scrie:

$$K_z = Mvr + J_0\omega = \frac{G}{g}\omega + \frac{Gr^2}{2g}\cdot\frac{v}{r} = \frac{3}{2}\frac{Gr}{g}v.$$

Notînd cu $a = \dot{v}$ accelerația centrului șaibei și cu $\varepsilon = \dot{\omega}$ accelerația unghiulară a șaibei:

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{3}{2}\frac{Gr}{g}a \qquad \varepsilon = \frac{a}{r} \qquad (2)$$

$$M_z = Gr. \qquad (3)$$

Înlocuind în relația (1) pe $\frac{dK_z}{dt}$ și M_z, dați de relațiile (2) și (3) se obține:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{Gr}{g} a = Gr,$$

de unde

$$a = \frac{2}{3} g;$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{g}{r}.$$

27.2.10. O roată de rază r, care se rotește cu viteza ω_0 constantă în jurul axei O, este apăsată de un sabot de frînă AB cu forța radială $\bar{N}$. După t_1 secunde roata se oprește ca urmare a frecării. Să se determine valoarea coeficientului de frecare f, dintre sabot și roată (27.2.10,*a*).

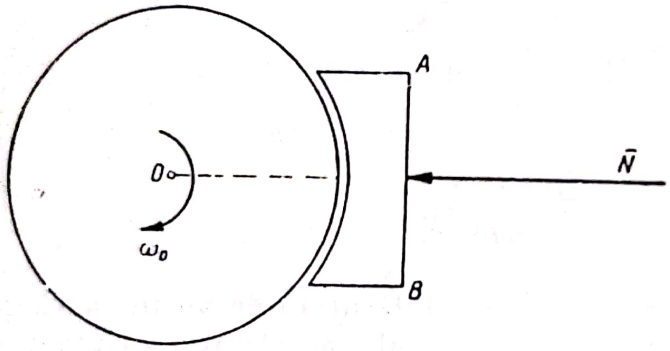


Fig. 27.2.10,*a*

Momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație este I.

Să se calculeze numărul de rotații pe care îl face roata pînă se oprește.

Rezolvare. Se izolează roata. Asupra ei vor acționa forțele (fig. 27.2.10, *b*):

G — greutatea proprie;
N — forța radială dată;
fN — forța de frecare;
R — reacțiunea din articulație (axa).

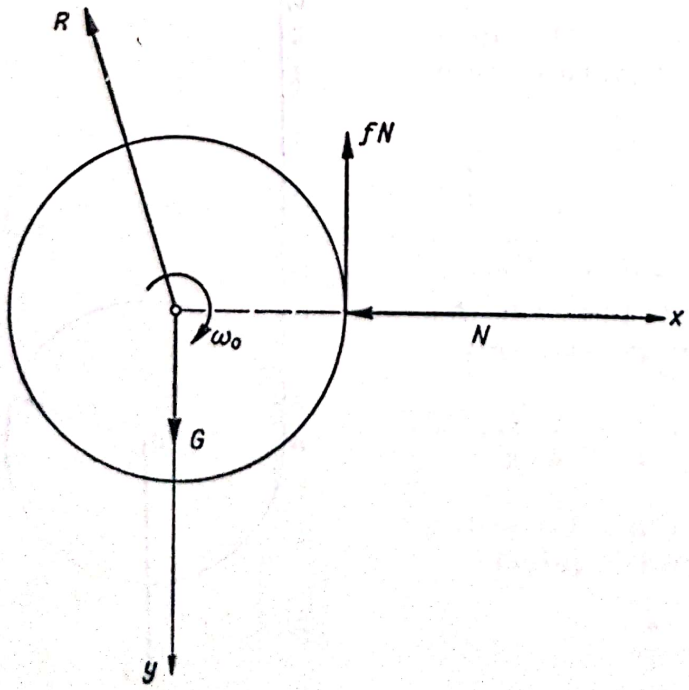


Fig. 27.2.10,*b*

Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotație:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z \qquad (1)$$

$$K_z = J\omega$$

$$\frac{dK}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon \qquad (2)$$

$$M_z = -fNr. \qquad (3)$$

Înlocuind valorile date de (2) și (3) în (1) se obține:

$$J\varepsilon = -fNr$$

$$\varepsilon = -\frac{fNr}{J}. \qquad (4)$$

Din relația (4) rezultă că $\varepsilon = \text{const.}$, deci mișcarea este o mișcare circulară uniform variată.

Expresia vitezei unghiulare va fi deci:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{5}$$

Pentru a determina timpul t_1 după care roata se oprește, se egalează în (5) $\omega = 0$. Rezultă:

$$\omega_0 = t_1 = 0,$$

de unde:

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_1}. \tag{6}$$

Comparînd relațiile (4) și (6) rezultă:

$$f = \frac{J\omega_0}{Nrt_1}.$$

Expresia măsurii θ a unghiului de rotație este:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2;$$

pentru $t = t_1$ rezultă:

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_1} t_1^2 = 2\pi,$$

de unde:

$$n = \frac{\omega_0 t_1}{4\pi},$$

n — numărul de rotații pînă ce roata se oprește.

27.2.11. O bilă sferică A, care se află într-un vas cu lichid și este fixată la capătul tijei AB de lungime l, se rotește în jurul axei verticale O_1O_2 cu o viteză unghiulară inițială ω_0. Forța de rezistență a lichidului este proporțională cu viteza unghiulară de rotație $R = \alpha m \omega$, unde m este masa bilei și α — un coeficient de proporționalitate fig. 27.2.11. Să se determine după cît timp viteza unghiulară de rotație devine de două ori mai mică decît cea inițială și care este numărul de rotații pe care le face tija, împreună cu bila, în acest interval de timp.

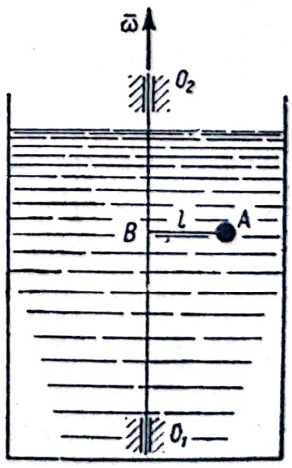


Fig. 27.2.11

Masa bilei se consideră concentrată în centrul ei. Masa tijei se neglijează.

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotație O_1O_2:

$$\frac{dK}{dt} = \sum M_e. \tag{1}$$

Momentul forței reprezentată de greutatea bilei, în raport cu axa de rotație O_1O_2, este nul, forța fiind paralelă cu axa.

Momentul forței $R = \alpha\, m\, \omega$ în raport cu axa de rotație este $M_e = l\alpha\, m\omega$ (vectorul $\overline{M}_e$ are sensul contrar vectorului $\overline{K}$ întrucît forța R se opune mișcării).

Momentul cinetic într-un moment oarecare va fi:

$$K = ml^2\omega, \quad \text{iar } \frac{dK}{dt} = ml^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Înlocuind valorile lui $\overline{K}$ și $\sum\overline{M}_e$ în ecuația (1) se obține:

$$ml^2\frac{d\omega}{dt} = -ml\alpha\omega;$$

simplificînd factorii $m\ l$ se obține:

$$l\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega. \tag{2}$$

Separînd variabilele și integrînd, se obține:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l};$$

$$\ln\omega = -\frac{\alpha}{l}t + C_1. \tag{3}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_1 se scrie, la momentul $t = 0$, $\omega = \omega_0$. Rezultă:

$$\ln\omega_0 = C_1.$$

Înlocuind această valoare în ecuația (3) și trecînd termenii care exprimă logaritm în membrul 1, ecuația (3) devine:

$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l}t;$$

această ecuație exprimă viteza bilei în funcție de timp. Punînd condiția ca $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, se află timpul cerut în

$$\ln\frac{\frac{\omega_0}{2}}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l}t$$

sau

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{l}t,$$

de unde:

$$t = -\frac{l}{\alpha} \ln \frac{1}{2}$$

sau ținînd seamă că: $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2$.

$$t = +\frac{l}{\alpha} \ln 2$$

Pentru a afla numărul de rotații x trebuie să se cunoască legea de mișcare a bilei, adică $\theta = f(t)$.

Ținînd seamă că $\dot{\theta} = \omega$ și $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt}$, ecuația (2) se poate scrie:

$$l\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}$$

sau

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{l}\dot{\theta} = 0.$$

Ecuația caracteristică este:

$$r^2 + \frac{\alpha}{l} r = 0$$

și rădăcinile ecuației caracteristice sînt:

$$r_1 = 0 \quad \text{și} \quad r_2 = -\frac{\alpha}{l}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este deci de forma:

$$\theta = C_1 + C_2 e^{-\frac{\alpha}{l} t}. \tag{4}$$

Pentru determinarea constantei se calculează și $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = -C_2 \frac{\alpha}{l} e^{-\frac{\alpha}{l} t} \tag{5}$$

scriind că la $t = 0$, $\theta = 0$ și $\omega = \omega_0$, se obține:

$$O = C_1 + C_2,$$

$$\omega_0 = -C_2 \frac{\alpha}{l},$$

rezultă: $C_2 = -\frac{l\omega_0}{\alpha}$ și $C_1 = +\frac{l\omega_0}{\alpha}$.

Înlocuind aceste valori în ecuația (4) se obține:

$$\theta = \frac{l\omega_0}{\alpha} - \frac{l\omega_0}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{l}t},$$

sau:

$$\theta = \frac{l\omega_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{l}t}\right). \tag{6}$$

Pentru a calcula numărul de rotații se calculează întîi expresia măsurii unghiului de rotație θ_1, străbătut de bilă în timpul $t = \frac{l}{\alpha} \ln 2$; înlocuind această valoare în ecuația (6) se obține succesiv:

$$\theta_1 = \frac{l\omega_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{l}\cdot\frac{l}{\alpha}\cdot \ln 2}\right)$$

$$\theta_1 = \frac{l\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\ln 2})$$

$$\theta_1 = \frac{l\omega_0}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}\right). \tag{7}$$

Relația (7) se mai poate scrie:

$$\theta_1 = \frac{l\omega_0}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{l\omega_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{2} = \frac{l\omega_0}{2\alpha}. \tag{8}$$

Exprimînd spațiul unghiular în funcție de numărul de rotații n se obține:

$$\theta_1 = 2\pi n. \tag{9}$$

Egalînd cele două valori ale lui θ, din expresiile (8) și (9) rezultă:

$$2\pi n = \frac{l\omega_0}{2\alpha};$$

$$n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}.$$

27.2.12. O placă dreptunghiulară $ABCD$ de greutate P și dimensiuni a, b se rotește în jurul unei axe verticale AB cu viteza unghiulară inițială ω_0 (fig. 27.2.12, *a*). Fiecare element al plăcii întîmpină, în timpul mișcării, rezistența aerului, a cărui direcție este perpendiculară pe planul plăcii, mări-

Scanned with OKEN Scanner

mea fiind direct proporţională cu aria elementului şi cu pătratul vitezei sale, factorul de proporţionalitate fiind K.

După cît timp viteza unghiulară a plăcii se reduce la jumătate?

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic.

Singura forţă care dă moment în raport cu axa de rotaţie este rezistenţa aerului, celelalte forţe fiind coplanare cu axa.

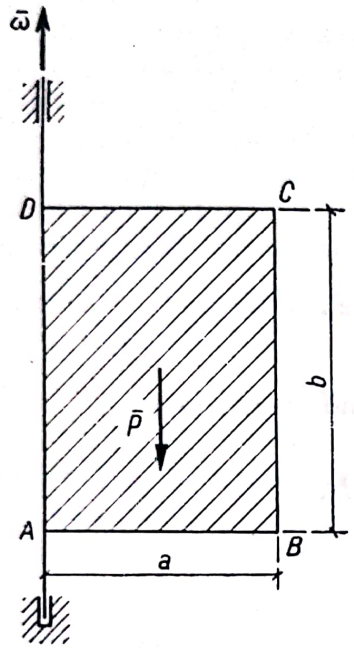


Fig. 27.2.12,*a*

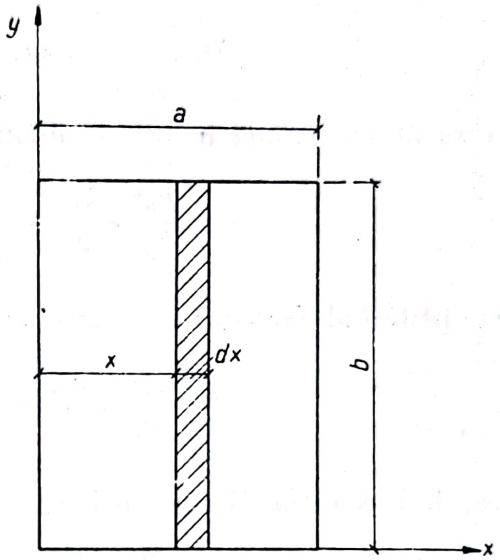


Fig. 27.2.12,*b*

Rezistenţa aerului pe această fîşie elementară (fig. 27.2.12,*b*) va fi:

$$dR = KV^2 dA; \tag{1}$$

$$dA = b\,dx, \quad V = x\omega,$$

deci

$$dR = K\omega^2 x^2 b\,dx. \tag{2}$$

Integrînd ecuaţia (2) se obţine:

$$R = \int_0^a dR = \int_0^a Kb\omega^2 x^2\,dx = \frac{Kba^3}{3}\,\omega^2.$$

Forţa R va fi aplicată în centrul forţelor paralele dR, abscisa centrului forţelor paralele dR fiind:

$$x_0 = \frac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i} = \frac{\int_0^a x\,dR}{\int_0^a dR} = \frac{\int_0^a Kb\omega^2 x^3\,dx}{\int_0^a Kb\,\omega^2 x^2\,dx} = \frac{3}{4}a.$$

Teorema momentului cinetic în raport cu axa AB dă:

$$\frac{dK_{AB}}{dt} = M_{AB}; \tag{3}$$

$$K_{AB} = J_{AB}\omega = \frac{Pa^2}{3g}\,\omega\;;$$

$$\frac{dK_{AB}}{dt} = \frac{Pa^2}{3g}\cdot\frac{d\omega}{dt};$$

$$M_{AB} = -Rx_0 = -\frac{Kba^4}{4}\,\omega^2\;;$$

înlocuind aceste valori în (3) se obține:

$$\frac{Pa^2}{3y}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Kba^4}{4}\,\omega^2.$$

Simplificînd factorul constant a^2 și separînd variabilele:

$$\frac{P}{3g}\cdot\frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{Kba^2}{4}\,dt, \tag{4}$$

și integrînd ecuația (4) se obține:

$$-\frac{P}{3g}\cdot\frac{1}{\omega} = -\frac{Kba^2}{4}\,t + C.$$

Scriind că la $t = 0$, $\omega = \omega_0$ se obține:

$$C = -\frac{P}{3g}\cdot\frac{1}{\omega_0}.$$

Deci soluția ecuației (4) este:

$$-\frac{P}{3g}\cdot\frac{1}{\omega} = -\frac{Kba^2}{4}\,t - \frac{P}{3g}\cdot\frac{1}{\omega_0}$$

sau:

$$\frac{P}{3g}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right) = \frac{Kba^2}{4}t. \tag{5}$$

Înlocuind în (5) $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ se obține:

$$\frac{P}{3g}\cdot\frac{1}{\omega_0} = \frac{Kba^2}{4}\,t,$$

de unde

$$t = \frac{4P}{3\gamma K b a \omega_0}.$$

27.2.13. Un vas este format din două încăperi: o încăpere cilindrică și o încăpere conică, ambele avînd același volum V. Baza comună cilindrului și conului este formată dintr-o placă prevăzută cu un orificiu A care se poate deschide (fig. 27.2.13).

Vasul este fixat pe o axă verticală OO_1 care se poate roti. Cilindrul este plin cu nisip. Se imprimă vasului o viteză unghiulară inițială constantă ω_0 în jurul axei OO_1 și apoi se deschide orificiul A. Nisipul va curge în încăperea conică. Să se afle viteza unghiulară pe care o va avea vasul cînd întreaga cantitate de nisip se va afla în încăperea conică.

Se neglijează masa vasului și frecările.

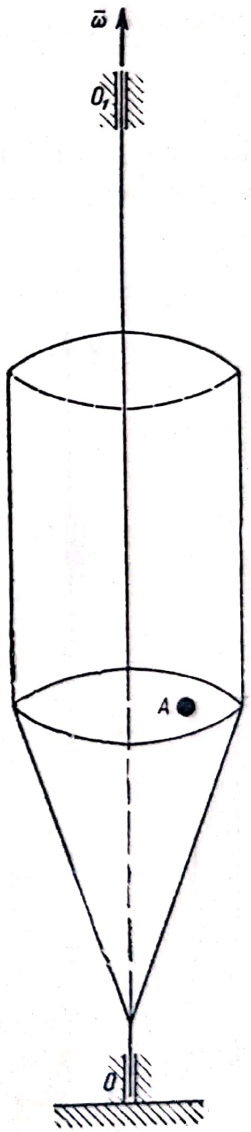


Fig. 27.2.13

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa OO_1:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z.$$

Dar $M_z = 0$, întrucît toate forțele exterioare sînt paralele cu axa. Deci:

$$\frac{dK_z}{dt} = 0; \tag{1}$$

integrînd ecuația (1) se obține:

$$K_z = K_{z_0} \text{ (constant)}; \tag{2}$$

$$K_{z_0} = J_{z_0}\,\omega_0, \text{ și } K_z = J_z\,\omega,$$

unde:

$$J_{z_0} = \frac{GR^2}{2g} \tag{3}$$

reprezintă momentul de inerție al cilindrului în raport cu axa OO_1;

$$J_z = \frac{3GR^2}{10g} = \frac{3}{5}\,J_{z_0} \tag{4}$$

fiind momentul de inerție al conului în raport cu axa OO_1.

Înlocuind valorile lui K_{z_0} și K_z, date de (3) și (4), în relația (2), se obține:

$$\omega = \frac{5}{3}\,\omega_0.$$

27.2.14. Un cilindru omogen drept vertical, de greutate G, avînd raza cercului de bază egală cu r și înălțimea h, se rotește cu viteza unghiulară $\omega_0 = \text{const.}$ în jurul unei axe verticale O_1O_2 care trece prin centrul cercului de bază.

Scanned with OKEN Scanner

O bilă din material plastic, avînd greutatea P, lovește cilindrul cu viteza orizontală V_0 normală pe cilindru, rămînînd lipită — după ciocnire — de cilindru (fig. 27.2.14).

Să se afle viteza pe care o va avea cilindrul după ciocnire.

Bila se va considera ca un punct material.

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic.

Forțele exterioare (G și P) fiind paralele cu axa de rotație O_1O_2, momentul lor în raport cu această axă este nul. Deci: $\Sigma M_e = 0$.

Momentul cinetic, în raport cu axa de rotație OO_2, al sistemului format din cilindru și bilă, înainte ca bila să ciocnească cilindrul, este:

$$K_0 = J_1\omega_0 \tag{1}$$

impulsul bilei fiind un vector care trece prin axa O_1O_2, momentul cinetic al bilei este nul, și după ciocnire este:

$$K = J_1\omega + J_2\omega, \tag{2}$$

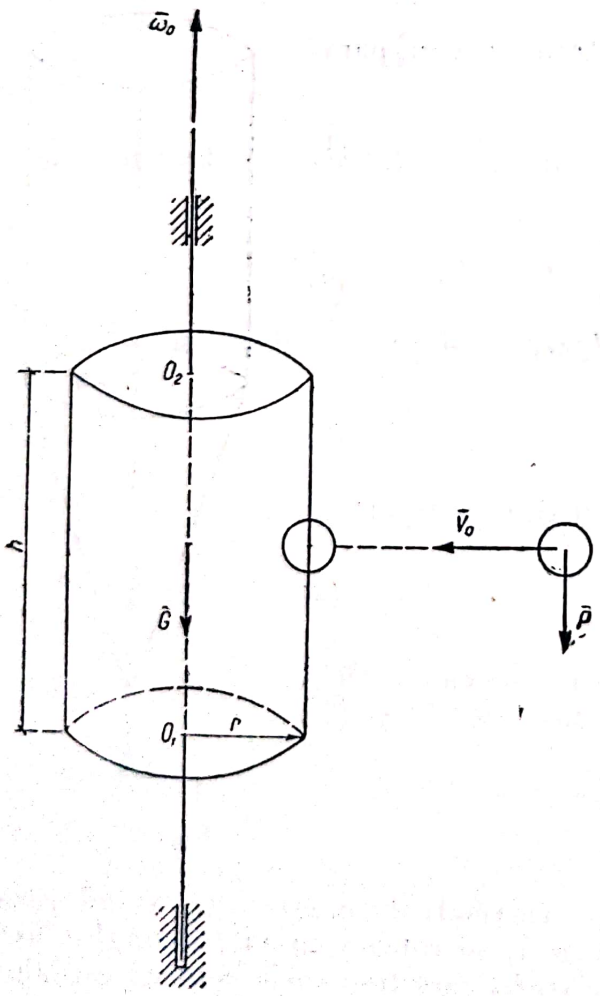


Fig. 27.2.14

J_1 fiind momentul de inerție al cilindrului în raport cu axa O_1O_2 și J_2 — momentul de inerție al bilei (lipită de cilindru) în raport cu aceeași axă.

Dar (vezi capitolul Momente de inerție):

$$J_1 = \frac{GR^2}{2g};$$

$$J_2 = \frac{PR^2}{g}.$$

Substituind aceste valori în relațiile (1) și (2) se obține:

$$K_0 = \frac{GR^2}{2g}\,\omega_0\ ;$$

$$K = \frac{GR^2}{2g}\,\omega + \frac{PR^2}{g}\,\omega = \frac{(G+2P)R^2}{2g}\,\omega. \tag{3}$$

Aplicînd teorema momentului cinetic în raport cu axa de rotație se poate scrie:

$$\frac{dK}{dt} = \sum M_e,$$

dar cum $\sum M_e = 0$, rămîne:

$$\frac{dK}{dt} = 0;$$

integrînd rezultă:

$$K = \text{const.};$$

înlocuind pe K cu valoarea lui dată de relația (3) se obține:

$$\frac{(G + 2P)R^2}{2g}\omega = C. \tag{4}$$

Scriind că la $t = 0$ viteza unghiulară a cilindrului este ω_0 și a bilei este zero, rezultă:

$$C = \frac{GR^2}{2g}\omega_0 = K_0;$$

înlocuind această valoare în relația (4) se obține:

$$\frac{(G + 2P)R^2}{2g}\omega = \frac{GR^2}{2g}\omega_0.$$

Rezolvînd se află valoarea lui ω:

$$\omega = \frac{G}{G + 2P}\omega_0.$$

27.2.15. O jucărie mecanică constă dintr-un șoricel care stă ridicat în două picioare și sprijinit pe coadă. În interiorul șoricelului se află un ax vertical de care este prinsă printr-un braț o greutate G la distanța a de ax. Axul este sprijinit pe două lagăre aflate în interiorul corpului șoricelului. El este antrenat de un mecanism de ceasornic cu arc spiral care rotește brațul cu greutatea G, cu o viteză unghiulară constantă ω_0.

Centrul de greutate al corpului șoricelului se află chiar pe axul motor, momentul său de inerție în raport cu axa fiind cunoscut ca egal cu J_Δ.

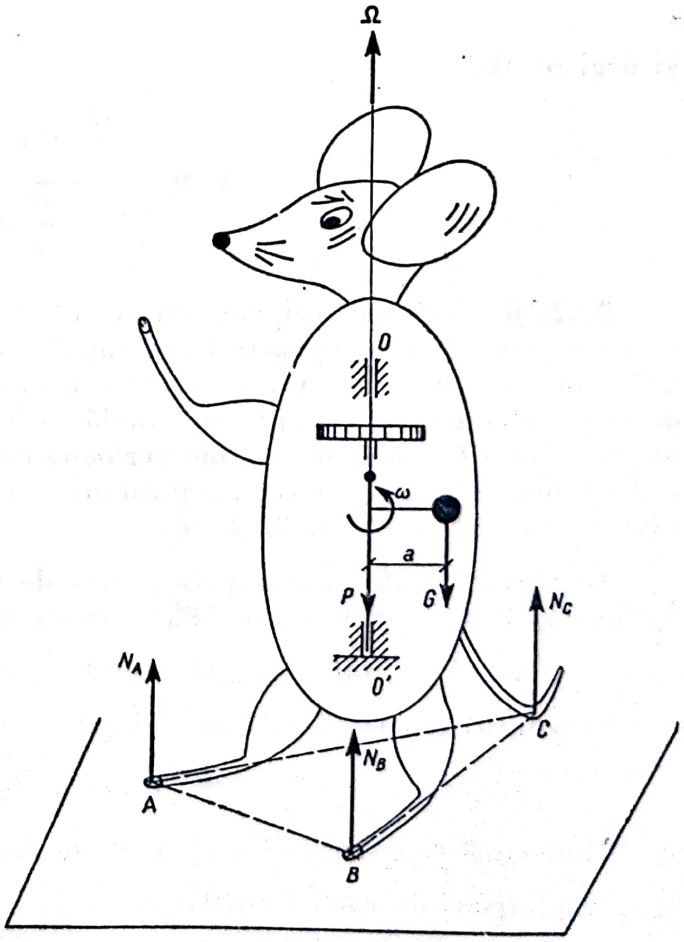


Fig. 27.2.15.

Dacă jucăria este așezată pe o masă perfect orizontală și perfect netedă, și mecanismul de ceasornic este lăsat să acționeze, se constată că șoricelul se rotește în jurul axei sale verticale. Să se determine viteza unghiulară cu care se rotește corpul șoricelului.

Rezolvare. Deoarece toate forțele sînt paralele cu axa, suma momentelor forțelor exterioare în raport cu axa este nulă:

$$M_{ext\Delta} = 0.$$

Rezultă $\dot{\bar{K}} = \sum \bar{M}_{ext} = 0$ și deci

$$\bar{K} = \text{const.}$$

Ținînd seamă de condițiile inițiale rezultă:

$$\bar{K} = \text{const.} = 0.$$

Se poate scrie:

$$K = O = J_\Delta \omega + \frac{G}{g} \cdot a^2(\omega - \omega_0)$$

și deci rezultă:

$$\omega = \frac{\frac{G}{g} \cdot a^2 \omega_0}{J_\Delta + \frac{G}{g} \cdot a^2}.$$

27.2.16. Peste un scripete care se rotește în jurul axei orizontale O trece un fir inextensibil care poartă la un capăt o sarcină de masă m; celălalt capăt al firului este prins de un arc vertical, a cărui extremitate B este fixă. Forța de tensiune a arcului este proporțională cu lungirea lui, factorul de proporționalitate fiind C. Să se determine perioada oscilațiilor sarcinii, știind că masa scripetelui — redusă la circumferința lui — este egală cu M și că firul nu poate aluneca pe scripete (fig. 27.2.16).

Rezolvare. Conform enunțului, forța de tensiune din arc va fi: $T = Cx$. Momentul forțelor exterioare în raport cu axa de rotație a scripetelui este:

$$\varepsilon M_e = mgR - CxR = (mg - Cx)R. \tag{1}$$

Momentul cinetic al sistemului este:

$$K = J_1\omega + J_2\omega. \tag{2}$$

Momentul de inerție al scripetelui în raport cu axa O este $J_1 = \frac{MR^2}{2}$.

Expresia momentului cinetic este:

$$K = MR^2 \cdot \omega + mR^2\omega = (M + m)R^2\omega; \tag{3}$$

derivînd, se obţine:

$$\frac{dK}{dt} = (M + m)R^2 \frac{d\omega}{dt} = (M + m)R^2\varepsilon. \qquad (4)$$

Notînd cu θ unghiul cu care se roteşte scripetele cînd sarcina m coboară cu distanţa x, se poate scrie:

$$x = R\theta,$$

de unde derivînd se obţine:

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta},$$

sau

$$\ddot{\theta} = \varepsilon = \frac{x}{R}.$$

Înlocuind această valoare a lui ε în expresia (4) se obţine:

$$\frac{dK}{dt} = (M + m)R^2 \frac{\ddot{x}}{R} (M + m)R\ddot{x}.$$

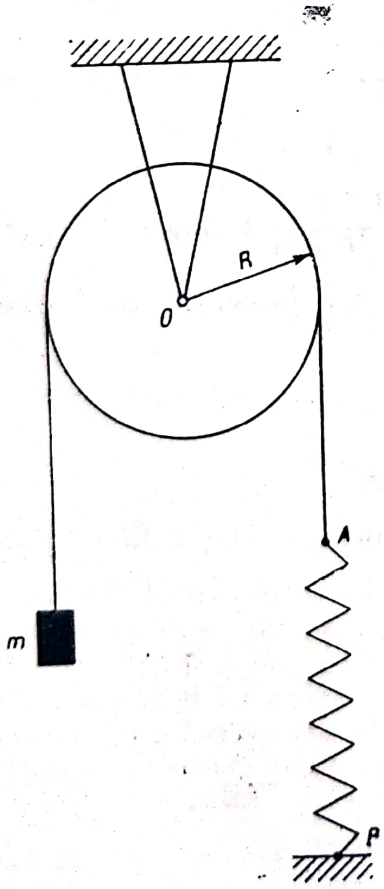


Fig. 27.16, *a*

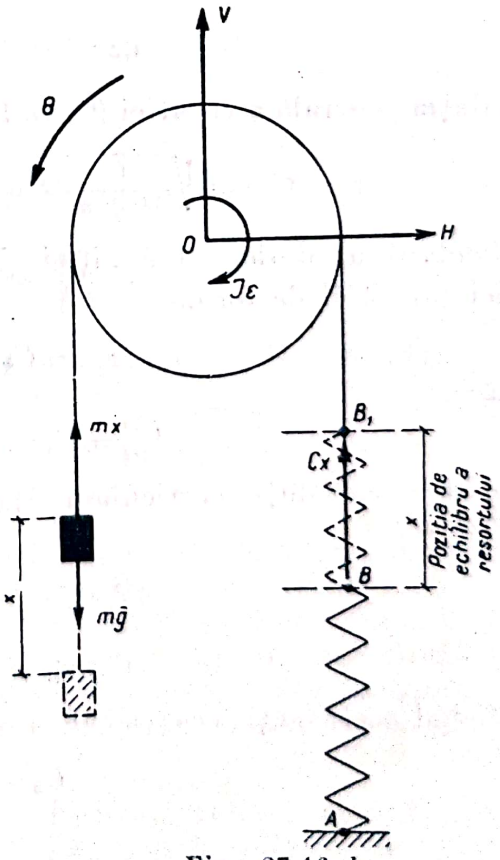


Fig. 27.16, *b*

Aplicînd teorema momentului cinetic se poate scrie:

$$\frac{dK}{dt} = \sum M_e$$

sau înlocuind pe $\frac{dK}{dt}$ și $\sum M_e$ cu valorile lor:

$$(M + m)R\ddot{x} = (mg - Cx)R,$$

simplificînd cu R:

$$(M + m)\ddot{x} = (mg - Cx),$$

sau:

$$(M + m)\ddot{x} + Cx = mg. \tag{5}$$

Întîi se integrează ecuația (5) fără partea din dreapta

$$(M + m)\ddot{x} + Cx = 0. \tag{6}$$

Ecuația caracteristică a ecuației (6) este:

$$(M + m)r^2 + C = 0$$

și are soluțiile:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{C}{M + m}}.$$

Soluția generală a ecuației (6) va fi deci:

$$x = C_1 \sin\sqrt{\frac{C}{M + m}}\, t + C_2 \cos\sqrt{\frac{C}{M + m}}\, t + x_p.$$

Membrul al doilea al ecuației (5) fiind mg, integrala particulară a ecuației (5) va fi de forma:

$$x_p = C_3 t + C_4; \tag{7}$$

rezultă:

$$\dot{x}_p = C_3; \qquad \ddot{x}_p = 0.$$

Se scrie că soluția particulară (7) verifică identic ecuația diferențială (5) și se obține:

$$c(C_3 t + C_4) \equiv mg,$$

sau

$$cC_3 t + cC_4 \equiv mg; \tag{8}$$

identificînd coeficienții ecuației (8) rezultă:

$$C_3 = 0,$$

$$C_4 = \frac{mg}{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

O soluție particulară a ecuației (5) este deci

$$x_1 = \frac{mg}{c}.$$

Soluția generală a ecuației (5) va fi:

$$x = C_1 \sin \sqrt{\frac{c}{M+m}}\, t + C_2 \cos \sqrt{\frac{c}{M+m}}\, t + \frac{mg}{c}. \tag{9}$$

Calculînd și pe $\dot{x}$:

$$\dot{x} = C_1 \sqrt{\frac{c}{M+m}} \cos \sqrt{\frac{c}{M+m}}\, t - C_2 \sqrt{\frac{c}{M+m}} \sin \sqrt{\frac{c}{M+m}}\, t,$$

în ecuațiile (9) și (10) se scrie că la:

$$t = 0, \quad x = 0 \quad \text{și} \quad V = \dot{x} = 0,$$

se obține:

$$0 = C_2 + \frac{mg}{c};$$

$$0 = C_1 \sqrt{\frac{c}{M+m}},$$

de unde rezultă:

$$C_2 = -\frac{mg}{c}; \qquad C_1 = 0.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (9) se obține:

$$x = \frac{mg}{c} - \frac{mg}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{M+m}}\, t; \tag{10}$$

ecuația (10) reprezintă o mișcare oscilatorie armonică, de perioadă:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{M+m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{c}}.$$

27.2.17. Unui cilindru omogen drept, de rază $R = 10$ cm și greutate P, care se reazemă pe un plan orizontal, i se imprimă o viteză inițială $\omega_0 = 10$ rad/s (fig. 27.2.17,*a*). Coeficientul de frecare de alunecare dintre cilindru și plan fiind $f = 0{,}1$ se cere să se afle după cît timp mișcarea cilindrului pe planul orizontal se va transforma în rostogolire pură (fără alunecare).

Forța de frecare se consideră independentă de viteză. Nu se ține seamă de rezistența aerului.

Rezolvare. Se notează cu F forța de frecare; conform enunțului, ea fiind independentă de viteză, mărimea ei va fi aceeași ca în statică; deci $F = fN = 0{,}1\ P$ (fig. 27.2.17,*b*).

Notînd cu ω viteza unghiulară pe care o va avea, în orice moment, cilindrul în timpul mişcării, atunci cînd mişcarea lui este de rostogolire (datorită forţei de frecare, această viteză va fi mai mică decît ω_0).

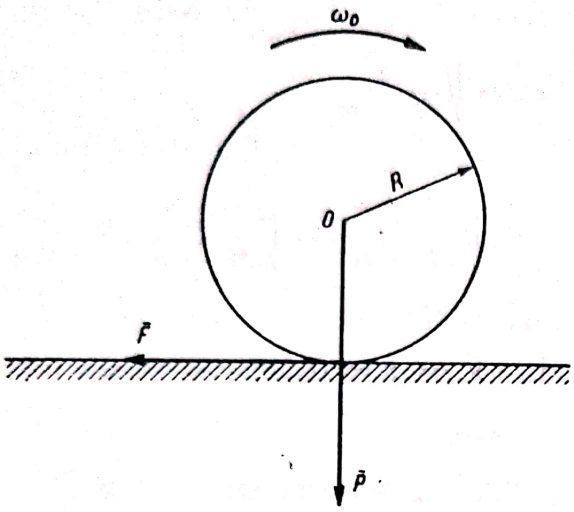


Fig. 27.2.17, *a*

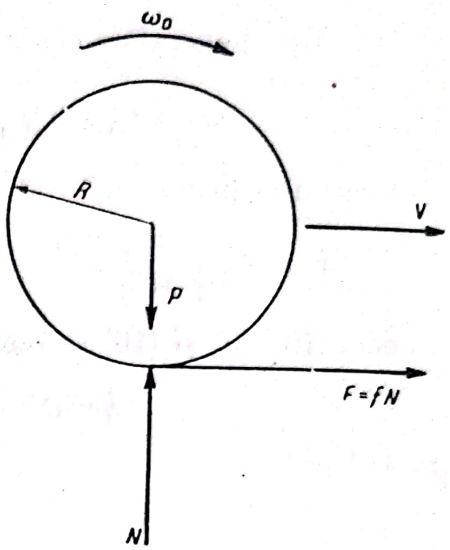


Fig. 27.2.17, *b*

Notăm cu V viteza liniară (de translaţie) pe care o va avea cilindrul în timpul mişcării, atunci cînd mişcarea este de alunecare. Se aplică teorema impulsului şi teorema momentului cinetic, proiectate pe axele orizontale menţionate în continuare

$$\frac{dK}{dt} = \sum M_e \tag{1}$$

(pe axa orizontală perpendiculară pe disc care trece prin centrul său)

$$\frac{dH}{dt} = \sum Fe, \tag{2}$$

(pe axa orizontală cuprinsă în planul discului care trece prin centrul său), dar:

$$K = J\omega = \frac{PR^2}{2g}\omega;$$

$$H = MV = \frac{P}{g}V; \tag{3}$$

$$M_e = -FR = -0{,}1\ PR.$$

În expresia momentului forţelor exterioare s-a luat semnul minus la momentul forţei de frecare, deoarece acest moment are sens contrar momentului cinetic, în timp ce în expresia rezultantei forţelor exterioare s-a luat semnul plus, deoarece forţa de frecare are acelaşi sens cu impulsul, acelaşi sens cu vectorul vitezei liniare (de translaţie) a cilindrului.

Înlocuind valorile (3) în expresiile (1) și (2) se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{PR^2}{2g}\,\omega\right) = -0{,}1PR; \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}\,V\right) = 0{,}1\ P. \tag{5}$$

Simplificînd factorii constanți, expresiile (4) și (5) devin:

$$\frac{R}{2g}\frac{d\omega}{dt} = -0{,}1; \tag{4'}$$

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{dV}{dt} = 0{,}1. \tag{5'}$$

Separînd variabilele și integrînd ecuațiile diferențiale (4') și (5') se obține:

$$\omega = -\frac{0{,}2}{R}gt + C_1;$$

$$V = 0{,}1\ gt + C_2.$$

Pentru determinarea constantelor C_1 și C_2 se scrie că la $t = 0$; $\omega = \omega_0$ și $V = 0$. Rezultă $C_1 = \omega_0$ și $C_2 = 0$.

Integralele generale ale ecuațiilor (4') și (5') sînt deci

$$\omega = \omega_0 - \frac{0{,}2}{R}gt;$$

$$V = 0{,}1\ gt.$$

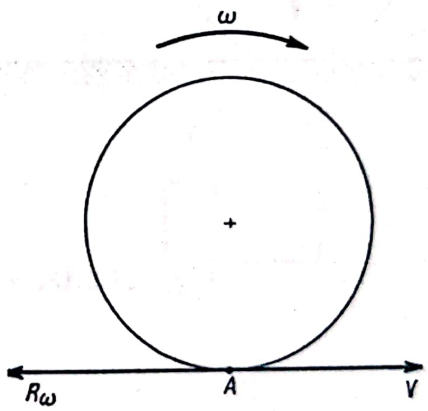


Fig. 27.2.17, *c*

Cilindrul se va rostogoli fără să alunece, începînd din momentul în care viteza punctului de contact cu pămîntul va fi nulă; din acest moment punctul va deveni centru instantaneu de rotație (fig. 27.2.17, *c*).

Viteza punctului de contact, datorită mișcării de rotație a cilindrului (rostogolire), este:

$$V'_A = R\omega = R\left(\omega_0 - \frac{0{,}2}{R}gt\right) = R\omega_0 - 0{,}2\,gt.$$

Viteza punctului de contact, datorită mișcării de translație (alunecare) a cilindrului, este:

$$V'' = 0{,}1\ gt.$$

Scriind că $V'_A = V''_A$,

se obține:

$$R\omega_0 - 0{,}2\ gt = 0{,}1\ gt,$$

de unde rezultă:

$$t = \frac{R\omega_0}{0{,}3\ g}.$$

În cazul numeric, $R = 10$ cm $= 0{,}1$ m,

$$\omega_0 = 10 \text{ rot/s} = 20\ \pi \text{ rad/s}.$$

În cazul numeric:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2,$$

rezultă:

$$t = 2{,}14 \text{ s}.$$

27.2.18. Un cilindru circular omogen, plin, de greutate G, este înfășurat cu un fir și așezat pe un plan aspru orizontal. Extremitatea liberă a firului este întinsă orizontal, cum se vede în figura 27.2.18, *a*, trecut peste un scripete fix (fără masă și frecare) și poartă o sarcină de greutate P.

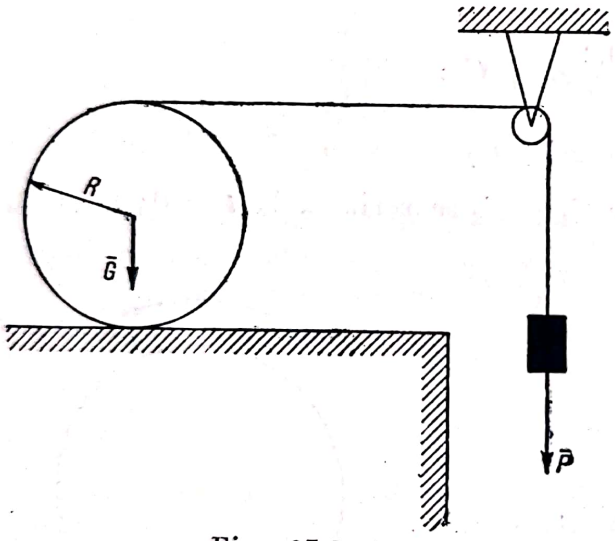


Fig. 27.2.18, *a*

Presupunînd că cilindrul se rostogolește fără să alunece, să se afle accelerația a_1 a centrului de greutate al cilindrului, accelerația a_2 a sarcinii și tensiunea T a firului. Se neglijează frecarea de rostogolire și rezistența aerului.

Rezolvare. Se izolează corpurile (fig. 27.2.18, *b*).

Din studiul cinematic al mișcării, folosind notațiile din figură, rezultă:

$$h = h_1,$$

$$V = V_1,$$

$$a = a_1.$$

Cilindrul are o mișcare plan-paralelă în jurul axei instantanee A. Rezultă, deci:

$$V = 2\ R\omega.$$

$$\omega = \frac{V}{2R},$$

$$\varepsilon = \frac{a}{2R},$$

$$V_0 = R\ \omega = \frac{V}{2}.$$

Se aplică teorema momentului cinetic, separat, pentru fiecare corp izolat al sistemului. Se notează cu r raza scripetelui.

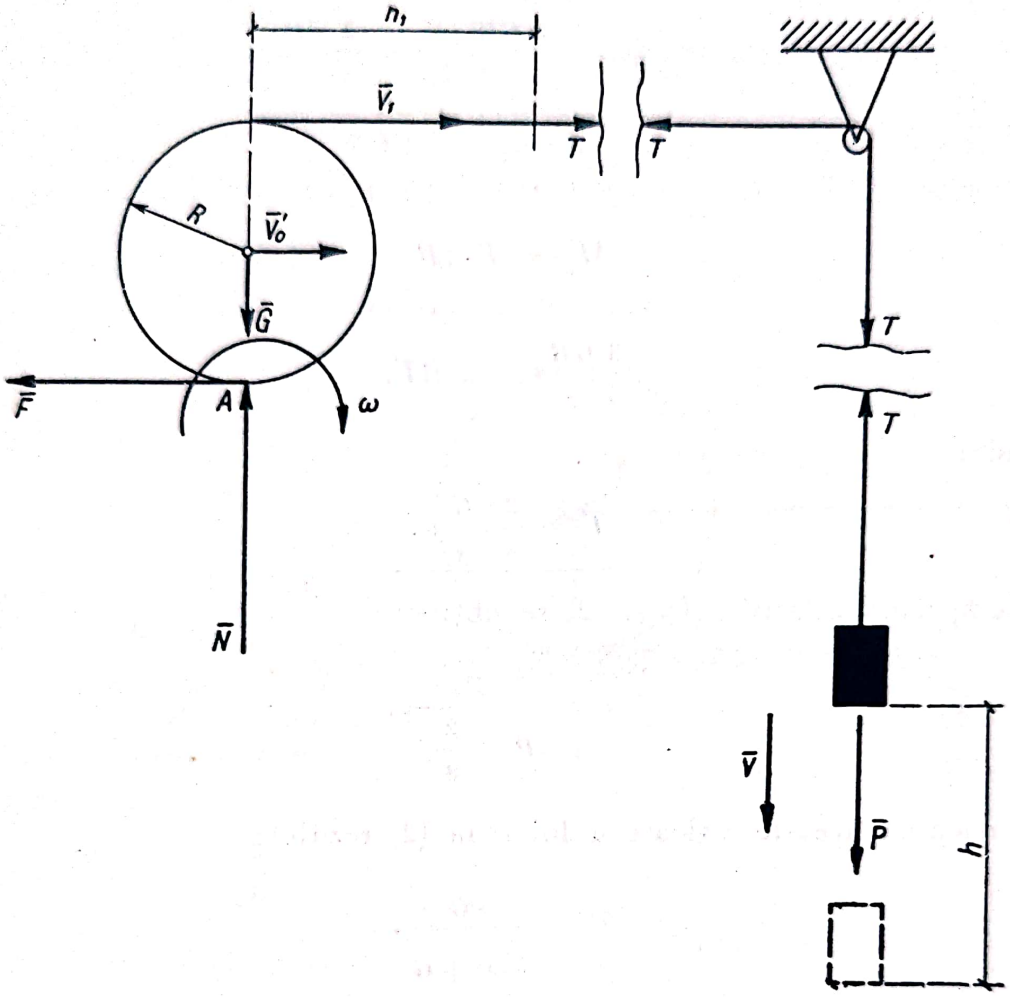


Fig. 27.2.18, *b*

Pentru corpul P se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa scripetelui. Se obține:

$$K_z = \frac{P}{g} Vr;$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{P}{g} \dot{V}r = \frac{P}{g} ar;$$

$$M_z = Pr - Tr.$$

Deci:

$$\frac{P}{g} ar = Pr - Tr, \text{ de unde:}$$

$$T = P - \frac{P}{g} a. \qquad (1)$$

Pentru cilindru se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotație. Se obține:

$$K_A = J_A\omega = \frac{3}{2}\frac{GR^2}{2g}\frac{V}{2R} = \frac{3}{4}\frac{GR}{g}V;$$

$$\frac{dK_A}{dt} = \frac{3}{4}\frac{GR}{g}\dot{V} = \frac{3}{4}\frac{GR}{g}a;$$

$$M_A = T \cdot 2R,$$

deci:

$$\frac{3}{4}\frac{GR}{g}a = 2RT,$$

de unde:

$$T = \frac{3}{8}\cdot\frac{G}{g}a. \qquad (2)$$

Comparînd relațiile (1) și (2) se obține:

$$a = \frac{P}{P + \frac{3}{8}G}g.$$

Înlocuind această valoare a lui a în (2) rezultă:

$$T = \frac{PG}{\frac{8}{3}P + G}.$$

27.2.19. Un fir trecut peste un scripete O fără frecare și de masă neglijabilă este legat la un capăt de o greutate P, care se poate deplasa liber pe verticală, iar la celălalt capăt, este legat de axul O_1 al unui cilindru omogen de greutate G și rază R, care se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal (fig. 27.2.19, *a*). Coeficientul de frecare la rostogolire s fiind cunoscut să se afle accelerația cu care se va mișca greutatea P. În momentul inițial, sistemul se află în repaus.

Rezolvare. Se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa care trece prin O. Raza scripetelui se notează cu r (fig. 27.2.19, *b*):

$$K_0 = \frac{P}{g}Vr + \frac{G}{g}Vr + J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R};$$

$$\frac{dK_0}{dt} = \frac{Pr}{g}\dot{V} + \frac{Gr}{g}\dot{V} + J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R}. \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul forţelor exterioare în raport cu axa O este:

$$M_0 = Pr + T(R - r) + N(x - s) - Gx. \tag{2}$$

Ţinînd seamă de valoarea lui $N = G$, expresia (2) devine:

$$M_0 = Pr + T(R - r) - Gs. \tag{3}$$

Pentru a afla pe T se aplică teorema momentului cinetic în raport cu axa O_1.

Se obţine:

$$J_{0_1}\,\dot{\omega}_1 = TR - Ns.$$

Dar:

$$\omega_1 = \frac{V}{R} \text{ şi } N = G,$$

rezultă:

$$T = J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R} + \frac{Gs}{R}. \tag{4}$$

Înlocuind valoarea lui T din (4) în (3) şi aplicînd teorema momentului cinetic faţă de axa O_1:

$$\frac{Pr}{g}\dot{V} + \frac{Gr}{g}\dot{V} + J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R} = Pr + J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R} + Gs - J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R^2}r - \frac{Gs}{R}r - Gs.$$

Efectuînd reducerile şi simplificările rămîne:

$$\frac{P}{g}\dot{V} + \frac{G}{g}\dot{V} = P - J_{0_1}\frac{\dot{V}}{R^2} - \frac{Gs}{R}.$$

Înlocuind pe $J_{0_1} = \frac{GR^2}{2g}$ şi rezolvînd

$$\dot{V} = a = \frac{P - \frac{Gs}{R}}{P + \frac{3}{2}G}\,g.$$

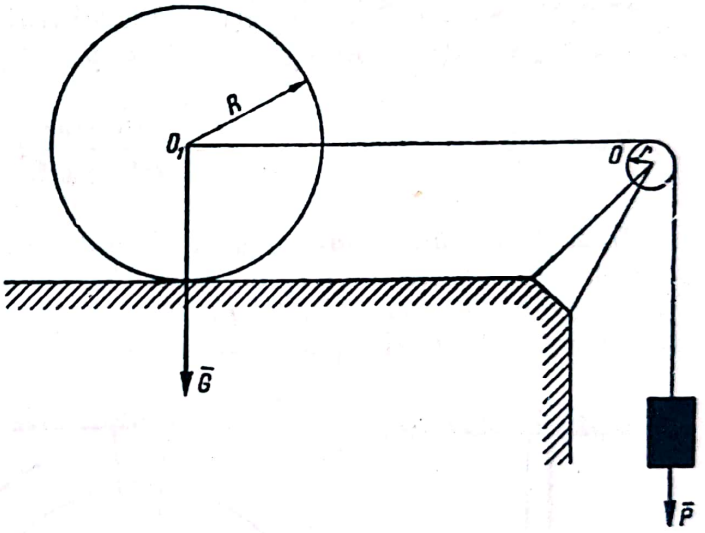


Fig. 27.2.19, *a*

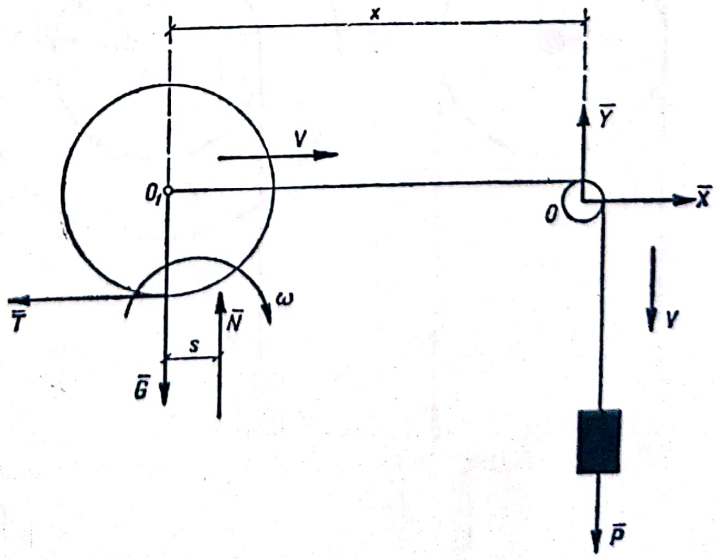


Fig. 27.2.19, *b*

C. PROBLEME NEREZOLVATE

27.2.20. Peste un scripete fix trece un fir, la extremităţile căruia sînt suspendate greutăţile Q şi P, $P>Q$. Să se afle acceleraţia a a greutăţilor, tensiunea T a firului şi reacţiunea N a axei O a scripetelui, neglijînd masa scripetelui.

Răspuns: $$a = g\frac{P-Q}{P+Q},\ T = \frac{2PQ}{P+Q},$$

$$N = \frac{4PQ}{P+Q}.$$

27.2.21. Să se afle acceleraţia ε a unui troliu, a cărui masă poate fi neglijată, dacă greutăţile sînt egale cu P şi p.

Răspuns: $$\varepsilon = \frac{PR-pr}{PR^2+pr^2}g.$$

27.2.22. Pe un arbore orizontal sînt aşezate două şaibe solidar legate între ele, cu razele r şi r_1 pe care sînt înfăşurate cabluri care poartă la capete sarcini de greutăţi p şi p_1. Să se afle acceleraţia unghiulară ε a arborelui, tensiunile T şi T_1 ale cablurilor, precum şi reacţiunea totală a lagă-

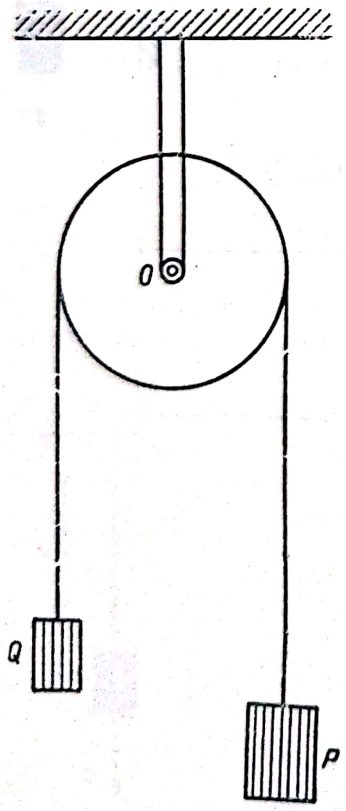


Fig. 27.2.20

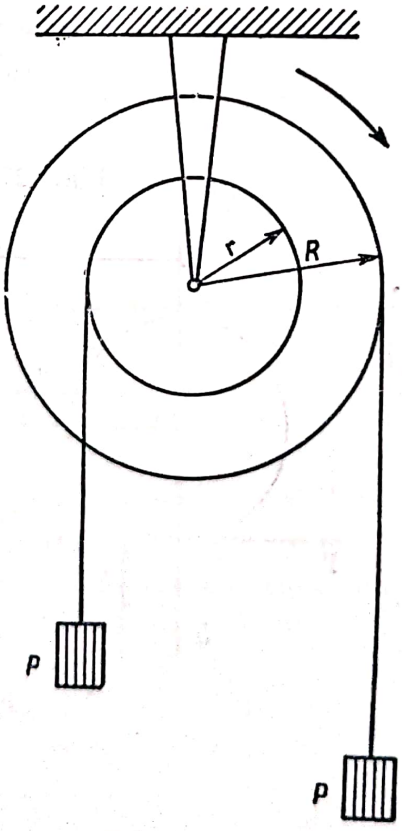


Fig. 27.2.21

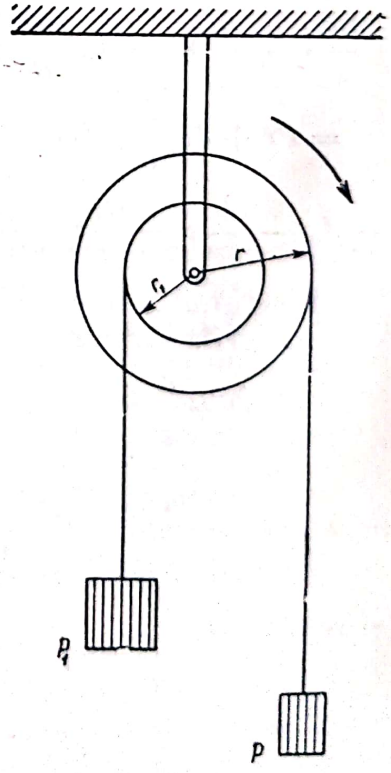


Fig. 27.2.22

relor, în care se rotește arborele, dacă nu există frecare și dacă greutatea arborelui cu șaibe este P, iar momentul lor de inerție total J.

Răspuns: $$\varepsilon = \frac{(p_1 r_1 - pr)g}{Jg + pr^2 + p_1 r_1^2}; \quad T = p\left(1 + \frac{r\varepsilon}{g}\right).$$

$$T_1 = p_1\left(1 - \frac{r_1\varepsilon}{g}\right);$$

$$N = P + p + p_1 - \frac{(pr - p_1 r_1)^2}{Jg + pr^2 + p_1 r_1^2}.$$

27.3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Energia este măsura, la un anumit moment dat, a mișcării generale sub toate formele și în toate transformările.

Expresia energiei cinetice a unui punct material m și având viteza $\bar{v}$ este

$$E = \frac{1}{2} mv^2.$$

Expresia energiei cinetice a unui corp solid, rigid, sau a unui sistem de puncte materiale (nedeformabil) având o mișcare de rotație este:

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_c^2,$$

unde M este masa întregului corp, v_c fiind viteza centrului de greutate.

Expresia energiei cinetice a unui corp solid, rigid, sau a unui sistem de puncte materiale (indeformabil) având o mișcare de rotație μ în jurul unei axe Δ este

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2,$$

unde:

J_Δ este momentul de inerție în raport cu axa;
ω — viteza unghiulară în raport cu axa.

Expresia energiei cinetice a unui corp care are o mișcare compusă (translație și rotație în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate) este:

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = M \frac{v_c^2}{2} + J_\Delta \omega_c^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde:

M este masa corpului;
v_c — viteza centrului de greutate;
J_Δ — momentul de inerţie al corpului în raport cu axa de rotaţie care trece prin centrul de greutate;
ω_c — viteza unghiulară de rotaţie în jurul axei care trece prin centrul de greutate.

În cazul unui sistem de puncte materiale, expresia energiei cinetice este:

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{M V^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i'^2}{2},$$

unde V este viteza centrului de mase;
v_i' — vitezele punctelor de masă m_i în mişcarea lor relativă faţă de centrul de mase.

Teorema energiei cinetice se poate scrie sub forma:

$$d \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) + \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dx),$$

adică: diferenţiala energiei cinetice a unui sistem este egală cu suma lucrului mecanic al forţelor exterioare şi interioare.

Pentru un corp solid rigid teorema energiei devine:

$$d \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz).$$

Întregind ultima ecuaţie între două poziţii A şi B ale sistemului, se obţine pentru un corp perfect rigid:

$$\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_B - \left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_A = \int_A^B \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz),$$

adică, creşterea energiei cinetice a unui corp rigid, ca urmare a deplasării din poziţia A în poziţia B, este egală cu suma lucrului mecanic, efectuat de forţele exterioare cu ocazia acestei deplasări.

B. PROBLEME REZOLVATE

27.3.1. Un vagon ca în figură se deplasează pe orizontală cu viteza v. Cunoscînd masa caroseriei M_1, masa unei roţi M_2, masa unei osii M_3, R raza roţii şi r a unei osii se cere energia cinetică a lui (fig. 27.3.1, *a*).

Rezolvare. Energia cinetică totală a sistemului se compune din energia caroseriei, a roţilor şi a osiilor.

La calculul energiilor cinetice trebuie să se țină seamă de felul mișcării fiecărei părți.

Caroseria are o mișcare de translație. Roțile și osiile au mișcări plan paralele.

Energia cinetică a caroseriei:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 v^2.$$

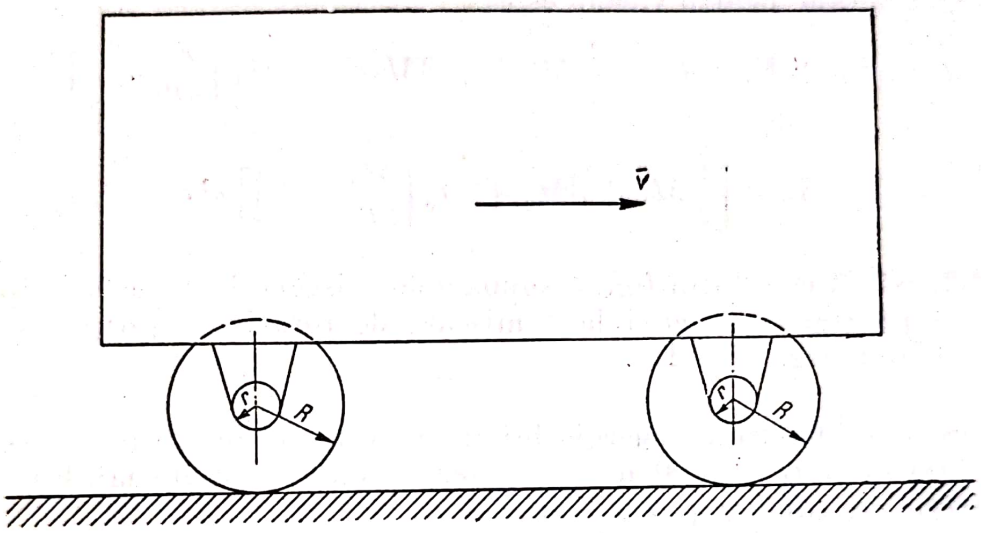


Fig. 27.3.1,*a*

Energia cinetică a celor patru roți:

$$E_2 = 4.\left[\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2\right] = 4.\frac{3\times M_2}{4}.v^2 = 3M_2v^2.$$

Această valoare se poate determina considerînd mișcarea plană ca o mișcare instantanee de rotație în jurul centrului instantaneu de rotație I (fig. 27.3.1, *b*):

$$E_2 = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2,$$

unde

$$J_I = \frac{M_2R^2}{2} + R^2M_2 = \frac{3M_2R^2}{2}$$

și

$$\Omega = \frac{v}{R}.$$

Energia totală pentru cele patru roți este:

$$4 \times \frac{1}{2} J_I \Omega^2 = 3M_2v^2.$$

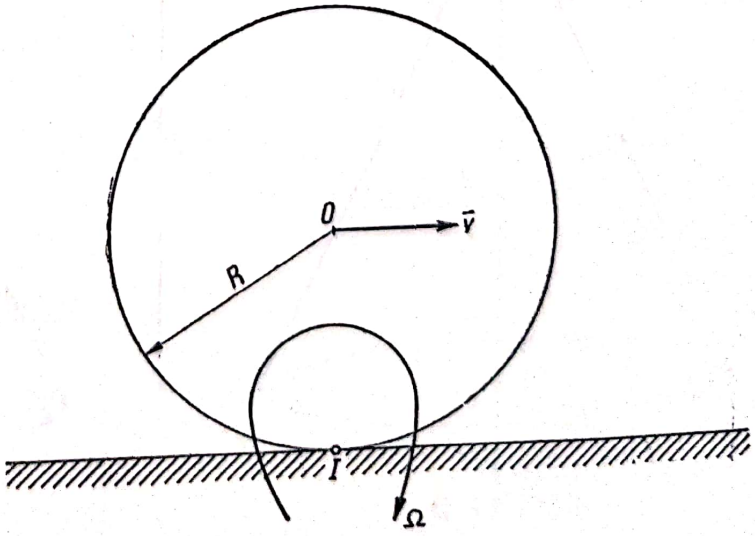


Fig. 27.3.1, *b*

Pentru cele două osii:

$$E_3 = 2 \times \left[\frac{1}{2} M_3 v^2 + \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \omega^2\right] = \left[\frac{1}{2} M_3 v^2 + \frac{1}{4} M_3 \frac{r^2}{R^2} v^2\right] \times 2;$$

sau:

$$E_3 = M_3 v^2 \left[1 + \frac{r^2}{2R^2}\right].$$

Energia totală pentru vagon este:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{2} M_1 v^2 + 3M_2 v^2 + M_3 \left(\frac{r^2}{2R^2} + 1\right) v^2$$

sau

$$E = \left[\frac{1}{2} M_1 + 3M_2 + M_3 \left(\frac{r^2}{2R^2} + 1\right)\right] v^2.$$

27.3.2. Să dă conul din figură supus unei mișcări de translație în lungul axei lui, după legea $v = gt$ și la o mișcare de rotație în jurul axei lui cu $n = 60$ rot/min (fig. 27.3.2,*a*).

Se cere să se determine energia lui cinetică după timpul $t = 10$ s, știind că $R = 2{,}00$ m și $H = 5{,}00$ m, greutatea specifică a materialului din care este confecționat fiind $\gamma = 7{,}8$ t/m³.

Rezolvare:

$$E = \frac{1}{2} J_p \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2.$$

Calculul lui J_p (fig. 27.3.2,*b*).

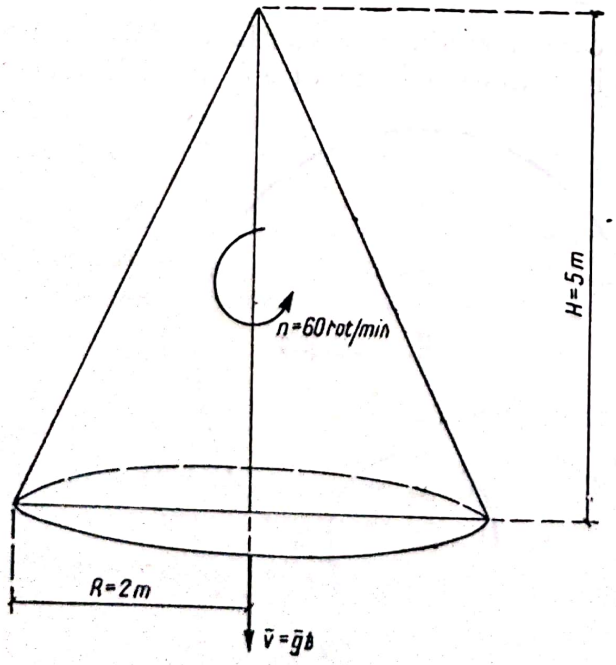


Fig. 27.3.2,*a*

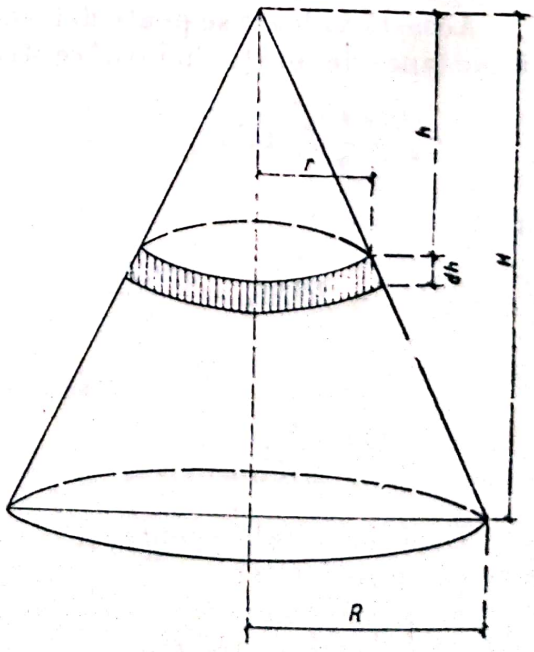


Fig. 27.3.2,*b*

Momentul de inerție al unui cilindru elementar de înălțime dh și rază r (fig. 27.3.2, *a*) este:

$$dJ_p = \frac{\gamma \cdot \pi r^2}{2g} \cdot r^2 \cdot dt.$$

Dar r este egal cu:

$$r = R\,\frac{h}{H}.$$

Deci:

$$dJ_p\,\frac{\gamma\pi h^4}{2gH^4}R^4dh,$$

de unde:

$$J_p = \int_0^H \frac{\gamma\pi R^4}{2gh^4} \cdot dh$$

care integrată devine:

$$J_p = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{\gamma}{g} R^4H = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{7{,}80}{9{,}81} \times 2{,}00^4 \times 5{,}00 = 20{,}1 \text{ t} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

Masa conului este:

$$M = \frac{\pi R^2 H}{3}\frac{\gamma}{g} = \frac{\pi \times 2^2 \times 5}{3} \times \frac{7{,}80}{9{,}81} = 16{,}6 \text{ t} \cdot \text{s}^2/\text{m};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi\,60}{30} = 2\pi \text{ rad/s}.$$

Energia cinetică totală este:

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}16{,}6 \times 9{,}81^2 \times 10^2 + \frac{1}{2}20{,}10\ 4\pi^2.$$

Rezultă:

$$E = 80 \times 800 \text{ tm}.$$

27.3.3. Un volant de fontă are raza exterioară $R = 26$ dm și raza interioară $r = 24$ dm (fig. 27.3.3).

Cunoscînd greutatea specifică a fontei $\gamma = 7{,}200$ kg/m³ și faptul că volantul are o turație $n = 100$ rot/min să se determine energia cinetică, impulsul și momentul cinetic al discului, neglijînd masa scripeților.

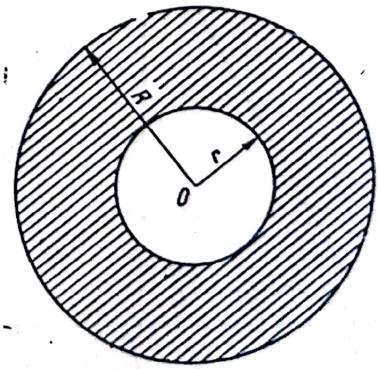


Fig. 27.3.3

Rezolvare:

$$E = \sum \frac{m v^2}{2},$$

în cazul mișcării în jurul unui centru de rotație $v = \rho\omega$

$$E = \sum \frac{m\rho^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m\rho^2 = \frac{\omega^2}{2}\int \rho^2 dm = \frac{\omega^2}{2}J_p;$$

observînd că:

$$dm = \frac{\gamma}{g}\rho^3 d\varphi d\rho,$$

$$J_p = \int_V \rho^2 dm = \int_r^R \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{g}\rho^3 d\varphi\, d\rho = \frac{2\pi\gamma}{g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{4} = \frac{\pi\gamma}{g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{2}.$$

În cazul nostru,

$$J_p = \frac{\pi\gamma}{g}\cdot\frac{R^4 - r^4}{2} = \frac{3{,}14 \times 7{,}200}{9{,}81} \times \frac{2{,}60^4 - 2{,}40^4}{2} = 1\,500\,500 \text{ kgfm} \cdot \text{s}^2$$

și

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \times 100}{30} = 10{,}40 \text{ rad/s}.$$

Deci:

$$E = \frac{\omega^2}{2} J_p = \frac{10 \times 40^2}{2} \times 1\,500\,000 = 81\,000\,000 \text{ kg}f.\text{m}.$$

Impulsul este:

$\bar{H} = M\bar{v}_G$; deoarece centrul de greutate se află chiar pe axa de rotație:

$$v_G = 0,$$

deci

$$\bar{H} = 0.$$

Momentul cinetic este:

$$\bar{K} = J_p\bar{\omega} = 1\,500\,000 \times 10{,}40 = 15\,600\,000 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}.$$

27.3.4. Se consideră un triunghi echilateral format din bare omogene de lungime l și greutate P (fig. 27.3.4). Se cere energia cinetică a sistemului cînd se rotește în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate G, și este perpendiculară pe planul triunghiului, cu viteza unghiulară ω. Să se determine, de asemenea, impulsul și momentul cinetic.

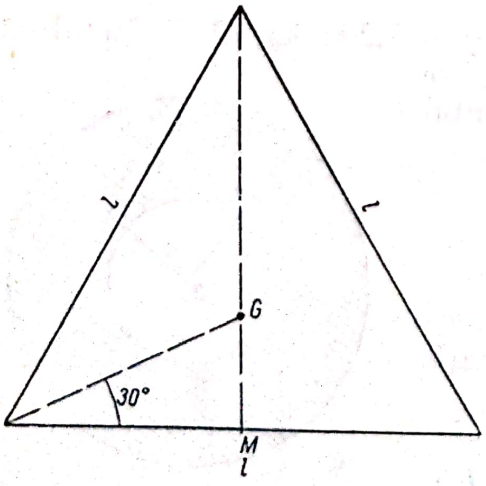


Fig. 27.3.4

Rezolvare. Deoarece sistemul are o mișcare de rotație în jurul centrului de greutate G, expresia energiei cinetice este:

$$E = \frac{1}{2} J_G\, \omega^2,$$

unde

J_G este momentul de inerție al sistemului de bare în raport cu centrul de greutate al triunghiului.

Momentul de inerție al unei bare în raport cu punctul G este:

$$J_G = J_0 + \overline{PG}^2 \cdot M,$$

unde J_0 este momentul de inerție al barei în raport cu centrul ei de greutate și M — masa barei.

Rezultă:

$$J_0 = \frac{pl^3}{12g} \text{ și } M = \frac{pl}{g},$$

cum și

$$\overline{MG} = \frac{l}{2} \operatorname{tg} 30° = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Rezultă:

$$J_G = \left[\frac{pl^3}{12g} + \frac{pl}{g}\left(\frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2\right] = 2\,\frac{pl^3}{12g} = \frac{pl^3}{6g}.$$

Pentru întreg sistemul se obține:

$$J_{G\,tot} = 3J_G = \frac{pl^3}{2g}.$$

Energia cinetică este deci

$$E = \frac{1}{2} J_G \cdot \omega^2 = \frac{1}{4}\frac{pl^3}{g}\omega^2.$$

Impulsul are expresia $\overline{H} = M \cdot V_G$. Se observă că, în cazul dat, $V_G = 0$, deoarece triunghiul se rotește în jurul centrului de greutate.

Rezultă:

$$\overline{H} = 0.$$

Momentul cinetic este dat de relația:

$$\overline{K} = J_G\,\overline{\omega}.$$

Deci:

$$\overline{K} = \frac{pl^3}{2g}\overline{\omega}.$$

și este un vector perpendicular pe planul triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

27.3.5. Un corp de greutate Q este așezat pe un plan orizontal, de el fiind fixat un fir care trece printr-un scripete de masă neglijabilă, iar la capătul firului atîrnă o greutate P (fig. 27.3.5). Știind că coeficientul de

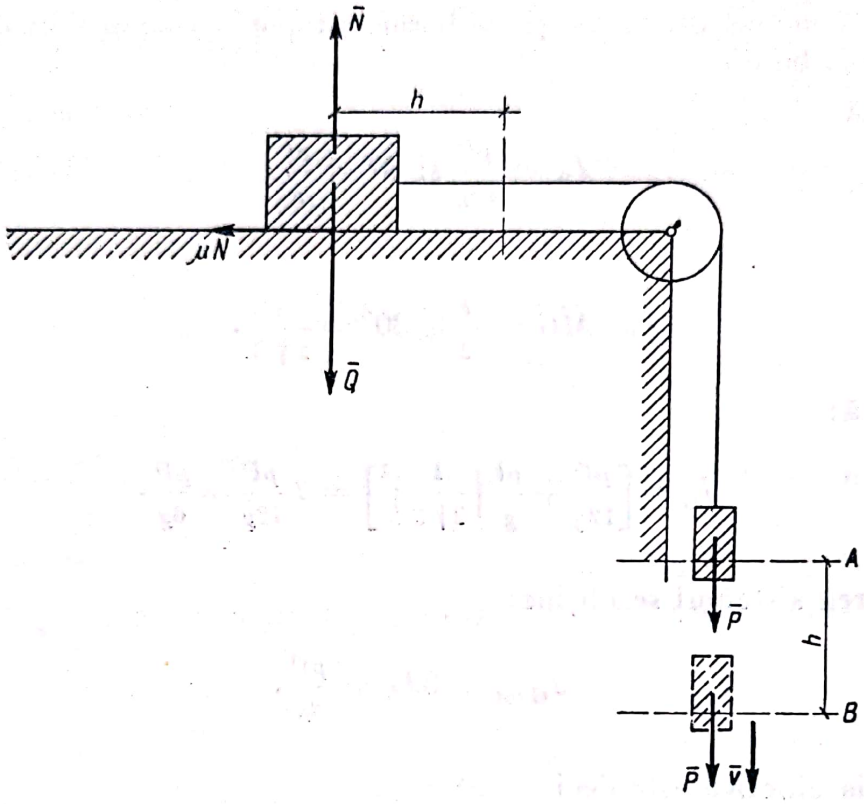


Fig. 27.3.5

frecare dintre corp și plan este μ, să se determine accelerația cu care se va mișca corpul.

Rezolvare. Se consideră că sistemul pornește din repaus. Dacă greutatea P s-a deplasat pe o distanță h, ea capătă o viteză v. Aplicînd teorema energiei cinetice:

$$dE = d\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = dL_{ei}$$

$$\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$$

$$L_{AB} = Ph - \mu \cdot Qh.$$

Rezultă:

$$\frac{1}{2g}PV^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\cdot V^2 = Ph - \mu\, Qh,$$

sau

$$\frac{V^2}{2g}(P+Q) = h\,(P-\mu Q);$$

derivînd se obține:

$$\frac{2V\cdot a}{2g}(P+Q) = v(P-\mu Q),$$

de unde:

$$a = \frac{R\mu\, Q}{P+Q}\cdot g.$$

27.3.6. Se dă sistemul de corpuri din figură, format din două corpuri P și Q, așezate pe două plane aspre, înclinate cu α și β față de orizontală (fig. 27.3.6.) Coeficientul de frecare este μ, cunoscut. Să se determine mișcarea sistemului.

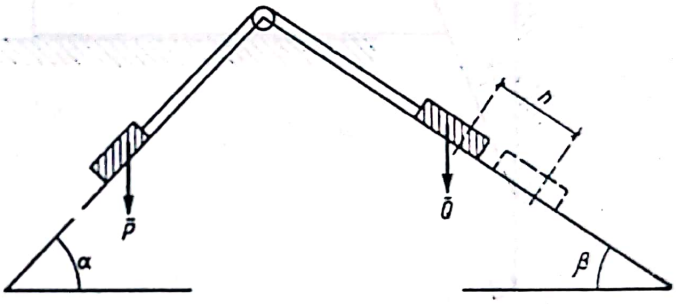


Fig. 27.3.6

Rezolvare. Sistemul pornește din repaus. După o deplasare h, greutatea Q va avea o viteză V.

Rezultă:

$$E_B - E_A = L_{A-B}$$
$$E_A = 0$$

$$E_B = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2$$

$$L_{AB} = Q\sin\beta h - \mu\, Q\cos\beta h - P\sin\alpha h - \mu\, P\cos\alpha h.$$

Rezultă:

$$\frac{V^2}{2g}(Q+P) = h\,[Q\sin\beta - \mu\, Q\cos\beta - P\sin\alpha - \mu\, P\cos\alpha]$$

$$\frac{2V_a}{2g}(Q+P) = V\,[Q\sin\beta - \mu\, Q\cos\beta - P\sin\alpha - \mu\, P\cos\alpha],$$

de unde rezultă accelerația:

$$a = g\,\frac{Q\sin\beta - \mu\, Q\cos\beta - P\sin\alpha - \mu\, P\cos\alpha}{Q+P}.$$

27.3.7. O pană A cu unghiul α, de greutate P, se sprijină cu o parte pe un perete vertical neted, iar în partea cealaltă — pe o prismă B, de greu-

tate Q care alunecă fără frecare pe un plan orizontal (fig. 27.3.7). Să se determine acceleraţia A a penei şi A_1 a prismei.

Rezolvare:

$$d\sum\frac{mv^2}{2}=X_e dx+Y_e dy+Z_e dz;$$

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}v^2+\frac{Q}{g}v_1^2\right).$$

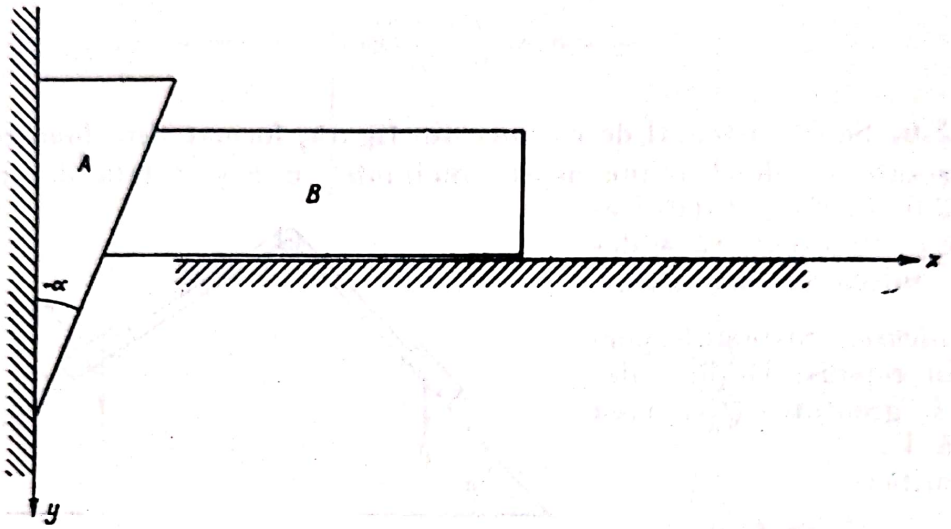


Fig. 27.3.7

Legătura între vitezele v şi v_1 rezultă din faptul că pentru o deplasare pe verticală dy a penei există o deplasare $dx = dy\,\mathrm{tg}\,\alpha$ a prismei B. Deci:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}\mathrm{tg}\alpha$$

sau

$$v_1=v\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Deci:

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}v^2+\frac{Q}{g}v^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$$

iar

$$X_e dx=0;$$

$$Y_e dy=P dy;$$

$$Z_e dz=0.$$

Înlocuind în relaţia $d\sum \frac{mv^2}{2} = X_e dx + Y_e dy + Z_e dz$ cu valorile calculate anterior se obţine:

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{P}{g} v^2 + \frac{Q}{g} v^2 \operatorname{tg}^2\alpha\right) = P dy,$$

sau

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g} v^2 + \frac{Q}{g} v^2 \operatorname{tg}^2\alpha\right) = P \frac{dy}{dt}.$$

Efectuînd derivarea se obţine:

$$\frac{P}{g} v\, a + \frac{Q}{g} v\, a \operatorname{tg}^2\alpha = Pv,$$

de unde:

$$a = \frac{Pg}{P + Q \operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad a_1 = a \operatorname{tg}\alpha.$$

Rezultă:

$$a_1 = \frac{Pg \operatorname{tg}\alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

27.3.8. De firul înfăşurat pe o şaibă de rază r este atîrnată o greutate P. Ştiind că şaiba are momentul de inerţie J_p şi că mecanismul porneşte din starea de repaus, se cere să se determine viteza greutăţii P în funcţie de h(fig. 27.3.8).

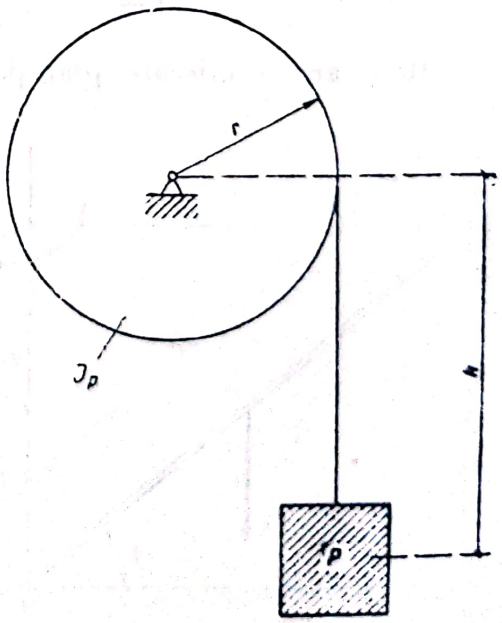


Fig. 27.3.8

Rezolvare. Utilizînd relaţia:

$$d\sum \frac{mv^2}{2} = dI_e,$$

în cazul nostru:

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J_p + \frac{P}{2g} v^2,$$

dar $$v = r\omega.$$

Deci:

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2r^2} J_p + \frac{Pv^2}{2g};$$

$$dI_e = Pdh.$$

Deci:

$$d\left(\frac{v^2}{2r^2}J_p + \frac{Pv^2}{2g}\right) = Pdh.$$

Integrînd, se obține:

$$\frac{v^2}{2r^2}J_p + \frac{Pv^2}{2g} = Ph + C.$$

Pentru $h = 0$ se ia $v = 0$.

Rezultă:

$$C = 0$$

și

$$v = \sqrt{\frac{Ph}{\frac{J_p}{2r^2} + \frac{P}{2g}}}.$$

27.3.9. O bară de lungimea $2a$ alunecă de-a lungul a doi pereți fără frecare (fig. 27.3.9). Se cere să se determine expresia vitezei unghiulare, instantanee, de rotație a barei, cunoscînd că în poziția inițială bara este înclinată cu unghiul φ_0 față de orizontală și că $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Rezolvare. Se folosește relația:

$$d\left(\sum m_i \frac{v_i^2}{2}\right) = X_e dx + Y_e dy + Z_e dz.$$

Bara are o mișcare plan-paralelă, energia cinetică a barei fiind dată de relația:

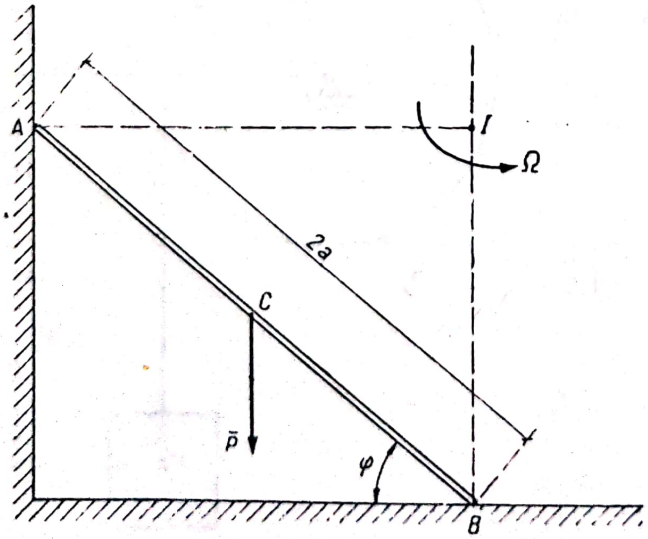


Fig. 27.3.9

$$E = \frac{1}{2}J_c\,\omega^2 + \frac{1}{2}MV_c^2,$$

unde

ω este viteza unghiulară a mișcării de rotație în jurul centrului de greutate;

V_c — viteza centrului de greutate.

Bara se rotește în jurul centrului instantaneu de rotație cu Ω. Se observă că $\Omega = \omega$ și

$$V_c = a\omega.$$

Momentul de inerție al barei în raport cu centrul de greutate este:

$$J_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{g} a^2 .$$

Expresia energiei cinetice devine:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{g} a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} a^2 \omega^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{g} a^2 \omega^2 .$$

Coordonatele centrului de greutate sînt:

$$x_c = a \cos\varphi,$$

$$y_c = a \sin\varphi,$$

de unde:

$$dx_c = - a \sin \varphi \cdot d\varphi,$$

$$dy_c = \quad a \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Rezultă expresia lucrului mecanic elementar:

$$dL = Pa \cos \varphi d\varphi = d\,(Pa \sin \varphi)$$

și se obține relația:

$$d\left(\frac{2a^2 P}{3g} \omega^2\right) = a\,(Pa \sin \varphi) .$$

Prin integrare se obține:

$$\frac{2a^2 P}{3g} \omega^2 = Pa \sin \varphi + C_1$$

Condițiile particulare de integrare sînt:

$$t = 0; \quad \omega = 0; \quad \varphi = \varphi_0 .$$

Rezultă:

$$C_1 = - P \cdot a \sin \varphi_0$$

și deci:

$$\frac{2a^2 P}{3g} \omega^2 = Pa \sin \varphi - Pa \sin \varphi_0 ,$$

de unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)} .$$

27.3.10. O roată de rază r se rotește cu viteza unghiulară ω_0 în jurul axei O. Un sabot de frînă este apăsat cu o forță N în direcția radială asupra periferiei discului (fig. 27.3.10). Roata se oprește după t secunde de la aplicarea sabotului. Cunoscînd momentul de inerție al roții, în raport cu axa de rotație, egal cu J, să se determine coeficientul de frecare f între roată și sabot.

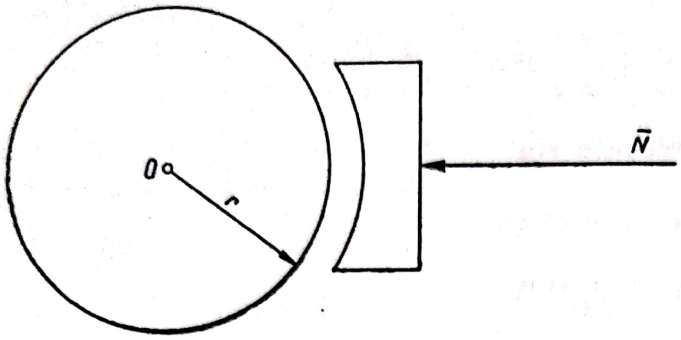


Fig. 27.3.10

Rezolvare. Se aplică relația:

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = X_e dx + Y_e dy + Z_e dz.$$

În cazul nostru:

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right);$$

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz = -fNrd\varphi$$

(lucrul mecanic elementar produs de forța de frecare).

Rezultă, deci:

$$d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = -fNrd\varphi.$$

Împărțind cu dt se obține:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = -fNr\frac{d\varphi}{dt}$$

sau efectuînd derivarea:

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} = -fNr\omega,$$

rezultă

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = -\frac{fNr}{J}.$$

Expresia care dă viteza unghiulară a discului se poate scrie cunoscînd accelerația unghiulară ε, și anume:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

în cazul nostru:

$$\omega = \omega_0 - \frac{fNr}{J}t,$$

$$\omega = 0, \text{ pentru } \omega_0 = \frac{fNr}{J}t.$$

Rezultă coeficientul de frecare:

$$f = \frac{J\omega_0}{Nrt}.$$

27.3.11. Un disc de rază r se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal. Viteza inițială a centrului său fiind v_0 se cere distanța s pe care o va parcurge el pînă la oprire, cunoscînd coeficientul de frecare la rostogolire δ.

Rezolvare. Se utilizează forma $d\sum \frac{mv^2}{2} = X_e dx + Y_e dy + Z_e dz.$

În cazul problemei este o rotație în jurul centrului instantaneu care este punctul de tangență al discului cu planul pe care se deplasează.

Momentul de inerție al discului:

$$J_0 = \frac{mr^2}{2} (m \text{ — masa discului}).$$

Momentul de inerție față de centrul instantaneu:

$$J = J_0 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

Lucrul mecanic este dat de momentul de frecare și are ca valoare expresia $-mg\delta\, d\varphi$. Deci:

$$d\left(\frac{3}{4} mv^2\right) = -\omega\, g\delta d\varphi$$

sau integrînd:

$$\frac{3mv^2}{4} = -mg\delta\, \varphi + C.$$

Constanta se determină știind că pentru $\varphi = 0$ a fost $v = v_0$; rezultă:

$$C = \frac{3mv_0^2}{4}.$$

Expresia vitezei discului este deci:

$$v^2 = -\frac{4}{3} g\delta\varphi + v^2;$$

pentru

$$v = 0,$$

$$\varphi = \frac{3v_0^2}{4g\delta},$$

sau cunoscînd că $s = r\varphi$, rezultă:

$$s = \frac{3v_0^2 r}{4g\delta}.$$

27.3.12. Un cilindru de rază r se rostogolește fără alunecare pe un plan orizontal. Cunoscînd că centrul de greutate al cilindrului se află în punctul C la distanța a de axa lui (fig. 27.3.12), raza de inerție a cilindrului față de o axă perpendiculară pe planul discului trecînd prin C este egală cu v, să se determine viteza unghiulară a cilindrului, în funcție de φ (unghiul format de dreapta OC și verticală). În momentul inițial, cilindrul este în repaus și $\varphi = \varphi_0$.

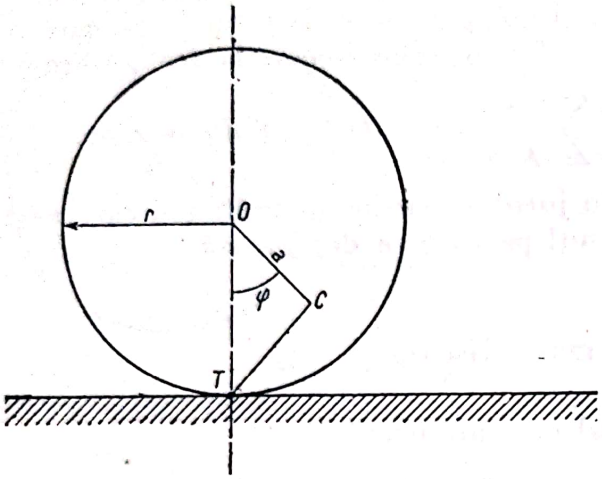


Fig. 27.3.12

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotație este T (punctul de tangență între cilindru și plan orizontal).

Momentul de inerție al cilindrului în raport cu T este:

$$J = k^2 m + C\bar{T}^2 \cdot m$$

(unde m este egal cu masa cilindrului)

$$\bar{C}T^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi.$$

Deci:

$$J = (k^2 + r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi)\, m.$$

Utilizînd relația:

$$d\sum\frac{mv^2}{2} = \sum(X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) = Y_e \cdot dy;$$

$$\sum\frac{mv^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{(k^2 + r^2 + a^2 - ra_1\cos\varphi)\ m\omega^2}{2}.$$

Lucrul mecanic elementar, efectuat prin rotirea tăvălugului, este egal cu lăsarea pe verticală a punctului C, pentru o rotație $d\varphi$ a cilindrului, multiplicată cu greutatea cilindrului; coborîrea pe verticală a punctului C este egală cu:

$$dy = -(ad\varphi)\sin\varphi.$$

Deci lucrul mecanic elementar este:

$$Y_e dy = -mga\sin\varphi \cdot d\varphi.$$

Rezultă:

$$d\left[\frac{(k^2 + r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi)\ m\omega^2}{2}\right] = mga\sin\varphi d\varphi$$

sau integrînd și simplificînd cu m:

$$\frac{(k^2 + r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi)\omega^2}{2} = ga\cos\varphi + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

Constanta C se determină știind că pentru $\varphi = \varphi_0$, $\omega = 0$ (poziție de repaus).

Deci:

$$C = ga \cos \varphi_0.$$

Rezultă expresia vitezei unghiulare:

$$\omega^2 = \frac{2ag(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{k^2 + r^2 + a^2 - 2a\cos \varphi}.$$

27.3.13. O șaibă de rază r și greutate P este înfășurată pe un fir a cărui extremitate este fixată de tavan (fig. 27.3.13). Să se afle viteza unghiulară ω și accelerația ε cu care se desfășoară șaiba.

Rezolvare. Se aplică relația $E_2 - E_1 = L_{1-2}$.

Momentul de inerție al șaibei față de centrul instantaneu de rotație este:

$$J_I = \frac{P \cdot r^2}{2g} + \frac{Pr^2}{g} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{g} r^2.$$

Expresia energiei cinetice este:

$$E_2 = \frac{1}{2} J_I \omega^2 \text{ și } E_1 = 0.$$

Dacă se notează cu V viteza centrului de greutate, atunci:

$$\omega = \frac{V}{r}$$

și

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{g} r^2 \frac{V^2}{r^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot V^2.$$

Dacă se notează cu h spațiul parcurs de centrul discului pînă la atingerea vitezei V, expresia lucrului mecanic este:

$$L_{1-2} = P \cdot h.$$

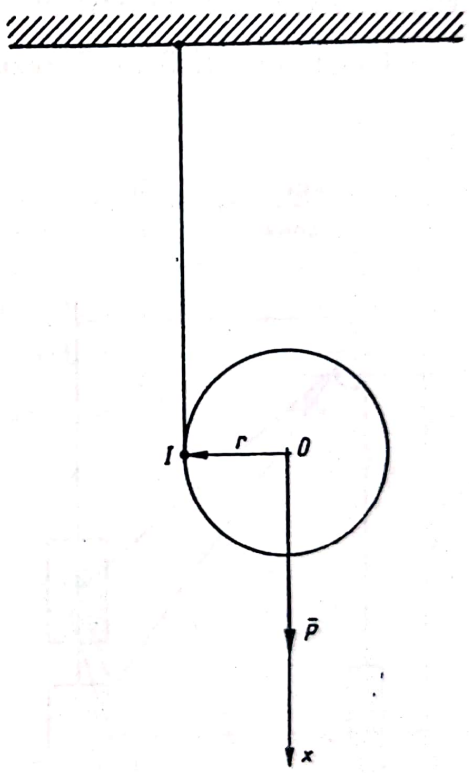


Fig. 27.3.13

Rezultă:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot V^2 = P \cdot h,$$

de unde derivînd:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{P}{g} 2V \cdot a = P \cdot V$$

și deci:

$$a = -\frac{2}{3} g,$$

sau:

$$a = r\varepsilon = \frac{2}{3} g \text{ și, deci,}$$

$$\varepsilon = \frac{2g}{3r}$$

și

$$\omega = \varepsilon\, t = \frac{2gt}{3r}.$$

27.3.14. Să se determine viteza de coborîre a greutății P pentru sistemul din figura 27.3.14, *a*, în care se neglijează frecările.

Rezolvare. Între viteza de coborîre a greutății P și viteza de urcare a greutății Q există o relație de legătură geometrică.

Din figura 27.3.14, *b* rezultă: $\frac{l}{\cos\alpha} d\alpha = \frac{dx}{\operatorname{tg}\alpha}$

sau:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} d\alpha = \frac{dx}{l}.$$

Integrînd și cunoscînd că pentru $x = 0$;

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + l_0^2}},$$

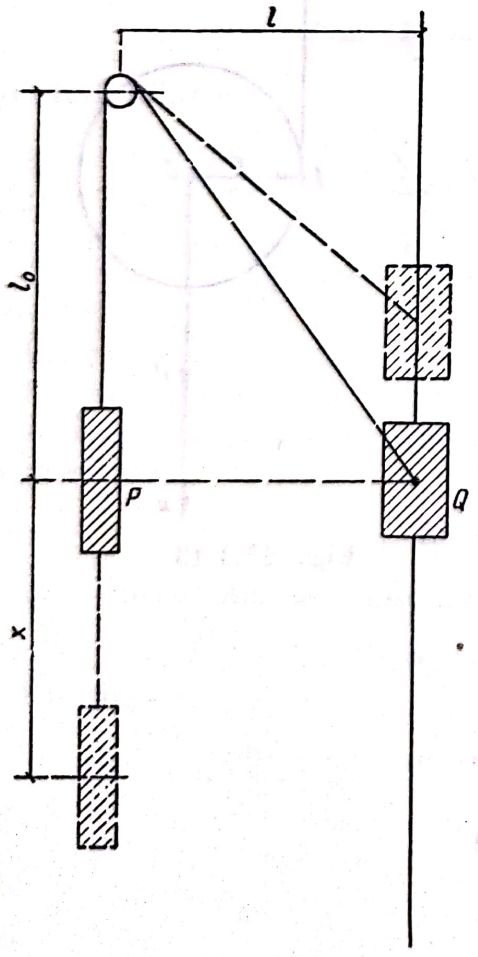


Fig. 27.3.14, *a*

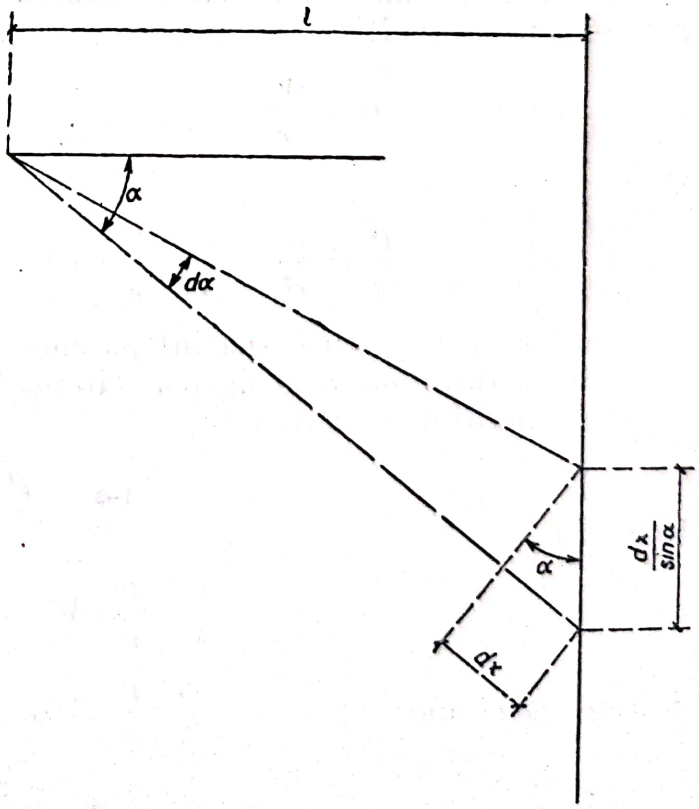


Fig. 27.3.14, *b*

rezultă: $$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{x + l_0^2 + l^2}}.$$

Relaţia: $$d\sum \frac{mV^2}{2} X_e dx + Y_e dy + Z_e dz$$

devine, în cazul acesta:

$$d\left(\frac{P}{2g}V^2 + \frac{Q}{2g}\cdot\frac{V^2}{\sin^2\alpha}\right) = Pdx - Q\frac{dx}{\sin\alpha}.$$

Integrînd şi ţinînd seamă că pentru $x = 0;\ v = 0$, rezultă:

$$\left(\frac{P}{2g} + \frac{Q}{2g}\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)V^2 = \left(P - \frac{Q}{\sin\alpha}\right)x$$

sau înlocuind pe sin α

$$V^2 = \frac{P - \dfrac{Q}{x + \sqrt{l_0^2 + l^2}}}{\rho + \left(\dfrac{\dfrac{Q}{l}}{x + \sqrt{l_0^2 - l^2}}\right)^2} 2gx.$$

27.3.15. O bară omogenă de greutate P şi lungime r este lăsată să se rotească fără frecare în jurul articulaţiei O, pornind din poziţia orizontală şi fără viteză iniţială. Să se determine viteza cu care trece sub un unghi θ (fig. 27.3.15, *a*) (caz particular $\theta = \frac{\pi}{2}$, poziţie verticală).

Rezolvare. Se foloseşte relaţia

$$d\sum \frac{mv^2}{2} = X_e dx + Y_e dy + Z_e dz.$$

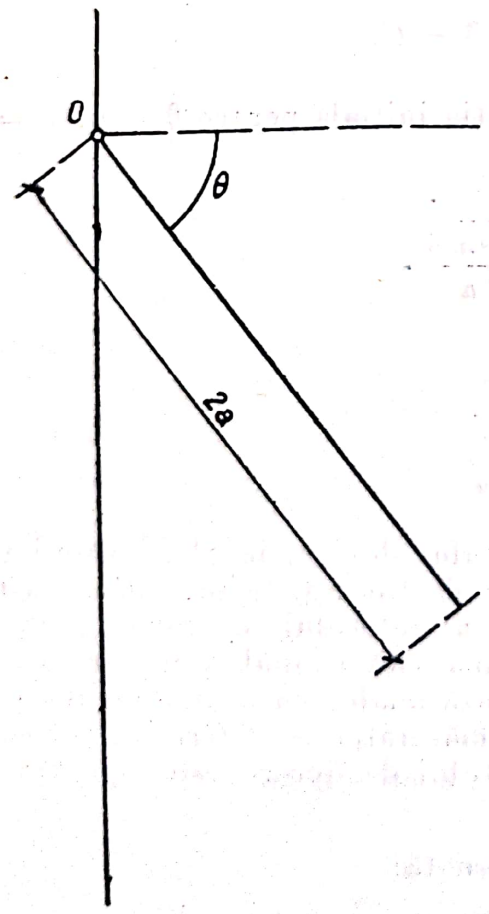


Fig. 27.3.15, *a*

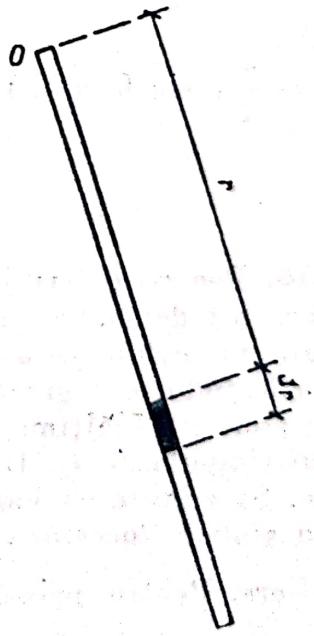


Fig. 27.3.15, *b*

Pentru calculul primului termen se determină întîi valoarea momentului de inerție al barei față de punctul O (fig. 27.3.15, b):

$$\sum J_0 = \int_0^{2a} \frac{P}{2ag} r^2 dr = \frac{4a^2 P}{3g};$$

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} J_0 = \frac{\omega^2 a^2 P}{g} \cdot \frac{2}{3}.$$

Termenul al doilea este egal cu produsul dintre lăsarea pe verticală a centrului de greutate al barei și greutatea barei:

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz = (Pad\,\theta)\cos\theta = Pa\cos\theta\, d\theta.$$

Înlocuind în relația precedentă, se obține:

$$d\left[\frac{2}{3}\frac{\omega^2 a^2 P}{g}\right] = Pa\cos\theta\, d\theta.$$

Integrînd se obține:

$$\frac{2}{3}\frac{\omega^2 a^2 P}{g} = Pa\sin\theta + C.$$

Valoarea lui C se determină din condiția inițială pentru $\theta = 0$, $\omega = 0$; deci $C = 0$.

Rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{g\sin\theta}{a}}.$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = s$, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{a}}.$$

27.3.16. Pentru determinarea momentului de inerție al rotorului unui dinam, fără a-l demonta, și ținînd seamă de frecare, se procedează astfel: se înfășoară un cablu pe axul de rază R al rotorului, de capătul liber al cablului atîrnîndu-se o greutate P_1 și se măsoară timpul t_1 în care aceasta coboară o anumită înălțime h; se procedează analog cu o altă greutate P_2, pentru care timpul este t_2. Din aceste două măsurători se determină momentul de inerție. Se admite că valoarea momentului de frecare este aproximativ aceeași în ambele încercări.

Rezolvare. Pentru prima greutate atîrnată:

$$E_2 = \sum \frac{MV_1^2}{2} = \frac{P_1 V_1^2}{2g} + \frac{J\omega_1^2}{2}, \qquad \text{unde } \omega_1 = \frac{V}{R},$$

deci:

$$E_2 = \left[\frac{P_1}{2g} + \frac{J}{2R^2}\right] V_1^2$$

și $E_1 = 0$.

Lucrul mecanic este dat de relația:

$$L_{1-2} = P_1 \cdot h - M\theta,$$

unde M este momentul dat de frecare și $\theta = \frac{h}{R}$.

Rezultă:

$$V_1^2 \left(\frac{P}{2g} + \frac{J}{2R^2}\right) = P_1 h - \frac{M}{R} h ;$$

derivînd rezultă:

$$a_1 = \frac{P_1 - \frac{M}{R}}{\frac{P_1}{g} + \frac{J}{R^2}}$$

și deci

$$V_1 = \frac{P_1 - \frac{M}{R}}{\frac{P_1}{g} + \frac{J}{R^2}} t$$

și

$$h = \frac{1}{2} \frac{P_1 - \frac{M}{R}}{\frac{P_1}{g} + \frac{J}{R^2}} t^2 .$$

În mod analog:

$$h = \frac{P_2 - \frac{M}{R}}{\frac{P_2}{g} + \frac{J}{R^2}} \cdot \frac{t^2}{2} .$$

Eliminînd M între cele două relații se obține:

$$J = R^2 \frac{g(P_1 - P_2) - 2h\left(\frac{P_1}{t_1^2} - \frac{P^2}{t_2^2}\right)}{2 \cdot h \cdot g \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right)} .$$

27.3.17. O placă de formă triunghiulară aflată într-un plan-vertical, ca în figura 23.3.17, este lăsată să cadă din poziția în care înălțimea AG este orizontală, rotindu-se în jurul vîrfului A. Se cere viteza unghiulară a plăcii cînd această înălțime trece prin poziția verticală.

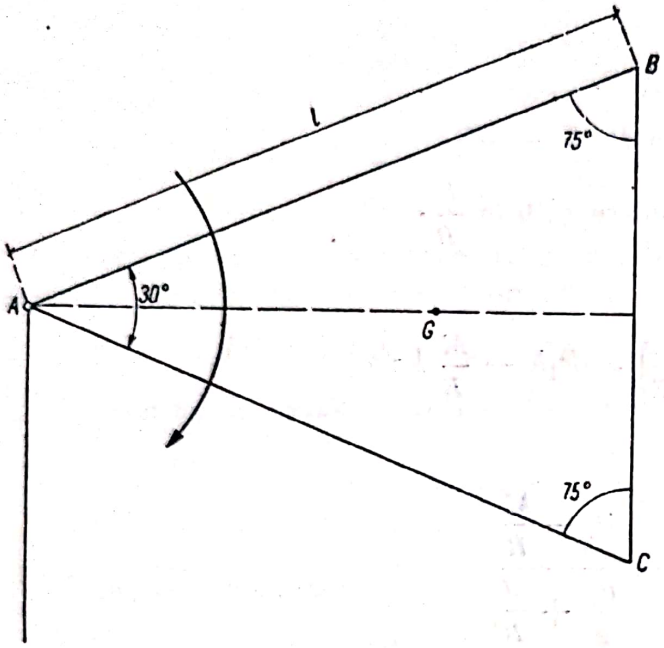


Fig. 27.3.17

Rezolvare:

$$BC = 2l \cdot \sin\frac{30}{2} = 2l \times 0{,}259 = 0{,}518\, l.$$

Momentul de inerție polar al triunghiului în raport cu punctul A, considerînd că masa lui M este

$$J_A = J_G + AG^2 \cdot M^2;$$

$$J_G = \frac{M}{36}\left[2\, l^2 \cos^2\frac{30}{2} + \left(2l \sin\frac{30}{2}\right)^2\right];$$

$$J_A = J_G + \left(\frac{2}{3}\, l \cos\frac{30}{2}\right)^2 M,$$

rezultă:

$$J_A = \frac{Ml^2}{18}\left(1 + \sin^2\frac{30}{2}\right) + \left(\frac{4}{9}\, l^2 \cos^2\frac{30}{2}\right) M = 0{,}242\, M \cdot l^2.$$

Expresia energiei cinetice finale este:

$$E_2 = \frac{1}{2}\, 0{,}242\, Ml^2 \cdot \omega^2 = 0{,}121 \cdot Ml^2\omega^2$$

și cea inițială: $E_1 = O$.

Expresia lucrului mecanic este:

$$L_{1-2} = \frac{2}{3}\, Ml \cos\frac{30}{2}\, g = 0{,}645\, Mg.$$

Rezultă din $E_2 - E_1 = L_{1-2}$:

$$0{,}121 \cdot Ml\omega^2 = 0{,}645\, Mg,$$

de unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{5{,}30\, g}{l}}.$$

27.3.18. Asupra unui volant de rază R, rază de inerție K și greutate P sînt aplicate două forțe $F_1 > F_2$ la periferia lui, ca în figură 27.3.18. Să se determine accelerația unghiulară ε a volantului.

Rezolvare:

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{K^2 P\omega^2}{2g};$$

$$dL = (F_1 - F_2)\, R d\varphi.$$

Rezultă:

$$d\left[\frac{K^2 P\omega^2}{2g}\right] = (F_1 - F_2)\, R \cdot d\varphi.$$

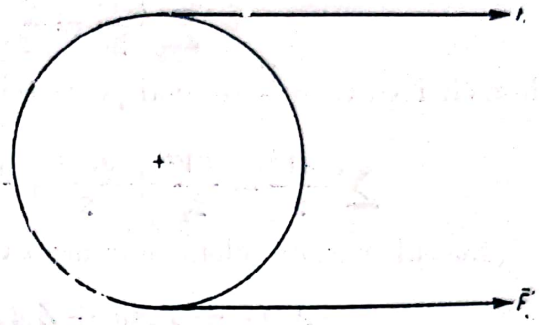


Fig.27.3.18

Împărțind cu dt se obține, ținînd seamă că:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \text{și} \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon;$$

$$\frac{K^2 P}{g}\varepsilon = (F_1 - F_2)R,$$

$$\varepsilon = \frac{F_1 - F_2}{K^2 P} R \cdot g.$$

27.3.19. Să se determine accelerația greutății P din figura 27.3.19, cunoscînd momentul motor M care antrenează sistemul.

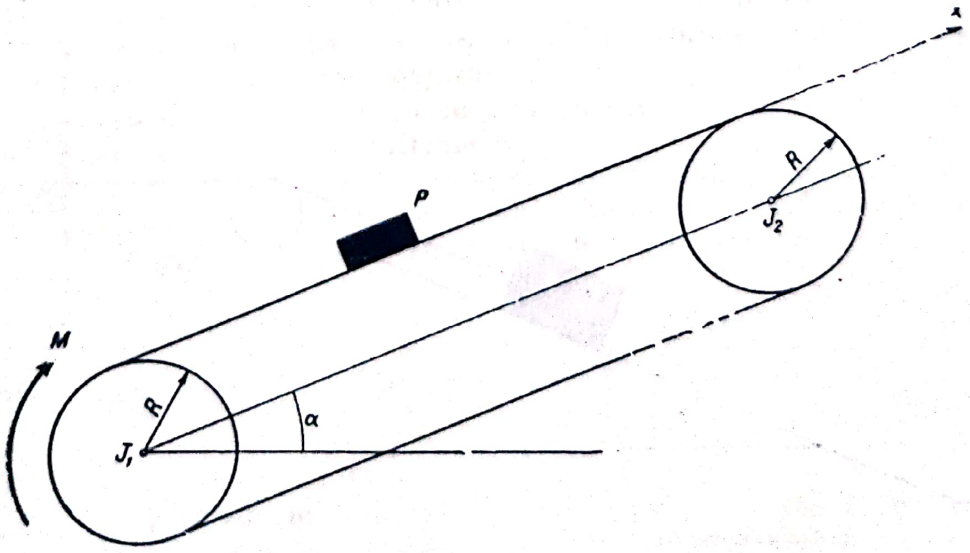


Fig. 27.3.19

Rezolvare. Se pleacă de la relaţia:

$$d\sum\frac{mV^2}{2}=X_e dx+Y_e dy+Z_e dz;$$

$$\sum\frac{mV^2}{2}=\frac{PV^2}{2g}+\frac{J_1\omega^2}{2}+\frac{J_2\omega^2}{2},$$

observînd că $\omega=\frac{V}{R}$ se mai poate scrie:

$$\sum\frac{MV^2}{2}=\frac{PV^2}{2q}+\frac{J_1\omega^2}{2}+\frac{J_2\omega^2}{2}=\left[\frac{P_1}{2q}+\frac{J_1}{2R^2}+\frac{J_2}{2R^2}\right]V^2.$$

Lucrul mecanic elementar are expresia:

$$X_e dx+Y_e dy+Z_e dz=M\frac{dx}{R}-Pdx\sin\alpha,$$

de unde:

$$d\left[\frac{P_1}{2q}+\frac{J_1}{2l^2}+\frac{J_2}{2R^2}\right]V^2=M\frac{dx}{R}-Pdx\sin\alpha,$$

observînd că $\frac{dx}{dt}=V$ se obţine:

$$a=\sqrt{\frac{\frac{M}{R}-P\sin\alpha}{\frac{P}{g}+\frac{J_1}{R^2}+\frac{J_2}{R^2}}}.$$

27.3.20. Să se determine viteza greutăţii G pe planul înclinat din figura 27.3.20, cunoscînd coeficientul de frecare între plan şi greutate egal cu f şi momentul de inerţie propriu al tamburului egal cu J_p.

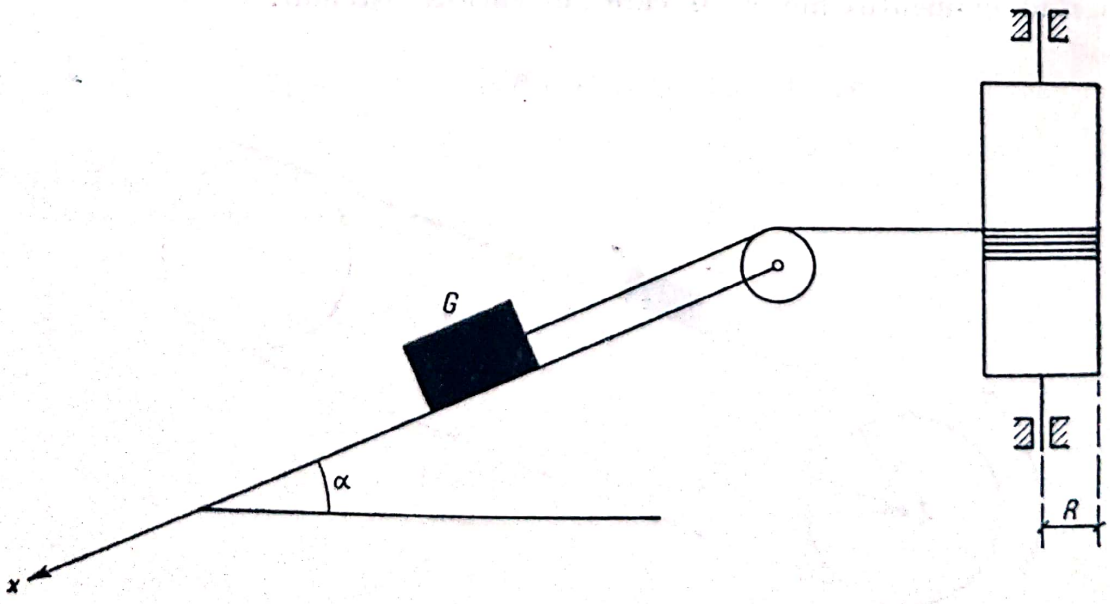


Fig. 27.3.20

Rezolvare. Pornind de la relaţia:

$$d\sum\frac{mV^2}{2}=X_e dx+Y_e dy+Z_e dz,$$

$$\sum\frac{mV^2}{2}=\frac{G}{2g}V^2+\frac{J_p\omega^2}{2},\ \text{deci}\ \omega=\frac{V}{R},$$

$$\sum\frac{mV^2}{2}=\frac{G}{2g}V^2+\frac{J_pV^2}{2R^2};$$

$$X_e dx+Y_e dy+Z_e dz=G dx\sin\alpha-fG dx\cos\alpha,$$

rezultă, deci:

$$d\left[\frac{G}{2g}V^2+\frac{J_pV^2}{2R^2}\right]=(G\sin\alpha-fG\cos\alpha)\,dx$$

sau integrînd:

$$\left[\frac{G}{2g}+\frac{J_p}{2R^2}\right]V^2=G(\sin\alpha-f\cos\alpha)x;$$

$$V=\sqrt{\frac{G(\sin\alpha-f\cos\alpha)}{\frac{G}{2g}+\frac{J_p}{2R^2}}\,x}$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

27.3.21. Pentru determinarea momentului de inerţie a rotorului unui dinam (fără a scoate rotorul şi ţinînd totodată seamă de frecare) se poate proceda în felul următor: se înfăşoară un cablu peste arborele rotorului, de capătul liber se atîrnă o greutate p_1 şi se determină timpul t_1, în care greutatea coboară cu o înălţime oarecare h (cablul poate fi trecut peste un scripete). Apoi se face acelaşi lucru cu altă greutate p_2, observînd timpul t_2, în care ea coboară cu aceeaşi înălţime h.

Să se afle momentul de inerţie al rotorului, ţinînd seamă de frecarea în lagăre şi cunoscînd raza R a arborelui lui. (Momentul de frecare este considerat constant, fără a depinde de greutatea atîrnată.)

Răspuns: $$J=R^2\frac{g(p_1-p)-2h\left(\frac{p_1}{t_1^2}-\frac{p_2}{t_2^2}\right)}{2hg\left(\frac{1}{t_1^2}-\frac{1}{t_2^2}\right)}.$$

27.3.22. Două puncte materiale libere, de mase m_1 şi m_2, se atrag între ele cu o forţă proporţională cu masele şi invers proporţională cu pătratul distanţei, factorul de proporţionalitate fiind k. La început, punctele se află

în repaus şi distanţa între ele este a. Să se afle vitezele acestor puncte, în momentul cînd distanţa între ele se va reduce la jumătate.

$$Răspuns:\ v_1 = m_2\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}};\quad v_2 = m_1\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}}.$$

27.3.23. Pe un cilindru circular drept, a cărui axă este verticală şi serveşte ca axă de rotaţie, este răsucită o ţeavă în formă de elice. În această ţeavă porneşte de sus o sferă grea, care, mişcîndu-se în jos, de-a lungul ţevii, o pune în mişcare de rotaţie. Să se afle viteza unghiulară Ω a ţevii, precum şi viteza absolută v a sferei, în momentul cînd ea iese prin capătul de jos al ţevii. Se dă: M—masa ţevii, m—masa sferei, r—raza cilindrului, h—pasul elicei, n—numărul spirelor ţevii; masa cilindrului şi rezistenţele pot fi neglijate.

$$Răspuns:\ \Omega = \frac{\mu\cos\alpha}{r}u,\ v = u\sqrt{1-\mu(2-\mu)\cos^2\alpha},$$

în care

$$u = \sqrt{\frac{2gnh}{1-\mu\cos^2\alpha}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r},\ \mu = \frac{m}{m+M}.$$

Capitolul XXVIII

SOLIDUL CU O AXĂ FIXĂ

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

În cazul solidului cu o axă (axa Oz), teoremele generale:

$$\dot{\bar{H}} = \sum \bar{F}_i \text{ sau } M\ddot{\bar{\rho}} = \sum \bar{F}_i \tag{28.1}$$

$$\dot{\bar{K}} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i \tag{28.2}$$

$$dE = dL_{\text{int}} + dL_{\text{est}} \tag{28.3}$$

unde impulsul, acceleraţia centrului maselor, momentul cinetic şi energia cinetică au respectiv expresiile:

$$\bar{H} = M\dot{\bar{\rho}} = M\bar{\omega}\times\bar{\rho} \tag{28.4}$$

$$\rho = (-\omega^2\xi - \varepsilon\eta)\,\bar{i} + (-\omega^2\eta + \varepsilon\xi)\,j \tag{28.5}$$

$$\bar{K} = -J_{xz}\omega\,\bar{i} - J_{yz}\omega\,\bar{j} + J_z\omega\,\bar{k} \tag{28.6}$$

$$E = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \tag{28.7}$$

prin proiectarea relaţiilor (28.1) şi (28.2) pe axele unui sistem de referinţă mobil, invariabil legat de solid (fig. 28, *a*), în care s-a ţinut seama de expresia derivatei unui vector cunoscut prin proiecţiile sale pe axe mobile:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{U} \tag{28.8}$$

se obţine:

$$\left.\begin{aligned} -M\varepsilon\eta - M\omega^2\xi &= X + R_x + R'_x \\ M\varepsilon\xi - M\omega^2\eta &= Y + R_y + R'_y \\ O &= Z + R_z + R'_z \\ -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x \end{aligned}\right| \tag{28.9}$$

$$J_z\varepsilon = M_{oz} \tag{28.10}$$

originea O s-a ales într-unul dintre punctele fixe, M fiind masa solidului; ω — viteza unghiulară; ξ, η, φ — coordonatele centrului de greutate; XYZ şi M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} — proiecţiile rezltantei, respectiv momentului rezultant al forţelor aplicate; h — distanţa dintre lagărele O şi O', în care se aplică reacţiunile $\bar{R}$ şi $\bar{R}'$ (fig. 28, *a*).

În rezolvarea problemelor de solid cu o axă fixă se va determina întîi mişcarea solidului folosind ecuaţia (28.1) sau (28.3), apoi reacţiunile cu ajutorul ecuaţiilor (28.9). În general, componentele R_z şi R'_z nu pot fi determinate, decît în cazul cînd se cunoaşte o condiţie suplimentară.

Dacă $M_{oz} = 0$, mişcarea de rotaţie a solidului este uniformă şi ecuaţiile pentru determinarea reacţiunilor devin:

$$\left.\begin{aligned} -M\omega^2\xi &= X + R_x + R'_x \\ -M\omega^2\eta &= Y + R_y + R'_y \\ O &= Z + R_z + R'_z \\ J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y \\ -J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x \end{aligned}\right| \tag{28.11}$$

Se reamintesc expresiile momentelor de inerţie ale cîtorva corpuri mai des întîlnite în aplicaţie:

a) Placă circulară omogenă (fig. 28, *b*):

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}; \quad J_z = \frac{MR^2}{2}. \tag{28.12}$$

b) Placă dreptunghiulară omogenă (fig. 28, *c*):

$$J_x = \frac{Mb^2}{12}; \quad J_{x'} = \frac{Mb^2}{3}. \tag{28.13}$$

prin proiectarea relaţiilor (28.1) şi (28.2) pe axele unui sistem de referinţă mobil, invariabil legat de solid (fig. 28, *a*), în care s-a ţinut seama de expresia derivatei unui vector cunoscut prin proiecţiile sale pe axe mobile:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{U} \tag{28.8}$$

se obţine:

$$\left.\begin{aligned} -M\varepsilon\eta - M\omega^2\xi &= X + R_x + R'_x \\ M\varepsilon\xi - M\omega^2\eta &= Y + R_y + R'_y \\ O &= Z + R_z + R'_z \\ -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x \end{aligned}\right| \tag{28.9}$$

$$J_z\varepsilon = M_{oz} \tag{28.10}$$

originea O s-a ales într-unul dintre punctele fixe, M fiind masa solidului; ω — viteza unghiulară; ξ, η, φ — coordonatele centrului de greutate; XYZ şi M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} — proiecţiile rezltantei, respectiv momentului rezultant al forţelor aplicate; h — distanţa dintre lagărele O şi O', în care se aplică reacţiunile $\bar{R}$ şi $\bar{R}'$ (fig. 28, *a*).

În rezolvarea problemelor de solid cu o axă fixă se va determina întîi mişcarea solidului folosind ecuaţia (28.1) sau (28.3), apoi reacţiunile cu ajutorul ecuaţiilor (28.9). În general, componentele R_z şi R'_z nu pot fi determinate, decît în cazul cînd se cunoaşte o condiţie suplimentară.

Dacă $M_{oz} = 0$, mişcarea de rotaţie a solidului este uniformă şi ecuaţiile pentru determinarea reacţiunilor devin:

$$\left.\begin{aligned} -M\omega^2\xi &= X + R_x + R'_x \\ -M\omega^2\eta &= Y + R_y + R'_y \\ O &= Z + R_z + R'_z \\ J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y \\ -J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x \end{aligned}\right| \tag{28.11}$$

Se reamintesc expresiile momentelor de inerţie ale cîtorva corpuri mai des întîlnite în aplicaţie:

a) Placă circulară omogenă (fig. 28, *b*):

$$J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}; \quad J_z = \frac{MR^2}{2}. \tag{28.12}$$

b) Placă dreptunghiulară omogenă (fig. 28, *c*):

$$J_x = \frac{Mb^2}{12}; \quad J_{x'} = \frac{Mb^2}{3}. \tag{28.13}$$

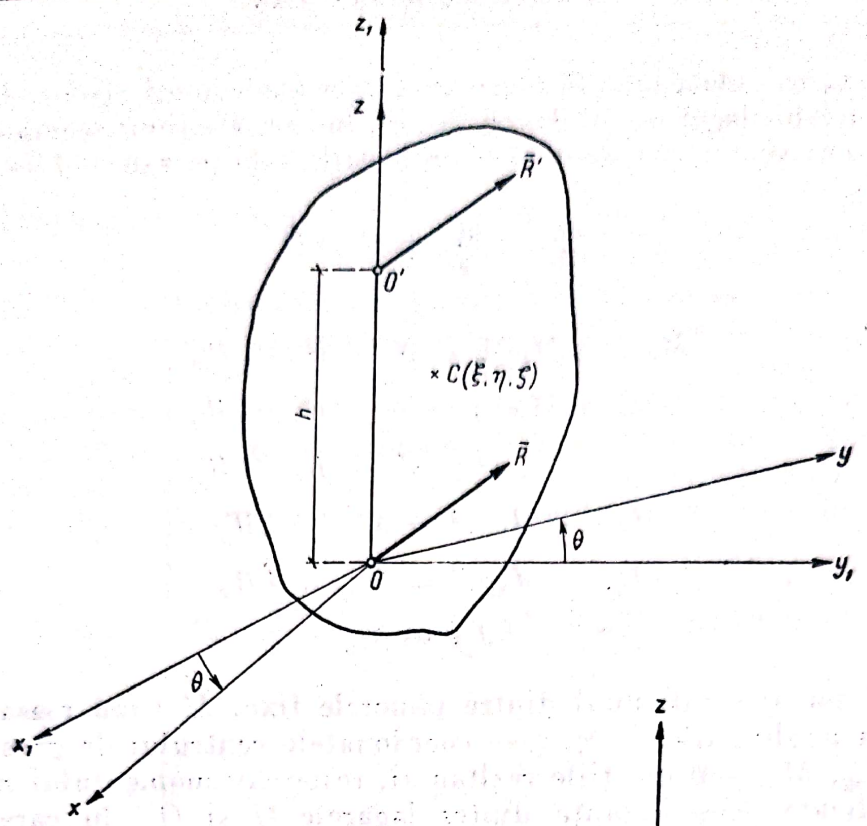


Fig. 28, *a*

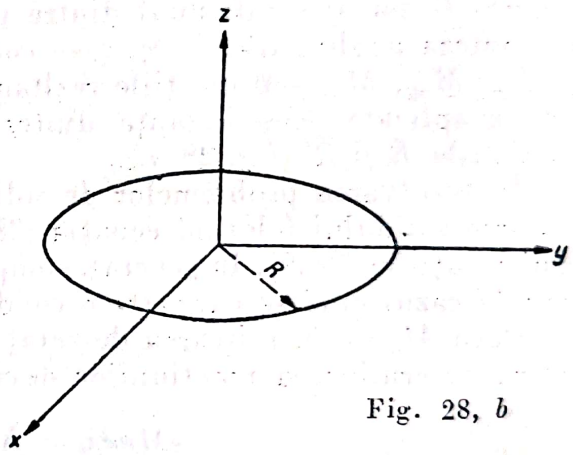


Fig. 28, *b*

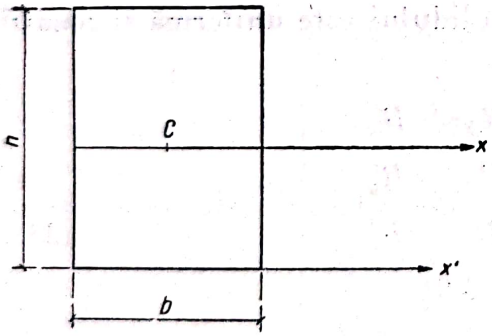


Fig. 28, *c*

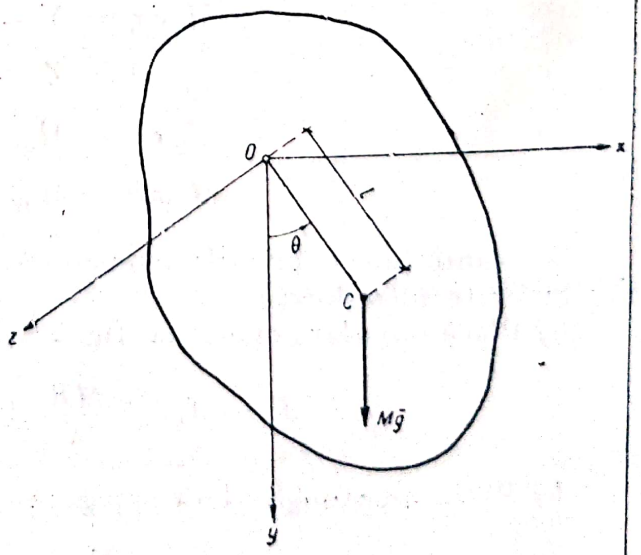


Fig. 28, *e*

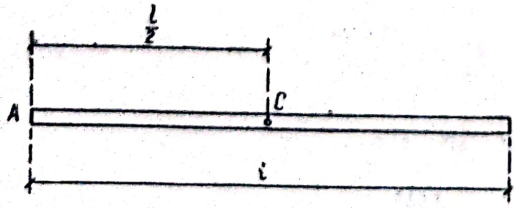


Fig. 28, *d*

c) Bară omogenă de lungime l (fig. 28, *d*):

$$J_c = \frac{Ml^2}{12}\ ; \quad J_A = \frac{Ml^2}{3}\ . \tag{28.14}$$

Un caz particular de solid cu axă fixă este pendulul compus (fig. 28, *e*), a cărui ecuație diferențială a mișcării este:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{J_z} \sin \theta = 0, \tag{28.15}$$

unde $l = OC$, lungimea pendulului compus este distanța de la centrul de greutate al corpului pînă la axa de rotație Oz.

Pendulul compus oscilează la fel cu un pendul simplu a cărui lungime este:

$$l' = \frac{J_z}{Ml} \tag{28.16}$$

și care se numește pendulul simplu sincron cu pendulul compus. Perioada lui de oscilație este:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}\ . \tag{28.17}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

28.1. Să se afle momentul cuplului de frecare în lagăre, dacă o roată pornită cu viteza de n_0 rotații pe minut s-a oprit după timpul T.

Momentul de inerție al roții în raport cu axa de rotație este J. Cîte rotații a făcut pînă la oprire?

Rezolvare. Presupunînd momentul de frecare M constant și știind că el este opus sensului de rotație va trebui să se înlocuiască M_z cu $-M$ în ecuația (28.10). Se obține:

$$-M = J\dot{\omega},$$

$$\omega = -\frac{M}{J}t + \omega_0;$$

cum:

$$\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30},$$

rezultă:

$$\omega = -\frac{M}{J}t + \frac{\pi n_0}{30}\ .$$

La momentul T roata se oprește și deci $\omega = 0$.

Înlocuind:

$$0 = -\frac{M}{J}T + \frac{\pi n_0}{30},$$

rezultă:

$$M = \frac{\pi n_0 J}{30\,T};$$

unghiul de rotire pînă la oprire:

$$\theta = -\frac{M}{2\,J}T^2 + \frac{\pi n_0}{30}T = \frac{\pi n_0 T}{60},$$

deci numărul de turaţii pînă la oprire:

$$N = \frac{60\,\theta}{2\pi} = \frac{n_0 T}{2}.$$

28.2. Un cilindru circular, drept, omogen, ale cărui dimensiuni şi greutate sînt cunoscute, este atîrnat de tavan cu ajutorul unei sîrme elastice, fixată în centrul bazei sale superioare.

Apoi cilindrul este răsucit cu un unghi φ_0 în jurul axei sale şi i se dă drumul. Datorită elasticităţii sîrmei răsucite, cilindrul începe să execute oscilaţii. Să se afle legea acestor oscilaţii ştiind că momentul cuplului de răsucire M şi unghiul de răsucire φ sînt proporţionale $M_t = k^2\varphi$, k^2 fiind un factor de proporţionalitate.

Rezolvare. Cilindrul fiind răsucit cu un unghi φ, asupra sa acţionează, afară de greutatea proprie şi reacţiunea verticală a firului, şi cuplul de răsucire avînd momentul coliniar cu firul (axa de rotaţie). Trebuie ţinut însă seamă de faptul că la o răsucire într-un sens oarecare cu unghiul φ, cuplul tinde să readucă cilindrul în poziţia iniţială şi deci momentul său în raport cu axa Oz va fi:

$$M_z = -k^2\varphi.$$

Momentele celorlalte forţe în raport cu aceeaşi axă sînt nule.

Înlocuind pe Mz în relaţia (28.10) se obţine:

$$-k^2\varphi = J_z\ddot{\omega};$$

$$\varphi + \frac{k^2}{J}\varphi = 0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale liniare, cu coeficienţi constanţi, este:

$$\varphi = C_1 \cos\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\,t.$$

Viteza unghiulară:

$$\dot{\varphi} = -C_1\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\sin\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\,t + C_2\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\cos\sqrt{\frac{k^2}{J_z}}\,t,$$

condiţiile iniţiale fiind:

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

se obține legea de mișcare:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{k}{\sqrt{J_z}} t,$$

unde

$$J_z = \frac{MR^2}{2},$$

M fiind masa cilindrului și R — raza lui.

Perioada oscilațiilor este:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{J_z}}{k}.$$

28.3. De axul vertical OO' este prinsă o greutate B de masă m, cu ajutorul barei orizontale AB de masă neglijabilă. Știind că $OO' = k$, $OA = a$, $OB = b$

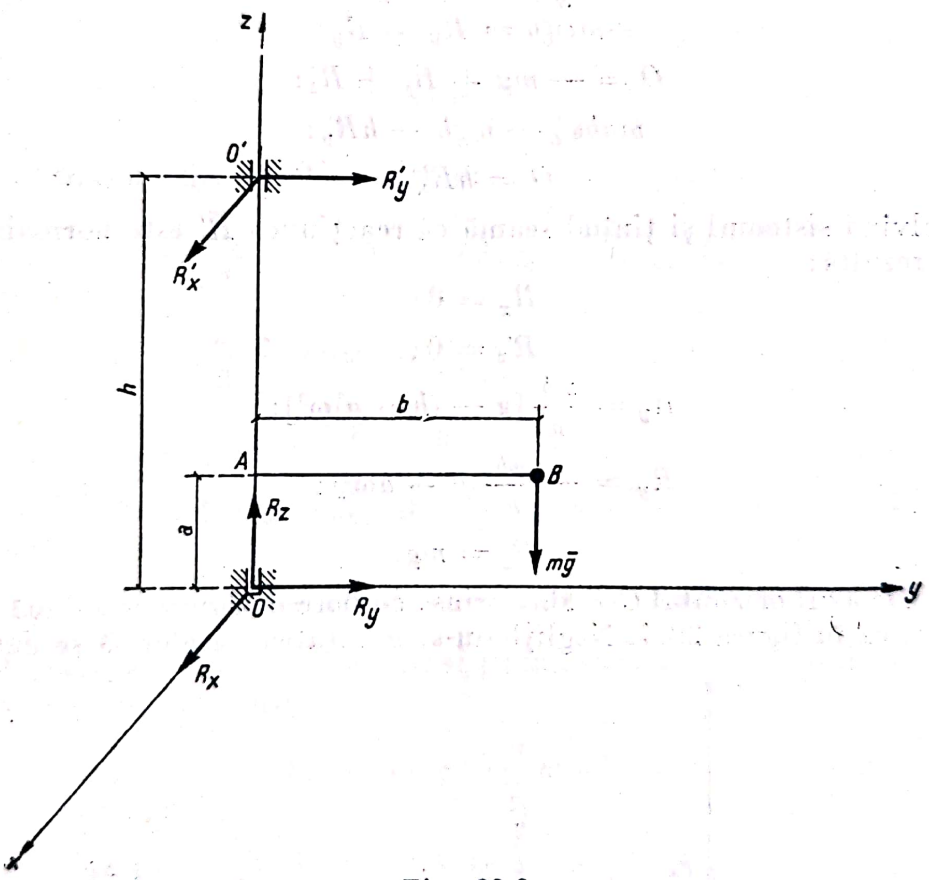


Fig. 28.3

și cunoscînd viteza unghiulară inițială ω_0 a sistemului, se cere să se determine mișcarea, precum și reacțiunile din lagăre pentru poziția din figura 28.3. Se neglijează frecările din lagărele O și O'.

Rezolvare. Singura forță efectivă aplicată sistemului este greutatea $m\bar{g}$; cum momentul acesteia în raport cu axa Oz este nul, înlocuind în relația (28.10) se obține:

$$\dot{\omega} = 0$$

și ținînd seamă de condițiile inițiale:

$$\omega = \omega_0.$$

Sistemul se va roti deci cu viteză unghiulară constantă. Integrînd încă o dată se obține legea de mișcare:

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0,$$

unde θ_0 depinde de poziția solidului în momentul $t = 0$.

Cum mișcarea solidului este uniformă, pentru determinarea reacțiunilor se folosesc ecuațiile (28.11), în care:

$$\xi = 0;\ \eta = b;\ J_{xz} = 0;\ J_{yz} = mab;$$

$$X = Y = 0;\ Z = -mg;\ M_x = -mgb;\ M_y = 0,$$

se obține:

$$O_x = R + R'_x;$$

$$-m\omega_0^2 b = R_y + R'_y;$$

$$O = -mg + R_z + R'_z;$$

$$mab\omega_0^2 - mgb - hR'_y;$$

$$O = hR'_x.$$

Rezolvînd sistemul și ținînd seamă că reacțiunea $\bar{R}'$ este normală pe ax, $R'_z = 0$, rezultă:

$$R_x = 0;$$

$$R'_x = 0;$$

$$R_y = \frac{mb}{h}[g - (h - a)\omega_0^2];$$

$$R'_y = -\frac{mb}{h}(g + a\omega_0^2);$$

$$R_z = mg.$$

28.4. De axul orizontal OO' sînt prinse cu bare de lungime l două greutăți de masă m ca în figura 28.4. Neglijîndu-se greutatea barelor să se determine,

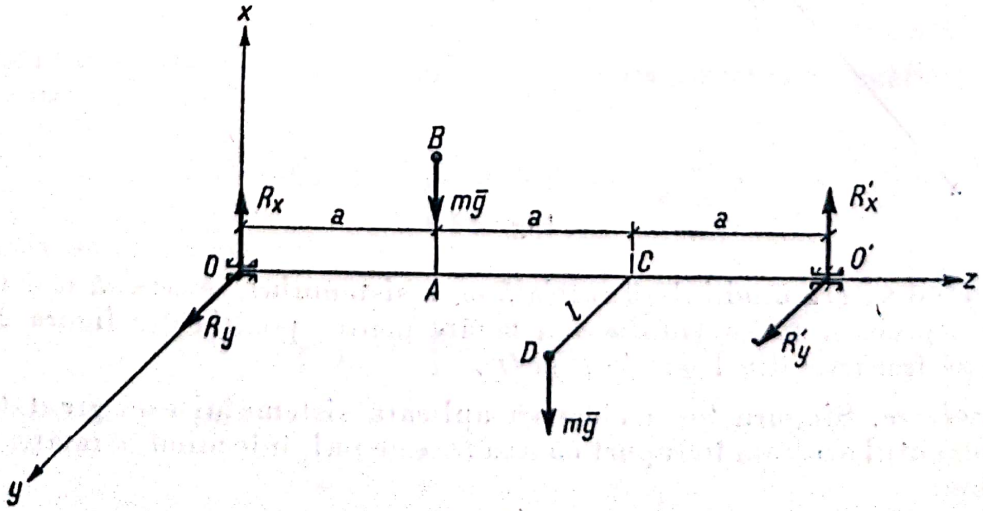


Fig. 28.4

în funcţie de viteza unghiulară ω, reacţiunile dinamice ale lagărelor O şi O' pentru poziţia din figură.

Rezolvare. Se utilizează ecuaţiile (28.9) şi (28.10), în care:

$$X = -2mg;\ Y = Z = 0;$$

$$M_x = 0;\ M_y = -3mga;\ M_z = mgl;$$

$$M = 2m;\ \xi = \frac{l}{2};\ \eta = \frac{l}{2};\ h = 3a;$$

$$J_{xz} = mal;\ J_{yz} = 2mal;\ J_z = 2ml^2.$$

Din ecuaţia (28.10):

$$2ml^2\dot{\omega} = mgl$$

rezultă:

$$\dot{\omega} = \frac{g}{2l}$$

şi înlocuind în ecuaţiile (28.9) se obţine:

$$-\frac{mg}{2} - ml\omega^2 = -2mg + R_x + R'_x;$$

$$\frac{mg}{2} - ml\omega^2 = R_y + R'_y;$$

$$O = R_z + R'_z;$$

$$-\frac{mag}{2} + 2mal\omega^2 = -3aR'_y;$$

$$-mag - mal\omega^2 = -3mga + 3aR'_z.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii şi ţinînd seamă că reacţiunile din lagăre sînt normale pe ax, se obţine:

$$R_x = \frac{5}{6}mg - \frac{2}{3}ml\omega^2;$$

$$R'_x = \frac{2}{3}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2;$$

$$R_y = \frac{11}{3}mg - \frac{1}{3}ml\omega^2;$$

$$R'_y = \frac{1}{6}mg - \frac{2}{3}ml\omega^2;$$

$$R_z = 0;$$

$$R'_z = 0.$$

28.5. O placă triunghiulară OO' de masă M este articulată în O', iar în O este prinsă de axa fixă Oz cu un fir orizontal foarte mic. Să se determine tensiunea T în fir știind că viteza unghiulară inițială a plăcii este ω_0 (fig. 28.5). Cînd este nulă tensiunea din fir?

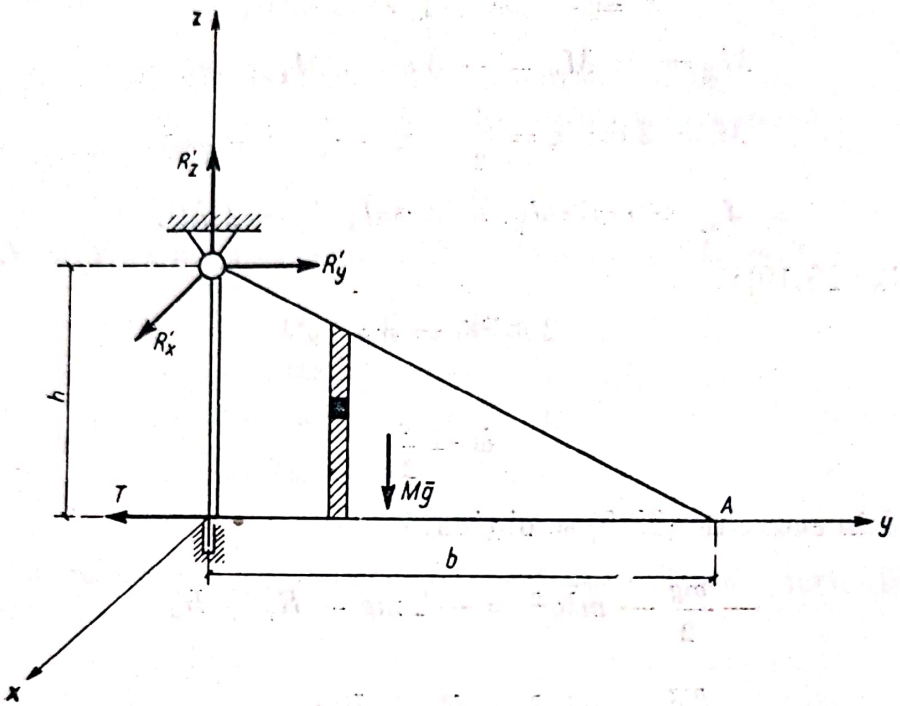


Fig. 28.5

Rezolvare. Singura forță efectiv aplicată este greutatea $M\bar{g}$ a plăcii. Cum $M_z = 0$, placa are o mișcare uniformă. Se folosesc ecuațiile (28.11) pentru determinarea reacțiunilor, în care:

$$X = Y = 0; \quad Z = -Mg;$$

$$M_x = -\frac{Mgb}{3}; \; M_y = M_z = 0;$$

$$\xi = 0; \qquad \eta = \frac{b}{3};$$

$$J_{xz} = \int xz\, dm = 0,$$

deoarece $x = 0$ pentru întreaga placă:

$$J_{zy} = \int zy\, dm = \frac{M}{A}\int zy\, dA.$$

Elementul de suprafață va fi un dreptunghi cu baza dy și înălțimea dz:

$$J_{zy} = \frac{2M}{bh} = \int\int zy\, dz\, dy.$$

Ecuația dreptei $O'A$ este $z = -\frac{h}{b}y + h$:

$$J_{zy} = \frac{2M}{bh}\int_0^b dy\left(\int_0^{-h/by+h} zy\,dz\right) = \frac{2M}{bh}\int_0^b dy \cdot y\frac{\left(\frac{h}{b}y + h\right)^2}{2} = \frac{Mbh}{12}.$$

Înlocuind în (28.11), în care $R_y = -T$, va rezulta:

$$O = R_x - R'_x;$$

$$-\frac{Mb\omega_0^2}{3} = -T + R'_y;$$

$O = -Mg + R'_z$ (tensiunea din fir nu are proiecție pe Oz):

$$\frac{Mbh\omega_0^2}{12} = \frac{Mgb}{3} - hR'_y;$$

$$O = hR'_x.$$

Rezultă:

$$R'_x = 0;$$

$$R'_y = -Mb\left(\frac{g}{3h} + \frac{\omega_0^2}{12}\right);\quad R'_z = Mg$$

$$R_x = 0;$$

$$T = Mb\left(\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{3h}\right).$$

Tensiunea se va anula pentru:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{3h}}.$$

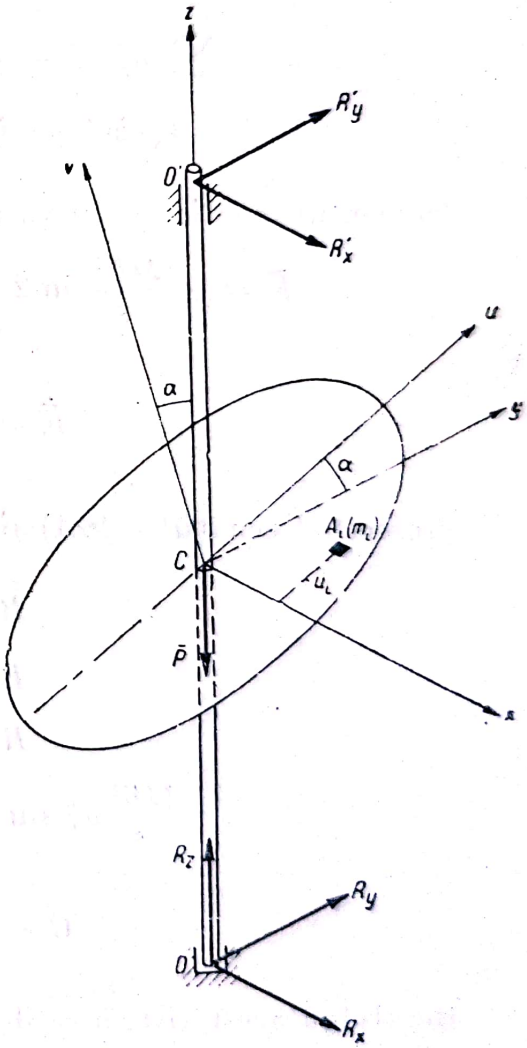


Fig. 28.6

28.6. Un disc de rază R și greutate P se rotește în jurul unei axe verticale Z, cu viteza unghiulară constantă ω. Axa de rotație trece prin centrul de greutate al discului, care coincide cu centrul O, și formează unghiul α cu normala pe planul discului. Să se determine reacțiunile din O și O', dacă $OO' = h$ și $OA = \frac{h}{2}$.

Rezolvare. Pentru determinarea mișcării se folosește teorema energiei (28.3). Cum $dL_{ext} = dL_{int} = 0$, rezultă $E = \text{const.}$, deci din (28.7) $\omega = \omega_0$, mișcarea fiind uniformă.

Pentru determinarea reacțiunilor se aplică teorema impulsului (28.1) și teorema momentului cinetic (28.2).

Centrul de greutate al discului aflîndu-se pe axa Oz, $\dot{\bar{\rho}} = 0$, deci $\bar{H} = 0$, $\dot{\bar{H}} = 0$.

Pentru calculul momentelor de inerție, se vor considera sistemele de axe $Cxyz$ și sistemul de axe C_{xuv}, în care axa C_x este diametrul orizontal, C_u — linia de cea mai mare pantă și C_v este normala pe disc. Va rezulta:

$$\left.\begin{aligned} J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i = \sum m_i x_i u_i \sin\alpha = \\ &= \sin\alpha \sum m_i x_i u_i = \sin\alpha\, J_{xu} = 0; \\ J_{yz} &= \sum m_i y_i z_i = \sum m_i u_i^2 \sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2} I_u = \frac{\sin 2\alpha}{2} J_u = \frac{MR^2}{4} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}; \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i (x_i^2 + u_i^2 \cos^2\alpha) = \\ &= J_u + J_x \cos^2\alpha = J_x (1 + \cos^2\alpha) = \frac{MR^2}{2}(1 + \cos^2\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Momentul cinetic (28.6) va avea, deci, expresia:

$$\bar{K} = -\frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha\omega_0 \bar{j} + \frac{MR^2}{2}(1 + \cos^2\alpha)\,\omega_0 \bar{k},$$

și

$$\dot{\bar{K}} = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha\omega_0^2 \bar{i}. \quad (2)$$

Proiectînd ecuațiile (28.1) și (28.2) se obține:

$$R_x + R'_x = 0,$$

$$R_y + R'_y = 0,$$

$$R_z - P = 0,$$

$$\frac{MR^2}{8}\omega_0^2 \sin 2\alpha = R_y \frac{h}{2} - R'_y \frac{h}{2};$$

$$O = R'_x \frac{h}{2} - R_x \frac{h}{2}.$$

Rezolvînd acest sistem se deduce:

$$R_x = R'_x = 0;$$

$$R_y = -R'_y = \frac{MR^2}{8}\omega_0^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{P}{g} \cdot \frac{R^2}{8}\omega_0^2 \sin 2\alpha;$$

$$R_z = P.$$

28.7. Să se determine reacţiunile discului din problema 28.6, presupunînd că discul nu a fost montat centrat, poziţia centrului de greutate al discului faţă de axa de rotaţie fiind determinată prin excentricitatea $AC = e$ şi unghiul θ dintre diametrul orizontal al discului şi AC.

Rezolvare. Ca şi în problema precedentă, $dL = 0$, mişcarea discului este uniformă:

$$\omega = \omega_0. \qquad (1)$$

Se vor utiliza relaţiile (28.11), în care:

$$X = Y = 0; \quad Z = -P; \qquad (2)$$

$$\xi = e\cos\theta; \quad \eta = e\sin\theta\cos\alpha;$$

$$\zeta = \frac{h}{2} + e\sin\theta\sin\alpha; \qquad (3)$$

$$\overline{M}_0 = \overline{OC} \times \overline{P} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e\cos\theta & e\sin\theta\cos\alpha & \frac{h}{2} + e\sin\theta\sin\alpha \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix},$$

deci:

$$M_{ox} = -eP\sin\theta\cos\alpha;$$

$$M_{oy} = eP\cos\theta;$$

$$M_{oz} = 0. \qquad (4)$$

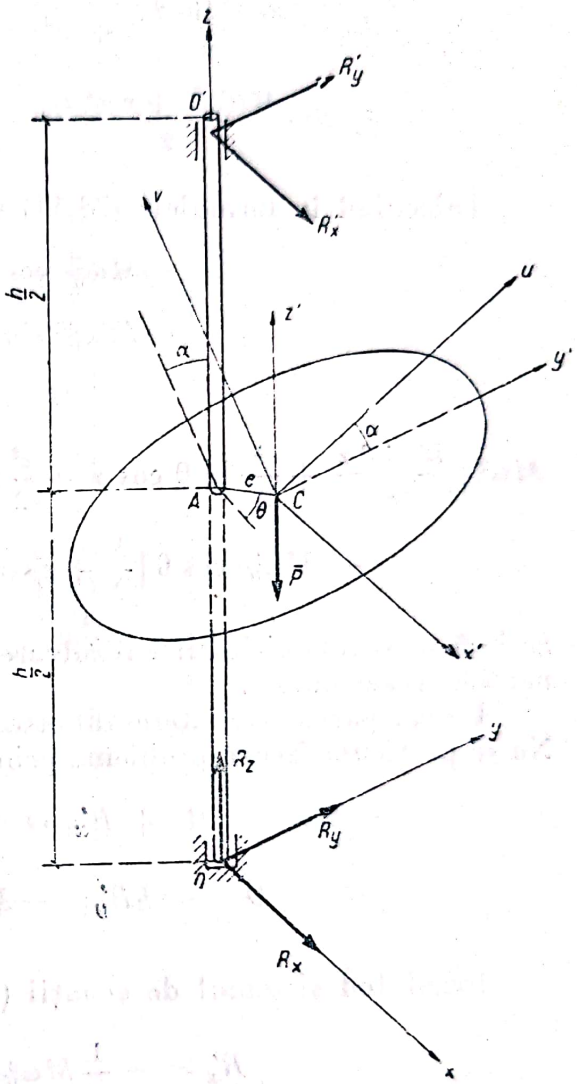


Fig. 28.7

Cu notaţiile din figura (28.7), relaţiile (1) din problema precedentă sînt:

$$J_{x'z'} = 0; \quad J_{y'z'} = \frac{MR^2\sin 2\alpha}{8};$$

$$J_{z'} = \frac{MR^2(1+\cos^2\alpha)}{2}.$$

Însă, conform formulelor (26.9) şi (26.7):

$$J_{xz} = J_{x'z'} + M\xi\varphi; \quad J_{yz} = J_{y'z'} + M\eta\varphi;$$

$$J_z = J_{z'} + M(\xi^2 + \eta^2),$$

adică:

$$\left.\begin{aligned} J_{xz} &= Me\ \cos\theta\left(\frac{h}{2}+e\sin\theta\sin\alpha\right);\\ J_{yz} &= \frac{MR^2\sin 2\alpha}{8}+Me\sin\theta\cos\alpha\left(\frac{h}{2}+e\sin\theta\sin\alpha\right);\\ J_z &= \frac{MR^2(1+\cos^2\alpha)}{2}+Me^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\alpha). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Înlocuind în formulele (28.11) se obține sistemul de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} -M\omega_0^2 e\cos\theta &= R_x+R'_y;\\ -M\omega_0^2 e\sin\theta\cos\alpha &= R_y+R'_y;\\ O &= R_z-P \end{aligned}\right\} \quad (6$$

$$M\omega_0^2\left(\frac{R^2\sin^2\alpha}{8}+\frac{eh}{2}\sin\theta\cos\alpha+\frac{e^2}{2}\sin^2\theta\sin 2\alpha\right)=-eP\sin\theta\cos\alpha-hR'_y;$$

$$-M\omega_0^2 e\cos\theta\left(\frac{h}{2}+e\sin\theta\sin\alpha\right)=eP\cos\theta+hR'_x.$$

Se lasă pe seama cititorilor rezolvarea sistemului (6), din care rezultă componentele reacțiunilor.

Un caz particular interesant este acela în care discul este orizontal, $\alpha=0$. Nu se particularizează problema prin nimic luînd $\theta=0$. Ecuațiile (6) devin:

$$-M\omega_0^2 e=R_x+R'_x,\ O=R_y+R'_y,\ O=R_z-P; \quad (7)$$

$$O=-hR'_y;\quad -M\omega_0^2\frac{h}{2}=eP+hR'_x.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (7) se obține:

$$R'_x=-\frac{1}{2}M\omega_0^2 e-\frac{e}{h}P;\quad R'_y=0; \quad (8)$$

$$R_x=\frac{1}{2}M\omega_0^2 e+\frac{e}{h}P;$$

$$R_y=0;\quad R_z=P.$$

28.8. O placă dreptunghiulară $ABCD$ cu laturile a și b, de greutate P, se rotește în jurul unei axe verticale AB cu viteza unghiulară inițială ω_0. Fiecare element al plăcii suportă, cu această ocazie, rezistența aerului, a cărui direcție este perpendiculară pe planul plăcii, mărimea ei fiind direct proporțională cu aria elementului și cu pătratul vitezei sale. Factorul de proporționalitate este k.

Să se studieze mișcarea plăcii și să se determine reacțiunile din lagăre.

După cît timp se va reduce la jumătate viteza unghiulară a plăcii?

Rezolvare. Forţele efectiv aplicate plăcii sînt greutatea şi rezistenţa aerului. În raport cu axa Oz dau moment diferit de zero numai cea din urmă.

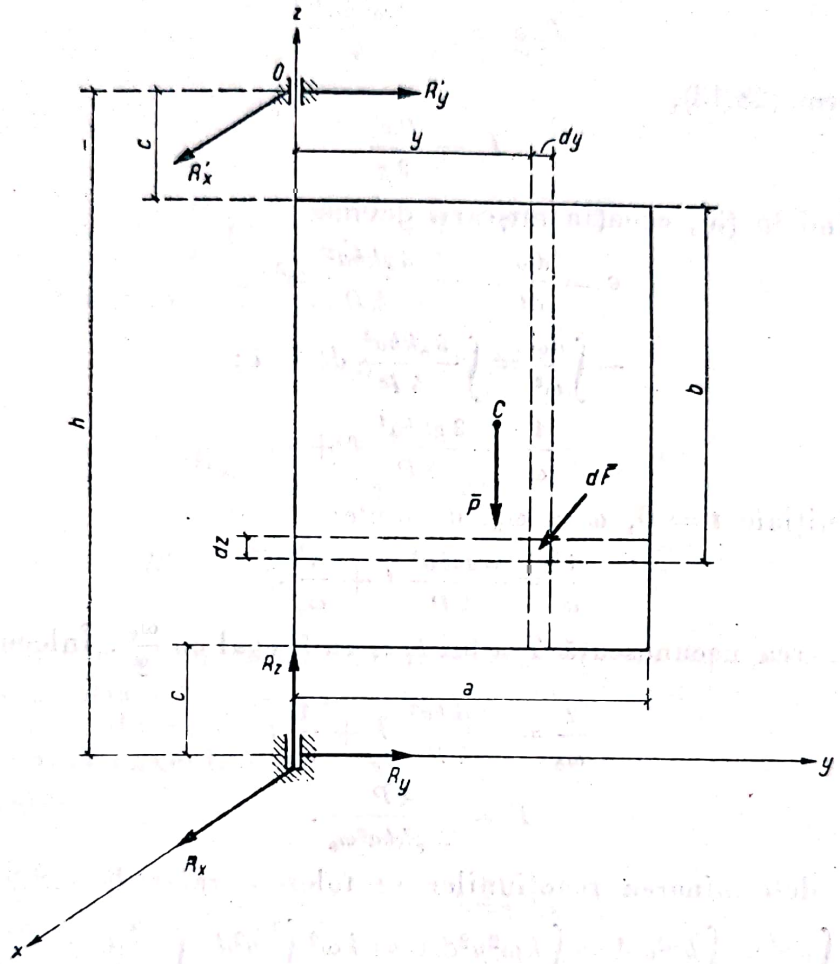


Fig. 28.8

Asupra elementului de suprafaţă din figura 28.8 acţionează o forţă elementară:

$$dF = kv^2 dA, \tag{1}$$

unde:

$$v = \omega y; \tag{2}$$

$$dA = dy\ dz.$$

Momentul forţei dF faţă de Oz este:

$$dM_{oz} = -\ y\ dF = -\ k\omega^2 y^3 dy\ dz.$$

Prin integrare pentru toate elementele de suprafață ale plăcii se obține:

$$M_{oz} = -h\omega^2 \int_0^a y^3 dy \int_c^{c+b} dz = -\frac{k\omega^2 ba^4}{4}.$$

Ecuația diferențială a mișcării va rezulta din (28.10):

$$J_z \varepsilon = -\frac{k\omega^2 ba^4}{4}, \tag{3}$$

unde, conform (28.13),

$$J_z = \frac{Pa^2}{3g}.$$

Înlocuind în (3), ecuația mișcării devine:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3gkba^2}{4P}\omega^2; \tag{4}$$

$$-\int \frac{d\omega}{\omega^2} = \int \frac{3gkba^2}{4P} dt + c;$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{3gkba^2}{4P} t + c,$$

condițiile inițiale $t = 0$, $\omega = \omega_0$, de unde:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{3gkba^2}{4P} t + \frac{1}{\omega_0}. \tag{5}$$

La valoarea necunoscută T a lui t, ω va fi egal cu $\frac{\omega_0}{2}$. Înlocuind:

$$\frac{2}{\omega_0} = \frac{3gkba^2}{4P} T + \frac{1}{\omega_0}; \tag{6}$$

$$T = \frac{4P}{3gkba^2\omega_0}.$$

Pentru determinarea reacțiunilor se folosesc relațiile (28.9), în care:

$$X = \int dF = \int kv^2 dA = \int k\omega^2 y^2 dA = k\omega^2 \int_0^a y^2 dy \int_c^{c+b} dz = \frac{k\omega^2 ba^2}{3};$$

$$Y = 0, \quad Z = -P, \quad M_{ox} = -\frac{Pa}{2};$$

$$M_{oy} = \int z\, dF = \int zkv^2 dA = \int k\omega^2 y^2 z dA =$$

$$= k\omega^2 \int_0^a y^2 dy \int_c^{c+b} z dz = \frac{k\omega^2 a^3 (b^2 + 2bc)}{6} = \frac{k\omega^2 a^3 bh}{6};$$

$$\xi = O; \quad \eta = \frac{a}{2};$$

$I_{xz} = \iint xz\, dm = 0$, deoarece $x = 0$ pentru întreaga placă:

$$I_{yz} = \int\int yz\, dm = \int\int yz \frac{P}{gA} dA = \frac{P}{gab} \int_0^a y\, dy \int_c^{c+b} z dz = \frac{Pa^2 (b^2 + 2bc)}{4gab} = \frac{Pah}{4g}.$$

Făcînd înlocuirile și ținînd seamă de (4) se obține:

$$-\frac{P}{g}\left(-\frac{3gkba^2}{4P}\omega^2\right)\frac{a}{2}=\frac{k\omega^2ba^3}{3}+R_x+R'_x;$$

$$-\frac{P}{g}\omega^2\frac{a}{2}=R_y+R'_y;$$

$$O=-P+R_z; \qquad (7)$$

$$\frac{Pah}{4g}\omega^2=-\frac{Pa}{2}-hR'_y;$$

$$-\frac{Pah}{4g}\left(-\frac{3ghba^2}{4P}\omega^2\right)=\frac{k\omega^2a^3bh}{6}+hR'_x.$$

Rezolvînd sistemul (7) rezultă:

$$R_x=\frac{ka^3b\omega^2}{48}$$

$$R_y=-\frac{Pa\omega^2}{4g}=\frac{Pa}{2h};\quad R_z=P;$$

$$R'_x=\frac{ka^3b\omega^2}{48};\quad R'_y=-\frac{Pa\omega^2}{4g}-\frac{Pa}{2h}.$$

28.9. Un pendul în formă de bară subțire, de lungime l (fig. 28.9), este adus în poziția orizontală și apoi i se dă drumul fără viteză inițială.

Să se afle unghiul α dintre reacțiunea totală a axei fixe de rotație și bară.

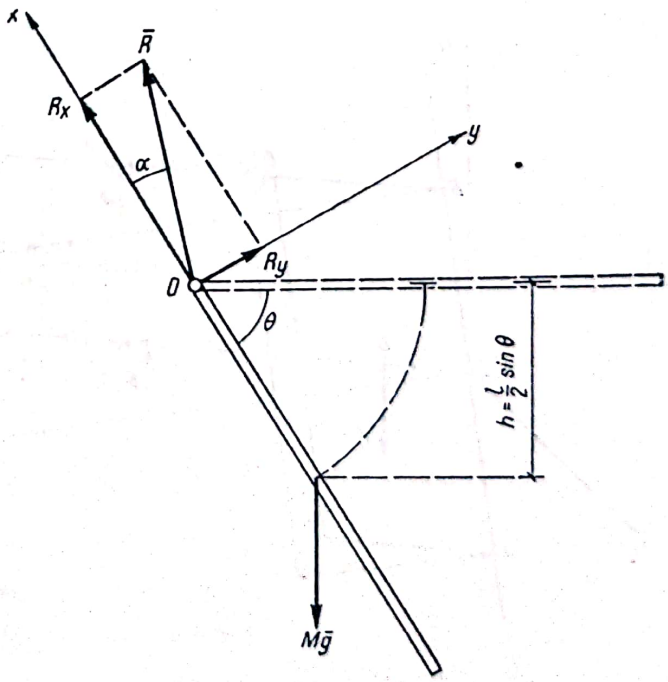


Fig. 28.9

Rezolvare. Pentru determinarea lui ω se pleacă de la teorema energiei (28.3) a cărei formă integrală este:

$$E-E_0=L_{ext}, \qquad (1)$$

deoarece bara fiind rigidă, $L_{int}=0$.

Din (28.7) și (28.4):

$$E=\frac{1}{2}J_z\omega^2=\frac{Ml^2}{6}\omega^2;$$

$$E_0=\frac{Ml^2}{6}\omega_0^2=0;$$

$$L_{ext}=Mgh=4g\frac{l}{2}\sin\theta$$

și înlocuind în (1) rezultă:

$$\frac{Ml}{6}\omega^2 = Mg\frac{l}{2}\sin\theta;$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}\sin\theta. \qquad (2)$$

Derivînd relația (2), cum $\dot{\omega} = \varepsilon$, $\dot{\theta} = \omega$, se obține:

$$2\,\omega\varepsilon = \frac{3g}{l}\cos\theta\,\omega;$$

$$\varepsilon = \frac{3g}{2l}\cos\theta. \qquad (3)$$

Pentru determinarea reacțiunilor se folosește teorema impulsului proiectată pe axele Ox și Oy [primele două ecuații (28.9)], în care $\xi = -\frac{l}{2}$, $\eta = 0$, $R_y = R'_y = 0$

și

$$X = -Mg\sin\theta; \quad Y = -Mg\cos\theta.$$

Ținînd seamă de (2) și (3) se obține:

$$-M\frac{3g}{l}\sin\theta\left(-\frac{l}{2}\right) = -Mg\sin\theta + R_x;$$

$$M\frac{3g}{2l}\cos\theta\left(-\frac{l}{2}\right) = -Mg\cos\theta + R_y,$$

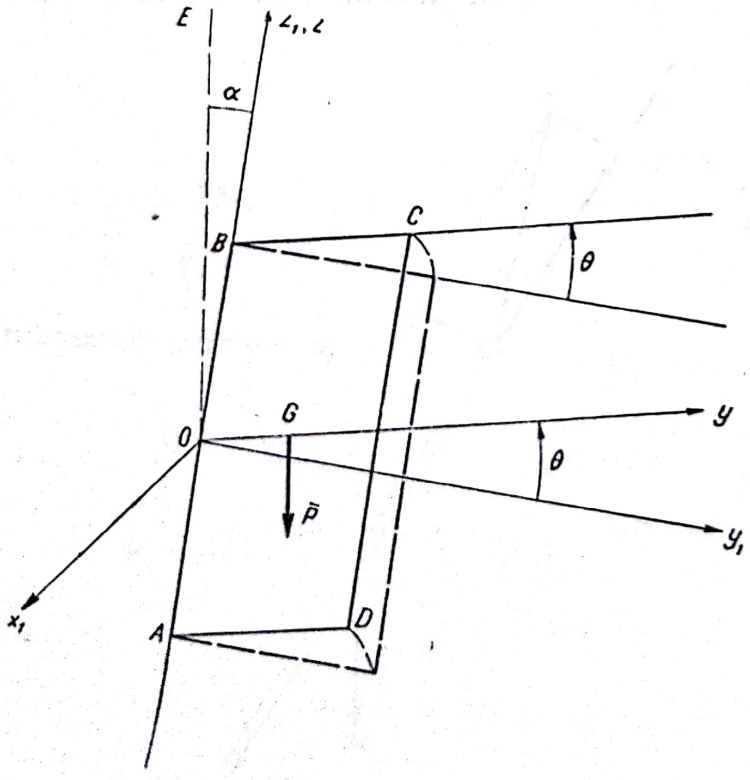


Fig. 28.10

de unde

$$R_x = \frac{5}{2}Mg\sin\theta;$$

$$R_y = \frac{1}{4}Mg\cos\theta$$

și

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1}{10}\operatorname{ctg}\alpha.$$

28.10. O placă subțire omogenă, în formă de dreptunghi $ABCD$, execută oscilații în jurul axei fixe AB care formează cu verticala OE unghiul α. Lățimea plăcii este a (fig. 28.10). Să se determine perioada micilor oscilații.

Aplicație numerică $a = 0{,}5$ m $\alpha = 30°$.

Rezolvare. Se consideră un triedru de referinţă fix, astfel ales, încît axul Oz_1 să coincidă cu axul de rotaţie, şi planul fix y_1Oz_1 să fie vertical (fig. 28.10). Acest plan este cel corespunzător poziţiei de echilibru. Într-o poziţie oarecare, placa (planul yOz) este rotită cu unghiul θ faţă de planul y_1Oz_1; sistemul de referinţă $Oxyz$ fiind invariabil legat de placă. Se va aplica relaţia (28.10), care devine:

$$y_z\ddot{\theta} = M_{oz} \tag{1}$$

Pentru calculul momentului M_{oz} al greutăţii plăcii, se determină vectorul de poziţie al centrului de greutate C:

$$\overline{OC} = \frac{a}{2}\vec{j} = -\frac{a}{2}\sin\theta\,\vec{i}_1 + \frac{a}{2}\cos\theta\,J_1 \tag{2}$$

şi expresia analitică a lui $\bar{G}$:

$$\bar{G} = G\sin\alpha\,\bar{J}_1 - G\cos\alpha\,\bar{k}_1. \tag{3}$$

Conform (3.6):

$$M_{oz} = M_{oz1} = (\overline{OC}\times\bar{G})\,\bar{k}_1 = \begin{vmatrix} -\frac{a}{2}\sin\theta & \frac{a}{2}\cos\theta & 0 \\ 0 & G\sin\alpha & -G\cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{oz} = -\frac{Ga}{2}\sin\alpha\sin\theta. \tag{4}$$

Momentul de inerţie al plăcii (28.13) este:

$$J_z = \frac{Ga^2}{3g}.$$

Înlocuind în (1):

$$\frac{Ga^2}{3g}\ddot{\theta} = -\frac{Ga}{2}\sin\alpha\sin\theta;$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g\sin\alpha}{2a}\sin\theta = 0. \tag{5}$$

Pentru micile oscilaţii, notînd $\frac{3g\sin\alpha}{2a} = \omega^2$,

ecuaţia devine:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

perioada micilor oscilaţii fiind:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g\sin\alpha}}.$$

Făcînd înlocuirile pentru aplicaţia numerică se află: $T = 1{,}6$ s.

Scanned with OKEN Scanner

28.11. Să se determine perioadele micilor oscilații pentru corpurile omogene din figurile 28.11, *a* — *f*.

1) *Bară de lungime a*:

$$l' = \frac{I_a}{Ml} = \frac{\frac{Ma^2}{3}}{M\frac{a}{2}} = \frac{2a}{3};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}.$$

2) *Placă pătrată de latură a*:

a) axa de oscilații *Oz*, perpendiculară în *O* pe planul plăcii:

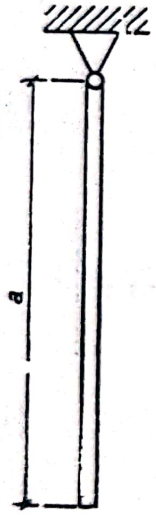


Fig. 28.11,*a*

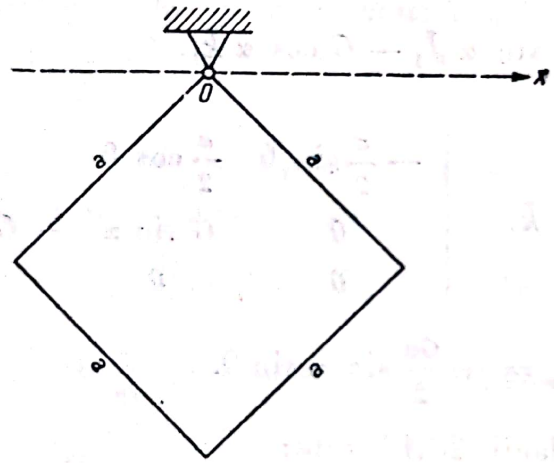


Fig. 28.11, *b*

$$J_z = \frac{2Ma^2}{3};$$

$$l' = \frac{\frac{2Ma^2}{3}}{Ma\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4a}{3\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}};$$

b) axa de oscilație *Ox*, orizontală în planul plăcii:

$$J_x = \frac{Ma^2}{12};$$

$$l' = \frac{\frac{Ma^2}{12}}{Ma\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{6\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{12};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{12g}}.$$

3) *Disc de rază R*:

a) axa de oscilație *Oz*, perpendiculară în *O* pe planul discului

$$J_z = \frac{3MR^2}{2};$$

$$l' = \frac{\frac{3MR^2}{2}}{MR} = \frac{3R}{2};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}};$$

b) axa de oscilație Ox, orizontală în planul plăcii:

$$J_x = \frac{5MR^2}{4};$$

$$l' = \frac{\frac{5}{4}MR^2}{MR} = \frac{5}{4}R;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{4g}}.$$

4) *Placă în formă de triunghi echilateral de latură a*:
a) axa de oscilație Oz, perpendiculară în O pe planul plăcii:

$$J_z = \frac{5Ma^2}{12};$$

$$l' = \frac{\frac{5Ma^2}{12}}{M\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}};$$

$$T = 2\pi\frac{5a}{4\sqrt{3}g};$$

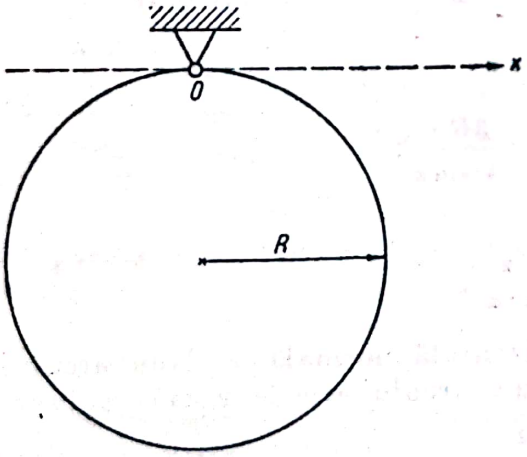


Fig. 28.11, *c*

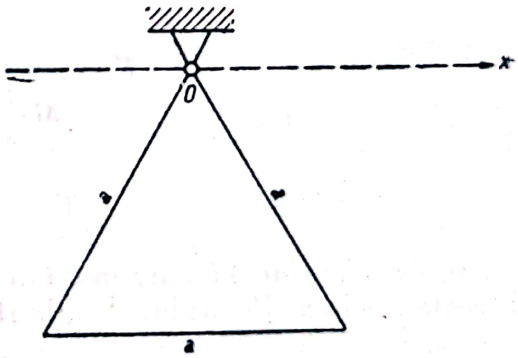


Fig. 28.11, *d*

b) axa de oscilație Ox, orizontală în planul plăcii:

$$J_z = \frac{11Ma^2}{12};$$

$$l' = \frac{\frac{11}{12}Ma^2}{M\frac{2}{3}a\frac{3}{2}} = \frac{11a}{4\sqrt{3}}.$$

$$T = 2\pi\frac{11a}{4\sqrt{3}g}.$$

5) *Sector circular de rază R și unghi de centru d*; axa de oscilație Oz perpendiculară pe planul plăcii:

$$J_z = \gamma \iint r^2 r\, dr\, d\alpha = \gamma \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\alpha \int_0^R r^3 dr = \gamma \frac{R^4}{4} \alpha.$$

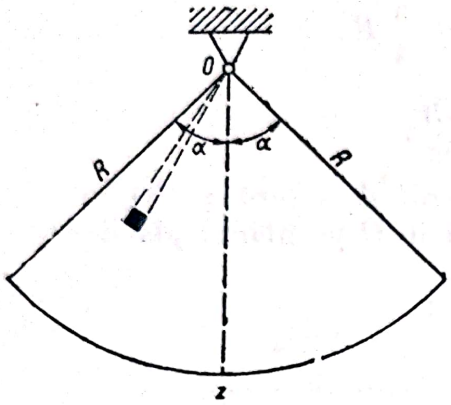


Fig. 28.11, *e*

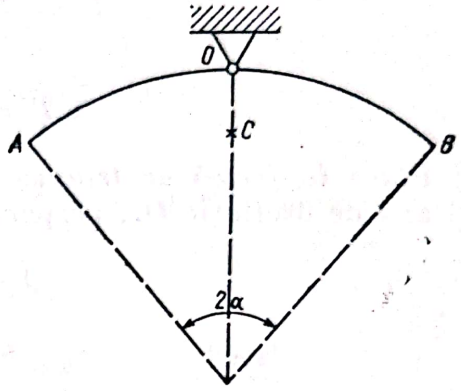


Fig. 28.11, *f*

Ținînd seamă că $M = \gamma R^2 \alpha$ rezultă:

$$J_z = \frac{M}{R^2 \alpha} \cdot \frac{R^4}{2} \alpha = \frac{MR^2}{2}.$$

În continuare se obține:

$$l' = \frac{\frac{MR^2}{2}}{M \frac{2}{3} \overline{R} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{3R\alpha}{4 \cdot \sin \alpha};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R\alpha}{4g \sin \alpha}}.$$

6) *Arc circular AB* suspendat de o axă orizontală, normală pe planul arcului și trecînd prin mijlocul lui. Unghiul la centru al arcului este 2α, raza cercului r:

$$J_{0_1} = Mr^2$$

$$J_c = J_{0_1} - M\overline{OC}^2 = Mr^2 - M \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{\alpha^2};$$

$$J_{0'} = J_c + OC^2 M = Mr^2 - M \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{\alpha^2} + \left(r - \frac{r \sin \alpha}{\alpha}\right)^2 M = 2Mr^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right);$$

$$l' = \frac{2Mr^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)}{M \left(r - \frac{r \sin \alpha}{\alpha}\right)} = 2r;$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

28.12. Un cursor B, de masă m și dimensiuni neglijabile, poate aluneca pe o bară omogenă OA de lungime a și de masă M, care oscilează în jurul capătului O (fig. 28.12).

Să se determine perioada micilor oscilații ale sistemului, în funcție de poziția cursorului pe bară ($OB = x$).

Rezolvare. Lungimea pendulului simplu sincron (28.16) este:

$$l' = \frac{J_z}{(M+m)l}, \qquad (1)$$

unde momentul de inerție al sistemului este, ținînd seamă de (28.14),

$$J_z = \frac{Ma^2}{3} + mx^2, \qquad (2)$$

masa sistemului este $M + m$, și abscisa centrului de masă al sistemului (5.6):

$$l = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M\frac{a}{2} + mx}{M+m}. \qquad (3)$$

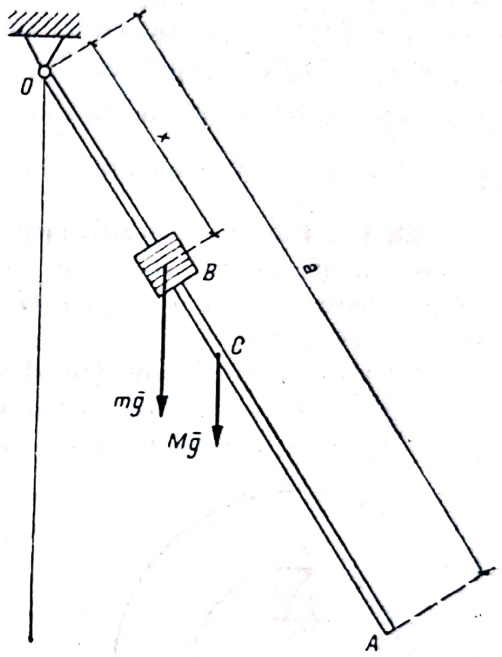


Fig. 28.12

Înlocuind (2) și (3) în (1) rezultă:

$$l' = \frac{\frac{Ma^2}{3} + mx^2}{M\frac{a}{2} + mx} = \frac{2}{3}\cdot\frac{Ma^2 + 3mx^2}{Ma + 2mx}, \qquad (4)$$

deci perioada micilor oscilații (28.17):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3g}\cdot\frac{Ma^2 + 3mx^2}{Ma + 2mx}}.$$

Pentru studiul variației perioadei T ca funcție de distanța x, ajunge să se studieze variația funcției:

$$f(x) = \frac{Ma^2 + 3mx^2}{Ma + 2mx}.$$

Derivata:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2m(3mx^2 + 3Max - Ma^2)}{(Ma + 2mx)^2}$$

este nulă pentru:

$$3mx^2 + 3Max - Ma^2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{Ma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m}{3M}}\right).$$

Cum $O \leqslant x \leqslant a$, doar soluția $x_1 = \frac{Ma}{2m}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4m}{3M}}\right)$ este interesantă. Pentru $x < x_1$, $\frac{df}{dx} < 0$, iar pentru $x > x_1$, $\frac{df}{dx} > 0$, deci valoarea:

$$x_1 = \frac{Ma}{2m}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4m}{3M}}\right)$$

corespunde unui minim al funcției $f(x)$, deci și unui minim al perioadei micilor oscilații $T(x)$. Se poate arăta că acest punct de minim al perioadei există efectiv dacă $x_1 < a$, adică pentru $3m^3 + 3mm^2 - M^3 > 0$. Dacă această inegalitate nu este îndeplinită se obține un rezultat aparent paradoxal, cum $\frac{df}{dx} < 0$ pentru orice $x < a$ cu cît coboară greutatea, pendulul oscilează mai repede.

28.13. Pentru determinarea momentului de inerție al unei roți, ea se suspendă în punctul A și i se imprimă o mișcare oscilatorie (fig. 28.13). Știind că greutatea volantului este G, distanța $OA = l$ și durata unei oscilații — T, să se determine:

a) momentul de inerție al volantului în raport cu axa care trece prin O;

b) distanța AA' de la punctul de suspensie pînă la centrul de oscilație.

Aplicație numerică: $G = 250$ kgf; $l = 0{,}4$ m; $T = 1{,}8$ s.

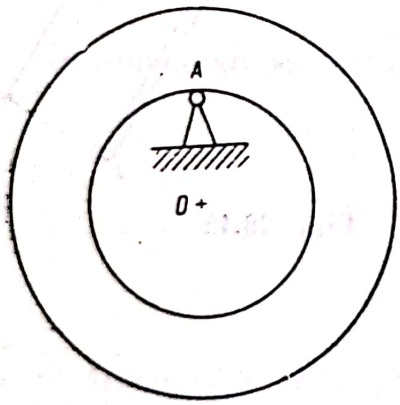


Fig. 28.13

Rezolvare. Din formulele (28.16) și (28.17) rezultă:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ja}{Mgl}};$$

$$J_A = Mgl\,\frac{T^2}{4\pi^2}$$

J_A fiind momentul de inerție în raport cu punctul A. Conform teoremei lui Steiner (26.7):

$$J_A = J_0 + Ml^2,$$

deci

$$J_0 = J_A - Ml^2 = Ml\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l\right) = Gl\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{l}{g}\right).$$

Făcînd înlocuirile numerice, se obține:

$$J_0 = 4{,}14 \text{ kgf.m. s}^2.$$

Distanța dintre axul de rotație și centrul de oscilație este egală cu lungimea pendulului simplu sincron (28.16):

$$l' = \frac{J_A}{Ml} = \frac{Mg\,lT^2}{4\pi^2\,Ml} = \frac{T^2g}{4\pi^2},$$

făcînd înlocuirile rezultă:

$$l' \approx 0{,}81 \text{ m}.$$

28.14. Un pendul matematic, de lungime l este acționat de două resorturi identice, ca în figura 28.14.

Se știe că forța necesară comprimării sau întinderii unui resort este dată de relația:

$$F = k\Delta x,$$

în care k este o constantă a resortului iar Δx, comprimarea, respectiv întinderea.

Dîndu-se: masa punctului material de la capătul barei, constanta resorturilor, precum și dimensiunea din schiță, se cere determinarea perioadei de oscilație, știind că în poziția verticală a barei, resorturile sînt libere (nu exercită nici o forță asupra barei).

Aplicație numerică: $k = 1\ \frac{\text{kgf}}{\text{cm}}$; $a = 10$ cm, $G = 1$ kgf; $l = 1$ m.

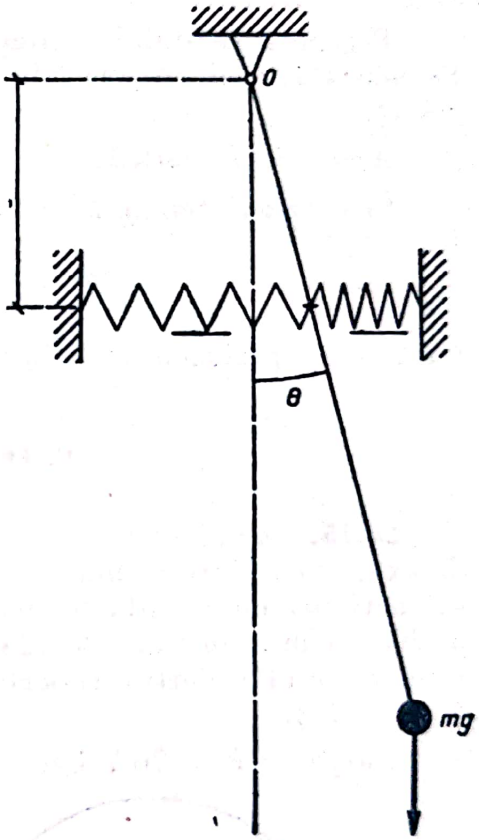


Fig. 28.14

Rezolvare. Asupra barei în poziția din schiță acționează, afară de reacțiunea din articulație și greutate, și forțele resorturilor, ambele în sensul dinspre bară spre poziția de echilibru și de mărime

$$F = ka\ \text{tg}\theta.$$

Pornind de la relația

$$J_z\,\varepsilon = M_z$$

$$M_z = -mgl\sin\theta - 2Fa$$

$$J_z = ml^2$$

și înlocuind, rezultă:

$$-mgl\sin\theta - 2Fa = ml^2\varepsilon.$$

Pentru micile oscilații $\sin\theta \simeq \theta \simeq \text{tg}\,\theta$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \nu^2\theta = 0,$$

unde

$$\nu^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}$$

Perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2ka^2}{mlg}}}.$$

Perioada pendulului simplu se înmulțește cu un coeficient subunitar. Se constată, deci, că perioada obținută este mai mică decît a pendulului fără resort.

Aplicație numerică:

În sistemul tehnic $k = 100 \frac{\text{kgf}}{\text{m}}$; $a = 0{,}1$ m; $G = 1$ kgf; $l = 1$ m

$$T = 2{,}003 \times 0{,}578 = 1{,}16 \text{ s}.$$

Fără resort perioada ar fi fost 2,003 s.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

28.15. Un volant V, avînd momentul de inerție de 1,32 kgf.ms², este prins de axul A cu ajutorul unei pene P. Diametrul axului este de 6 cm. Știind că sub acțiunea unui cuplu de moment constant, volantul atinge turația de regim de 200 rot/min, în timp de 12 s de la pornire, să se afle efortul suportat de pană (fig. 28.15).

Răspuns: $F = 76{,}7$ kgf.

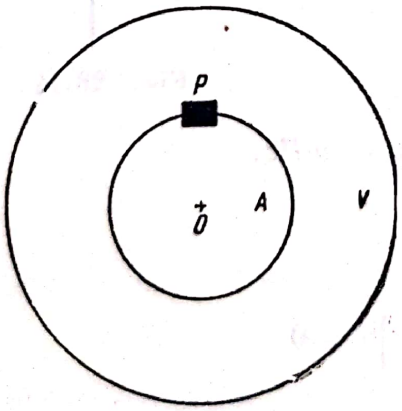


Fig. 28.15

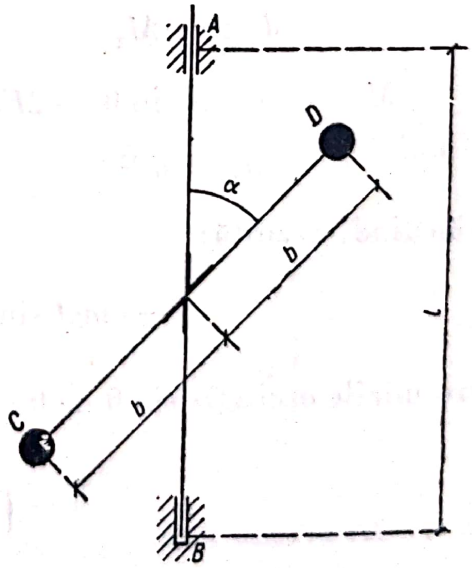


Fig. 28.16

28.16. Rigidul din figura 28.16 se compune din două bare solidare AB și CD de greutăți neglijabile, în capetele C și D găsindu-se sfera de greutate P fiecare.

Știind că sistemul se rotește cu viteza unghiulară constantă ω și utilizînd dimensiunile din desen, să se determine reacțiunile în A și B.

Răspuns. Componentele orizontale ale reacțiunilor sînt $H_A = H_B = \frac{Pb^2\omega^2 \sin 2\alpha}{l}$ și cele verticale, $V_A = 0$, $V_B = 2P$.

28.17. Un disc omogen, de rază r, execută oscilații în jurul unui ax orizontal, perpendicular pe planul discului și trecînd prin punctul C, OC fiind egal cu $\frac{r}{2}$ (fig. 28.17). Să se calculeze perioada micilor oscilații ale discului și poziția centrului oscilațiilor. Aplicație numerică: $r = 15$ cm.

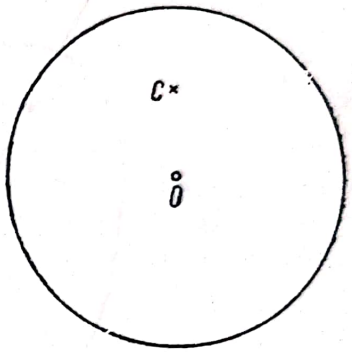


Fig. 28.17

Răspuns: $T \simeq 1$ s, $l' = \frac{3r}{2}$.

28.18. Să se determine legea de oscilație a unui pendul în formă de placă pătrată, de latură a, atîrnat de unul dintre colțuri (C). În momentul inițial, CO formează cu verticala unghiul θ_0 și are viteza inițială nulă. θ_0 este unghi mic, centrul de greutate al pătratului găsindu-se în centrul de simetrie O (placa este omogenă).

Să se determine latura a, astfel ca pendulul să bată secunda ($T = 2$ s).

Răspuns: $\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{2}\frac{g}{a}}\right)t$

$a \simeq 1{,}06$ m.

Capitolul XXIX

SOLIDUL CU UN PUNCT FIX

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Ecuațiile de mișcare ale unui solid cu un punct fix O se deduc proiectînd teorema momentului cinetic:

$$\dot{\bar{K}} = \bar{M}_0 \qquad (29.1)$$

pe axele principale de inerție $Oxyz$, solidar legate de rigid.

Scanned with OKEN Scanner

Ele au expresiile:

$$\begin{aligned} J_x\,\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z &= M_x \\ J_y\,\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x &= M_y \\ J_z\,\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y &= M_z \end{aligned} \tag{29.2}$$

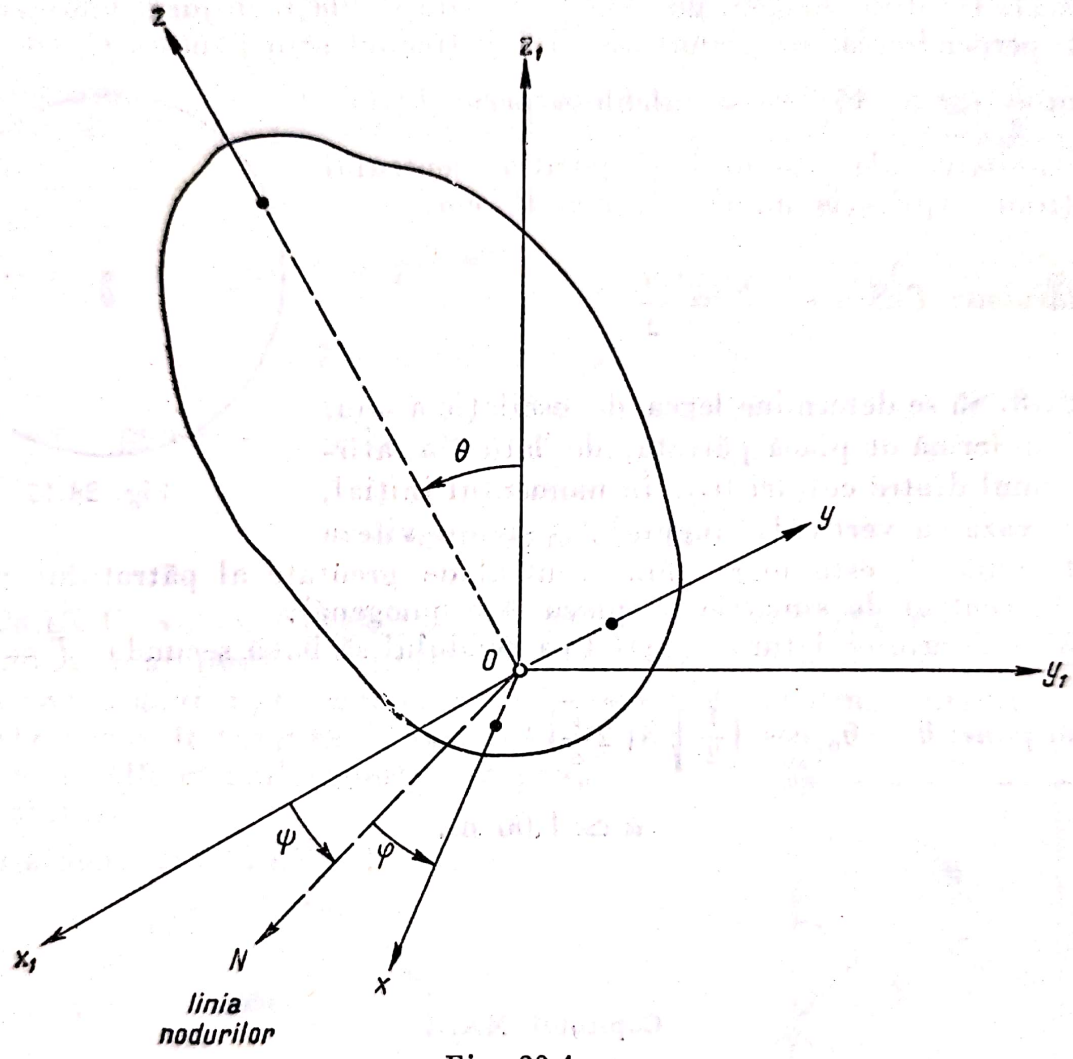


Fig. 29.1, *a*

unde J_x, J_y și J_z sînt momentele principale de inerție ale solidului și M_x, M_y și M_z sînt componentele momentului forțelor efectiv aplicate $\overline{M}_0$ în raport cu aceleași axe. Componentele vitezei unghiulare $\overline{\omega}$ sînt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{29.3}$$

φ, ψ și θ fiind unghiurile lui Euler (fig. 29.1, *a*).

Ecuaţiile (29.1) sînt integrabile independent de condiţiile iniţiale, în următoarele trei cazuri:

1) *Cazul Euler-Poinsot* cînd $\overline{M}_0 = 0$, adică $M_x = M_y = M_z = 0$. În acest caz se pot obţine următoarele integrale principale

$$J_x\omega_x^2 + J_y\omega_x^2 + J_z\omega_z^2 = 2E, \tag{29.4}$$

care exprimă constanta energiei cinetice E, şi

$$J_x^2\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z^2\omega_z^2 = K^2, \tag{29.5}$$

unde K este modulul vectorului moment cinetic:

$$\overline{K} = J_x\omega_x\bar{i} + J_y\omega_y\bar{j} + J_z\omega_z\bar{k} \tag{29.6}$$

şi care exprimă deci constanta modulului acestui vector.

Rezolvînd ecuaţiile (29.4) şi (29.5) în raport cu una dintre componentele lui $\overline{\omega}$, de exemplu ω_z, şi introducînd pe ω_x şi ω_y astfel determinaţi în cea de-a treia ecuaţie a lui Euler $J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y = 0$, se poate exprima printr-o

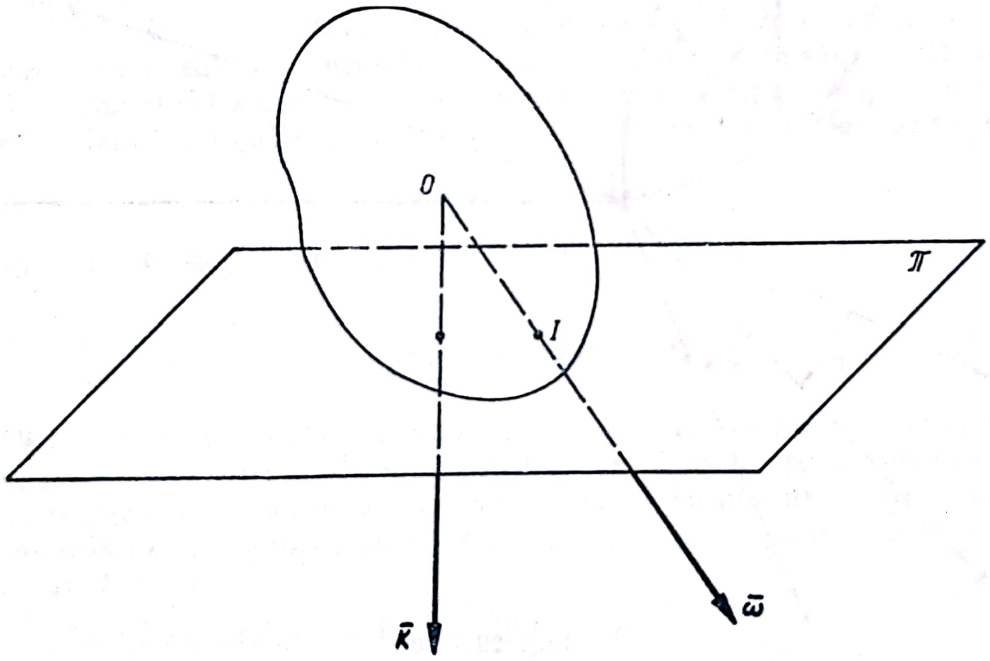


Fig. 29.1, *b*

integrală eliptică timpul t în funcţie de ω_z. Introducînd apoi pe ω_x, ω_y şi ω_z în ecuaţiile (29.3) rezultă $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ şi $\psi = \psi(t)$.

Poinsot a dat o interesantă interpretare geometrică acestui caz: corpul se mişcă astfel, încît elipsoidul de inerţie relativ la punctul O rămîne tot timpul mişcării tangent la un plan fix (π) din spaţiu, normal pe vectorul moment cinetic $\overline{K}$ şi situat la distanţa

$$d = \frac{\sqrt{2E}}{|\overline{K}|} = \text{const.} \tag{29.7}$$

Elipsoidul de inerţie se rostogoleşte fără să alunece pe planul fix (π), punctul de tangenţă I dintre acestea descriind pe planul fix o curbă denumită

Scanned with OKEN Scanner

herpolodie şi pe elipsoidul de inerţie, curba denumită *polodie*. Viteza unghiulară este proporţională cu OI, $\overline{OI} = \lambda\overline{\omega}$, punctul I găsindu-se pe axa instantanee de rotaţie (vezi cap. XV) fig. 29.1, *b*.

2) *Cazul Lagrange-Poisson* este cazul în care solidul este supus numai acţiunii greutăţii proprii $M\bar{g}$ şi $\xi = \eta = \infty$, şi $J_x = J_y$, adică elipsoidul de inerţie, este un elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz (fig. 29.1, *c*).

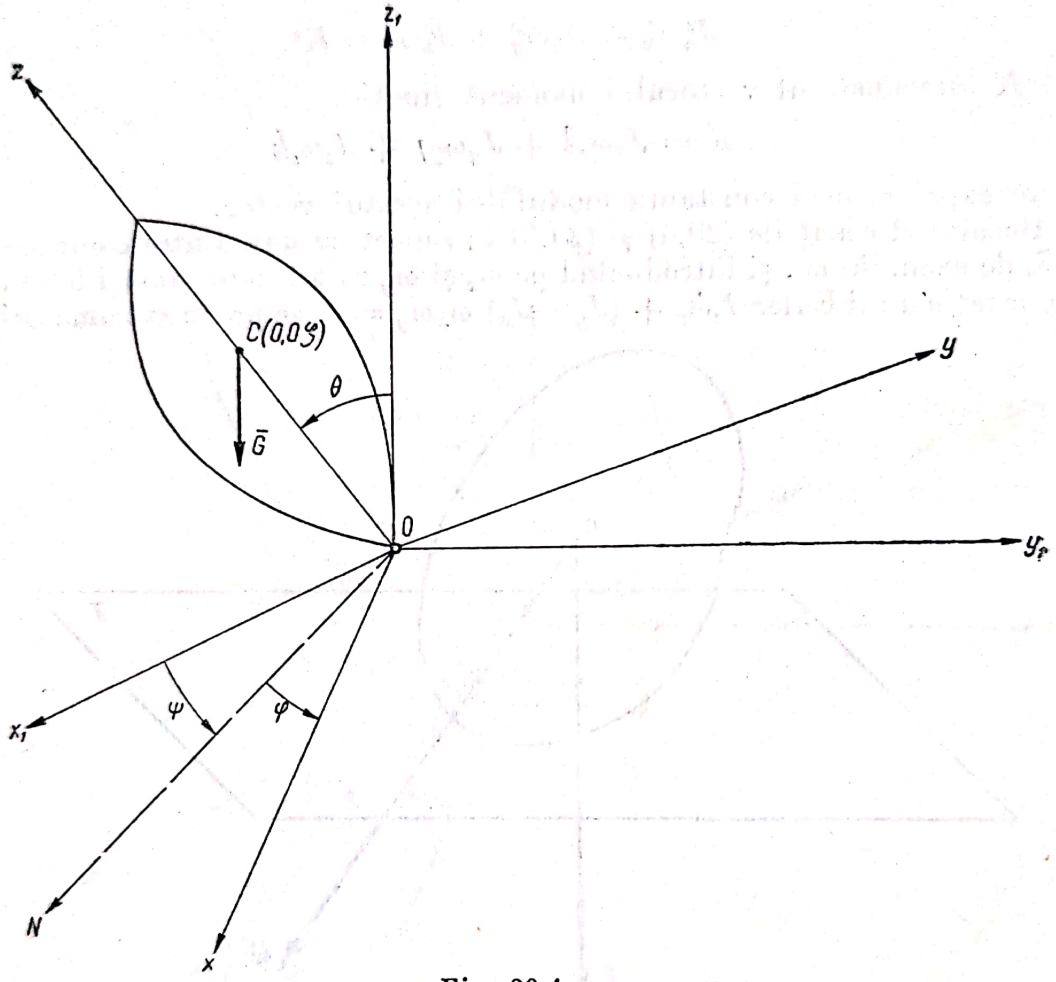


Fig. 29.1, *c*

Momentul forţelor efectiv aplicate $M_0 = Mg\zeta \sin\theta$ are direcţia liniei nodurilor ON, componentele acestuia fiind

$$\begin{aligned} M_x &= Mg\,\zeta \sin\theta \cos\varphi \\ M_y &= -Mg\,\zeta \sin\theta \sin\varphi \\ M_z &= 0. \end{aligned} \tag{29.8}$$

Din a treia ecuaţie a lui Euler se obţine integrala primă:

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const.}, \tag{29.9}$$

şi din integrala energiei se obţine cea de-a doua integrală primă:

$$J_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z\omega_0^2 + 2Mg\zeta\cos\theta = 2h = \text{const.} \qquad (20.10)$$

În cazul mișcării de precesie regulată,

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0 \qquad \psi = \omega_2 t + \psi_0 \qquad \theta = \theta_0 \qquad (29.11)$$

reprezintă o soluție particulară a problemei. Făcînd înlocuirile în ecuațiile (29.2) și ținînd seamă de (29.10), (29.3) și (29.8) rezultă:

$$J_z\omega_1\omega_2 + (J_z - J_x)\,\omega_2^2\cos\theta_0 = Mg\zeta \qquad (29.12)$$

Dacă $\omega_1 \gg \omega_2$, adică viteza unghiulară de rotație proprie este mult mai mare decît viteza de precesie, acesta este cazul unui giroscop și rezultă:

$$\omega_2 = \frac{Mg\,\zeta}{J_z\omega_1}. \qquad (29.13)$$

Axa mișcării de rotație proprie este stabilă, în timpul mișcării giroscopului.

3) *Cazul S. Kovalevskaia* este un al treilea caz de integrabilitate care are asemănare cu cazul Lagrange-Poisson. Este cazul în care elipsoidul de inerție relativ la punctul fix O este un elipsoid de rotație, centrul de greutate C aflîndu-se în planul normal la axa de rotație în punctul fix O. Deci se poate scrie:

$$J_x = J_y \qquad \zeta = 0.$$

În plus, în acest caz, $J_x = J_y = 2J_z$.

B. PROBLEME REZOLVATE

29.1. Un disc circular omogen se rotește, în virtutea inerției, în jurul centrului său de greutate. În momentul inițial discul a primit viteza unghiulară ω_1 în jurul unei axe oarecare, care formează cu planul discului unghiul α. Să se determine viteza unghiulară de precesie și unghiul β dintre axa de precesie și planul discului.

Rezolvare. Ecuațiile lui Euler (29.2) sînt

$$\frac{MR^2}{4}\omega_x + \frac{MR^2}{4}\omega_y\omega_z = 0$$

$$\frac{MR^2}{4}\omega_y - \frac{MR^2}{4}\omega_z\,\omega_x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{MR^2}{2}\omega_z = 0,$$

în care $J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}$ și $J_z = \frac{MR^2}{2}$, M fiind masa discului și R — raza lui.

Din ultima ecuație se deduce:

$$\omega_z = \omega_z^0 \text{ (constant)}. \tag{2}$$

Primele două ecuații, după simplificări și ținînd seamă de (2), devin

$$\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z^0 \omega_x = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z^0 \omega_y = 0.$$

Sistemul de ecuații (3) fiind liniar, se încearcă soluții de forma:

$$\omega_x = C_1 e^{rt};$$

$$\omega_y = C_2 e^{rt}.$$

Pentru determinarea lui r rezultă sistemul omogen:

$$C_2 r - \omega_z^0 C_1 = 0,$$
$$C_2 \omega_z^0 + C_1 r = 0.$$

Ecuația caracteristică, ce se obține prin anularea determinantului sistemului este: $r^2 + (\omega_z^0)^2 = 0$, rădăcinile ei fiind $r = \pm i\omega_z^0$.

Rezultă pentru ω_x o soluție de forma:

$$\omega_x = A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t,$$

și pentru ω_y, ținînd seamă de ecuația a doua din (3), soluția:

$$\omega_y = -\frac{1}{\omega_z^0} \cdot \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{\omega_z^0} (A\omega_z^0 \sin \omega_z^0 t - B\omega_z^0 \cos \omega_z^0 t)$$

sau după simplificare va rezulta:

$$\omega_x = A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t,$$
$$\omega_y = A \sin \omega_z^0 t - B \cos \omega_z^0 t, \tag{4}$$
$$\omega_t = \omega_z^0.$$

Constantele A, B și ω_z^0 se determină prin condițiile inițiale, care sînt:

$$[t = 0 \quad \omega_x = \omega_1 \cos \alpha \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = \omega_1 \sin \alpha. \tag{5}$$

Ținînd seamă de aceste condiții se obține, pentru constante, următoarele valori:

$$\omega_1 \cos \alpha = A \quad 0 = -B \quad \omega_1 \sin \alpha = \omega_z^0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile (4) se scriu:

$$\begin{aligned} \omega_x &= (\omega_1 \cos \alpha) \cos (\omega_1 \sin \alpha)t; \\ \omega_y &= (\omega_1 \cos \alpha) \sin (\omega_1 \sin \alpha)t; \\ \omega_z &= \omega_1 \sin \alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Ținînd seamă de datele problemei, se vor încerca soluții de forma:

$$\begin{aligned} \psi &= \omega_2 t + \psi_0 \\ \theta &= \theta_0 \quad \text{și} \quad \varphi = \omega_3 t + \varphi_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Introducînd aceste soluții în relațiile (29.3) se obține:

$$\begin{aligned} (\omega_1 \cos \alpha) \cdot \cos (\omega_1 \sin \alpha)t &= \omega_2 \sin \theta_0 \sin (\omega_3 t + \varphi_0) \\ (\omega_1 \cos \alpha) \sin (\omega_1 \sin \alpha)t &= \omega_2 \sin \theta_0 \cos (\omega_3 t + \varphi_0) \\ \omega_1 \sin \alpha &= \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Prin identificare se obține:

$$\left.\begin{aligned} \omega_3 &= -\omega_1 \sin \alpha \\ \varphi_0 &= \frac{\pi}{2} \\ \omega_1 \cos \alpha &= \omega_2 \sin \theta_0 \\ \omega_1 \sin \alpha &= \omega_2 \cos \theta_0 + \omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Necunoscutele problemei sînt ω_2 și θ_0. Eliminînd pe ω_3 între prima și ultima ecuație din (9), se obține sistemul:

$$\begin{aligned} \omega_2 \sin \theta_0 &= \omega_1 \cos \alpha, \\ \omega_2 \cos \theta_0 &= 2\omega_1 \sin \alpha, \end{aligned}$$

de unde:

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \omega_1 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$$

și

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Unghiul cerut de problemă este $\beta = 90^\circ - \theta_0$, deci $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

29.2. Un corp de rotaţie cu axa de simetrie Oz se roteşte în jurul unei axe fixe Oz_1 care trece prin centrul de greutate O al corpului. Să se afle presiunile dinamice ale corpului pe lagăre, dacă se cunosc: viteza unghiulară ω a corpului, unghiul θ dintre axele Oz şi Oz_1, momentele de inerţie ale corpului J_z şi J_x, în raport cu axele Oz, respectiv Ox, precum şi distanţa l dintre lagăre.

Rezolvare. Se va nota cu $\bar{R}_1(X_1Y_1Z_1)$ şi $\bar{R}_2(X_2Y_2Z_2)$ reacţiunile din lagărele A şi B.

Ţinînd seamă cu $Iy = Ix$, ecuaţiile lui Euler(29.3) devin:

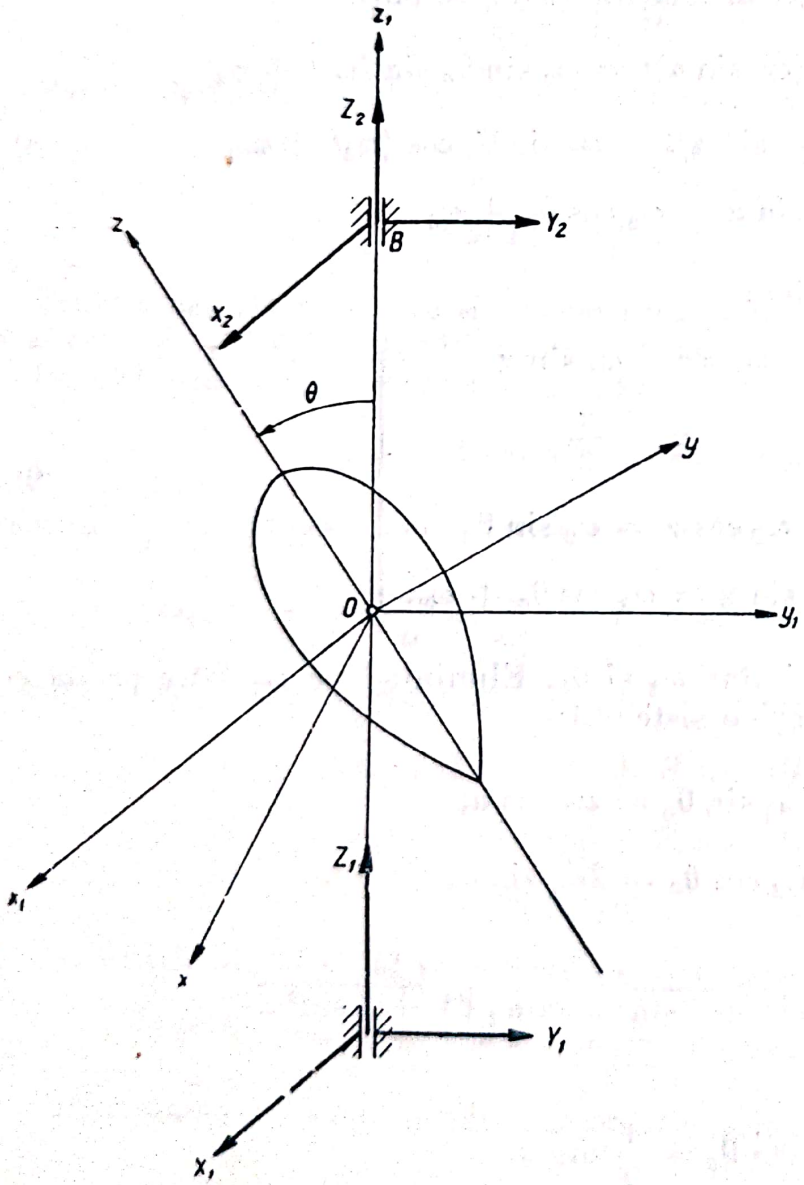


Fig. 29.2

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_x)\,\omega_y\omega_z = \\ = (Y_1 - Y_2)\,\frac{l}{2};$$

$$J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x = \\ = (X_2 - X_1)\,\frac{l}{2}\cos\theta; \qquad (1)$$

$$J_z\omega_z = (X_1 - X_2)\,\frac{l}{2}\sin\theta.$$

Proiecţiile vectorului $\overline{\omega}$ pe axele mobile sînt:

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \omega\sin\theta$$
$$\omega_z = \omega\cos\theta \qquad (2)$$

Din integrala energiei, rezultă $\omega = \text{const.}$ şi deci:

$$\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0. \qquad (3)$$

Ţinînd seamă de (2) şi (3), sistemul de ecuaţii (1) devine:

$$(J_z - J_x)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \\ = (Y_1 - Y_2)\,\frac{l}{2};$$

$$0 = (X_2 - X_1)\,\frac{l}{2}\cos\theta; \qquad (4)$$

$$0 = (X_1 - X_2)\,\frac{l}{2}\sin\theta.$$

Ţinînd seamă şi de ecuaţiile de proiecţii $Y_1 + Y_2 = 0$ şi $X_1 + X_2 = 0$, rezolvarea sistemului (4) duce la rezultatele:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{J_z - J_y}{2l}\,\omega^2 \sin 2\theta \text{ şi } X_1 = X_2 = 0.$$

29.3. Să se arate că, pentru ca un giroscop avînd o mişcare de rotaţie uniformă de viteză unghiulară $\bar{\omega}_1$, în jurul axei de simetrie Oz, să aibă o precesie regulată de viteză unghiulară $\bar{\omega}_2$ în jurul unei axe fixe Oz_1, dîndu-se $\sphericalangle (Oz_1, Oz) = \theta = \text{const.}$, momentul forţelor exterioare în raport cu punctul fix O are expresia:

$$M_0 = J_z\,(\omega_2 \times \omega_1)\left[1 + \frac{J_z - J_x}{J_z} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta\right].$$

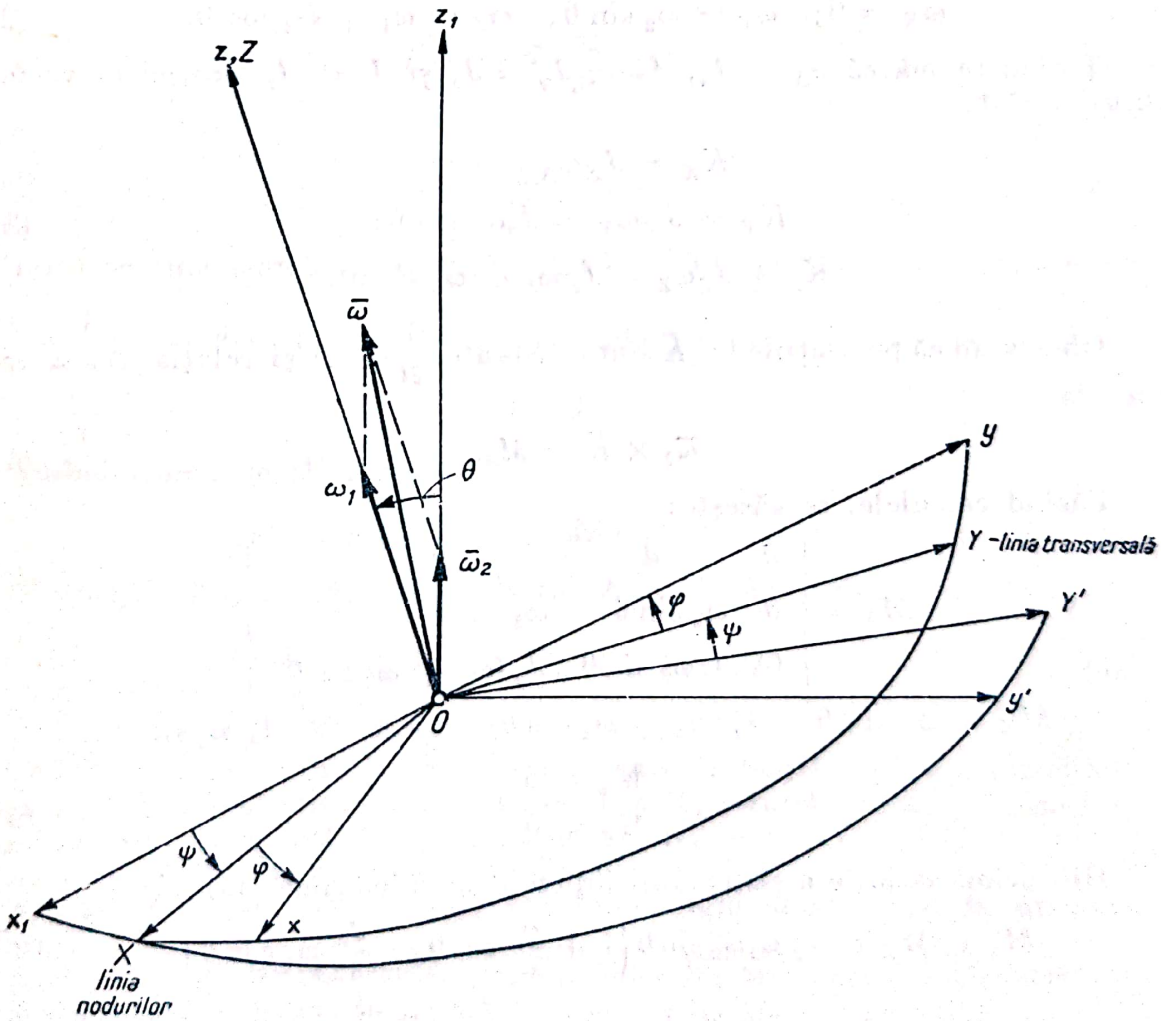


Fig. 29.3

Rezolvare. Pentru rezolvarea problemei vom considera, afară de sistemele de referinţă ştiute, şi anume sistemul fix $Ox_1y_1z_1$ şi sistemul mobil $Oxyz$ solidar legat de corp, un al treilea sistem de referinţă format din:

— linia nodurilor X de versor $\bar{n}$;

— linia transversală Y de versor $\bar{u}$;

— axa Z confundată cu axa Oz de versor $\bar{k}$.

Sistemul de referinţă $Oxyz$ se roteşte faţă de acest sistem $OXYZ$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1(\bar{\omega}_1 = \text{const.}$, dirijat după axa $Oz)$, şi sistemul $OXYZ$ se roteşte în raport cu $Ox_1y_1z_1$ cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2(\bar{\omega}_2 = \text{const.}$, dirijat după axa fixă $Oz_1)$.

Se proiectează teorema momentului cinetic pe axele acestui sistem de referinţă mobil. Formula (29.1) se va scrie:

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{\omega}_2 \times \bar{K} = \bar{M}_0. \tag{1}$$

Din relaţia $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ se deduc proiecţiile vectorului $\bar{\omega}$:

$$\omega_X = 0; \quad \omega_Y = \omega_2 \sin\theta; \quad \omega_Z = \omega_1 + \omega_2 \cos\theta. \tag{2}$$

Ţinînd seamă că $J_X = J_x$, $J_Y = J_y = J_x$ şi $J_Z = J_z$, proiecţiile vectorului K sînt:

$$\begin{aligned} K_X &= J_X\omega_X = 0; \\ K_Y &= J_Y\omega_Y = J_x\omega_2 \sin\theta; \\ K_Z &= J_Z\omega_Z = J_z(\omega_1 + \omega_2 \sin\theta). \end{aligned} \tag{3}$$

Observînd că proiecţiile lui $\bar{K}$ sînt constante $\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} = 0$ şi relaţia (1) se reduce la

$$\bar{\omega}_2 \times \bar{K} = M_0. \tag{4}$$

Făcînd calculele, se găseşte:

$$M_0 = \begin{vmatrix} \bar{n} & \bar{u} & \bar{k} \\ 0 & \omega_2 \sin\theta & \omega_2 \cos\theta \\ 0 & J_x\omega_2 \sin\theta & J_z(\omega_1 + \omega_2 \cos\theta) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_X &= \omega_2 \sin\theta \times J_z(\omega_1 + \omega_2 \cos\theta) - \omega_2 \cos\theta \cdot J_x\omega_2 \sin\theta \\ M_Y &= 0 \\ M_Z &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Din prima ecuaţie a sistemului (5), se deduce mărimea lui $\bar{M}_0$:

$$M_0 = M_X = J_z\omega_1\omega_2 \sin\theta \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta - \frac{J_x}{J_z}\omega_2 \cos\theta\right) =$$

$$= J_z\omega_1\omega_2 \sin\theta \cdot \left[1 + \frac{J_z - J_x}{J_z} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]. \tag{6}$$

Sistemul (5) arată că $\overline{M}_0$ are direcția liniei nodurilor și ținînd seamă că în relația (6) $\omega_1\omega_2 \sin\theta = |\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1|$, rezultă că această expresie se poate scrie sub forma vectorială:

$$\overline{M}_0 = J_z(\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1)\left[1 + \frac{J_z - J_x}{J_z}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right].$$

29.4. Să se demonstreze că în cazul cînd momentul cinetic al unui corp rigid, care se rotește în jurul unui punct fix, este mereu perpendicular pe accelerația unghiulară instantanee a corpului, energia cinetică a lui este constantă.

Rezolvare. Se știe că dacă este o funcție scalară de punct $\varphi = \varphi(x,y,z) = \varphi(\bar{r})$, există următoarea relație diferențială:

$$d\varphi = \text{grad}\ \varphi \cdot d\bar{r}.$$

Din datele problemei rezultă:

$$\overline{K}\cdot\bar{\varepsilon} = \overline{K}\cdot\frac{d\overline{\omega}}{dt} = 0$$

sau

$$\overline{K}\cdot d\overline{\omega} = 0. \tag{1}$$

Dacă se ține seamă de relațiile: (29.4), (29.5) și (29.6) se poate scrie:

$$dE = \frac{1}{2}(2J_x\omega_x d\omega_x + 2J_y\omega_y d\omega_y + 2J_z\omega_z d\omega_z) = \text{grad}\ E\cdot d\overline{\omega} = \overline{K}\cdot d\overline{\omega} =$$

$$= \overline{\omega}\cdot d\overline{K}. \tag{2}$$

Ținînd seamă de (1) rezultă:

$$dE = \overline{K}d\omega = 0, \qquad \text{deci } E = \text{const.} \tag{3}$$

Observații. Împărțind cu dt relația $dE = \overline{\omega}\cdot dK = \overline{K}\cdot d\omega$, rezultă:

$$\frac{dE}{dt} = \overline{\omega}\cdot\dot{\overline{K}} = \overline{\omega}\cdot\overline{M}_0 = \overline{K}\cdot\bar{\varepsilon} = dL, \tag{4}$$

unde dL este lucrul mecanic elementar produs de forțele aplicate rigidului pentru o deplasare elementară a acestuia. Din (4) rezultă că energia cinetică a rigidului este constantă în următoarele cazuri:

a) cînd $\overline{K}$ este perpendicular pe $\bar{\varepsilon}$;

b) cînd $\bar{\varepsilon} = 0$, deci $\overline{\omega} = \text{const.}$ (cazul unui rigid cu o axă fixă în mișcare uniformă);

c) cînd $\overline{\omega}$ este perpendicular pe $\overline{M}_0$, unde $\overline{M}_0$ este vectorul moment al forțelor aplicate, calculat în raport cu punctul fix O;

d) cînd $\overline{M}_0 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

29.5. Să se arate că în cazul mișcării unui corp în jurul unui punct fix în virtutea inerției, dreapta după care este îndreptat momentul cinetic al corpului descrie în corp conul:

$$\left(1-\frac{K^2}{2EJ_x}\right)X^2+\left(1-\frac{K^2}{2EJ_y}\right)Y^2+\left(1-\frac{K^2}{2EJ_z}\right)Z^2=0,$$

unde E este energia cinetică a corpului, I_x, I_y și I_z fiind momentele principale de inerție, și K — modulul momentului cinetic.

Rezolvare. Dacă se notează cu (XYZ) coordonatele unui punct de pe dreapta după care este îndreptat vectorul $\vec{K}$ dat de expresia (29.6), ecuația dreptei este:

$$\frac{X}{J_x\omega_x}=\frac{Y}{J_y\omega_y}=\frac{Z}{J_z\omega_z}=\lambda. \tag{1}$$

Rezultă pentru coordonatele punctului expresiile:

$$X=\lambda J_x\omega_x,\quad Y=\lambda J_y\omega_y,\quad Z=\lambda J_z\omega_z \tag{2}$$

Ridicînd la pătrat și adunînd se obține $\lambda=\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{K}$; relațiile (2) devin:

$$\begin{aligned} X&=\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{K}J_x\omega_x;\\ Y&=\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{K}J_y\omega_y;\\ Z&=\frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{K}J_z\omega_z. \end{aligned} \tag{3}$$

Dacă se ridică la pătrat relațiile (3), lăsînd în partea dreaptă respectiv $J_x\omega_x^2$, $J_y\omega_y^2$ și $J_z\omega_z^2$ și se adună, ținînd seamă și de (29.4), se obține:

$$\frac{K^2X^2}{(X^2+Y^2+Z^2)J_x}+\frac{K^2Y^2}{(X^2+Y^2+Z^2)J_y}+\frac{K^2Z^2}{(X^2+Y^2+Z^2)J_z}=2E;$$

continuînd calculele se obține:

$$\frac{K^2X^2}{2EJ_x}+\frac{K^2Y^2}{2EJ_y}+\frac{K^2Z^2}{2EJ_z}=X^2+Y^2+Z^2.$$

Trecînd totul în membrul II se obține expresia cerută:

$$\left(1-\frac{K^2}{2EJ_x}\right)X^2+\left(1-\frac{K^2}{2EJ_y}\right)Y^2+\left(1-\frac{K^2}{2EJ_z}\right)Z^2=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

29.6. Un giroscop greu, simetric, execută o precesie regulată în jurul unei axe verticale Oz_1. Viteza unghiulară a rotației proprii în jurul Oz este foarte mare, în comparație cu viteza unghiulară de precesie. Să se afle o expresie aproximativă pentru forța orizontală de reacțiune în punctul fix O, dacă se cunosc: greutatea P a corpului, distanța z_c de la punctul O pînă la centrul de greutate al corpului, momentul de inerție J_z în raport cu axa Oz, unghiul θ dintre axele Oz_1 și Oz și ω_1.

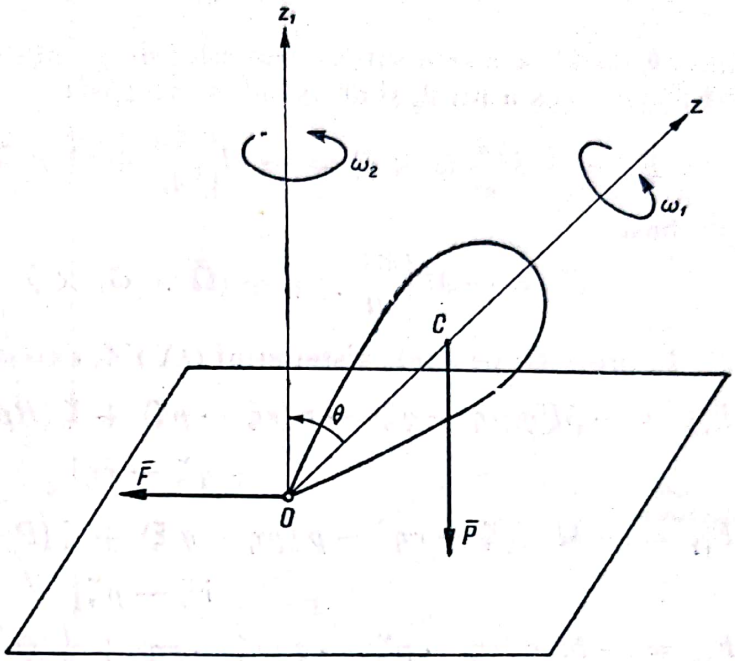


Fig. 29.6

Rezolvare. Aplicînd teorema mișcării centrului de greutate și observînd că mișcarea sa este — cu aproximațiile problemei — circulară și uniformă, pe un cerc de rază $r = z_c \sin\theta$, rezultă

$$Mz_c \sin\theta\ \omega_2^2 = F. \quad (1)$$

Teorema momentului cinetic $\dot{\bar{K}} = \bar{M}_0$ arată că viteza vîrfului vectorului $\bar{K}$ este egală cu momentul forțelor exterioare în raport cu punctul fix O. Observînd că vîrful lui $\bar{K}$ se rotește pe un cerc cu raza $J_z\omega \sin\theta$, cu viteza unghiulară ω_2, va rezulta:

$$J_z\omega \sin\theta \cdot \omega_2 = P.z_c \sin\theta. \quad (2)$$

Eliminînd pe ω_2 între relațiile (2) și (1) se obține F:

$$F = \frac{P^3 z_c^3}{J_z^2 g \omega_1^2} \sin\theta.$$

29.7. Să se calculeze torsorul de reducere al forțelor de inerție în mișcarea rigidului în jurul unui punct fix.

Rezolvare. Pentru cazul general, se raportează mișcarea rigidului la un triedru mobil oarecare $OXYZ$ cu originea în punctul fix O, nesolidar cu corpul, avînd versorii axelor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Se va nota cu:

$\bar{\omega} = p\bar{i} + p\bar{j} + r\bar{k}$ — viteza unghiulară instantanee a corpului;
$\bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + Q\bar{k}$ — viteza unghiulară instantanee a triedrului $OXYZ$;
$\bar{\rho} = \xi\bar{i} + \eta\bar{j} + \zeta\bar{k}$ — vectorul de poziție al centrului de greutate al corpului. (1)

a) *Calculul rezultantei forţelor de inerţie* $\bar{F}_i$ (1)

Se ştie că:

$$\bar{F}_i = -\frac{d\bar{h}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M\bar{v}_c),$$

unde $\bar{v}_c = \bar{\omega} \times \bar{\rho}$ este viteza centrului de greutate C. Introducînd în expresia lui $\bar{F}_i$ pe aceea a lui $\bar{v}_c$ şi derivînd, se va găsi:

$$\bar{F}_i = -M\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = -M\left[\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{\omega}\right) \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})\right]$$

sau încă

$$\bar{F}_i = -M\left[\frac{\partial\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} + (\bar{\Omega} \times \bar{\omega}) \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})\right]. \quad (2)$$

În proiecţii pe axele sistemului $OXYZ$, există:

$$\begin{aligned}
F_{iX} &= -M[q(p\eta - q\xi) - r(r\xi - p\zeta) + \zeta(Rp - Pr) - \eta(Pq - Qp) + \\
&\quad + \dot{q}\zeta - \dot{r}\eta] \\
F_{iY} &= -M[r(q\zeta - r\eta) - p(p\eta - q\xi) + \xi(Pq - Qp) - \zeta(Qr - Rq) + \\
&\quad + \dot{r}\xi - \dot{p}\zeta] \qquad (3) \\
F_{iZ} &= -M[p(r\xi - p\zeta) - q(q\zeta - r\eta) + \eta(Qr - Rq) - \xi(Rp - Pr) + \\
&\quad + \dot{p}\eta - \dot{q}\xi].
\end{aligned}$$

b) *Calculul momentului rezultant al forţelor de inerţie* $\bar{M}_i$

Se ştie că :

$$\bar{M}_i = \frac{d\bar{K}}{dt} = -\frac{\partial\bar{k}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{k} \quad (4)$$

sau în proiecţii pe axele $OXYZ$

$$\begin{aligned}
M_{iX} &= -\frac{\partial K_X}{\partial t} - QK_Z + RK_Y \\
M_{iY} &= -\frac{\partial K_Y}{\partial t} - RK_X + PK_Z \\
M_{iZ} &= -\frac{\partial K_Z}{\partial t} - PK_Y + QK_X
\end{aligned}$$

În calculul derivatelor $\frac{\partial K_X}{\partial t}$, $\frac{\partial K_Y}{\partial t}$ şi $\frac{\partial K_Z}{\partial t}$ se va observa că momentul de inerţie variază cu timpul; numai solidarizînd triedul $OXYZ$ cu corpul, ele vor rămîne constante.

Cazuri particulare:

— triedrul $OXYZ$ invariabil legat de rigid: $\bar{\Omega} = \bar{\omega}$;

— triedul $OXYZ$ fix: $\bar{\Omega} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

29.8. Să se calculeze torsorul de reducere al forțelor de inerție al unui solid omogen de revoluție, care se rotește în jurul unui punct fix, în raport cu acest punct fix.

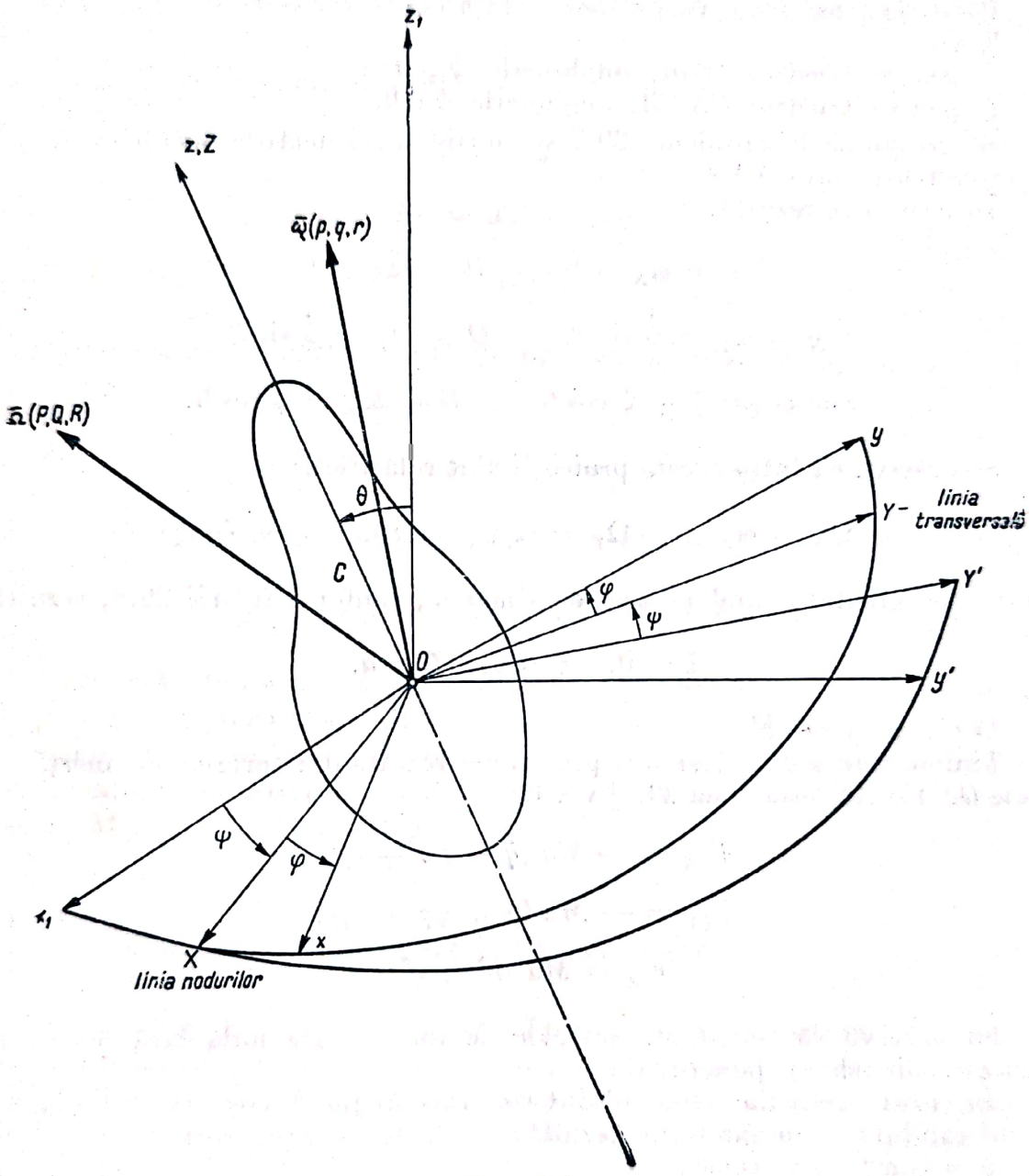


Fig. 29.8

Rezolvare. Se aleg următoarele sisteme de referință:

— $Ox_1y_1z_1$ sistem fix;

— $Oxyz$ sistem mobil invariabil, legat de corp (Oz axa de simetrie a corpului);

— $OXYZ$ sistem mobil atît în raport cu corpul, cît și cu sistemul fix, avînd axa OZ confundată cu axa Oz a sistemului mobil $Oxyz$, celelalte axe fiind linia nodurilor (OX) și linia transversală (OY).

Se va nota cu:
$\bar{\omega}$ viteza unghiulară instantanee a triedrului $Oxyz$;
$\bar{\Omega}$ — viteza unghiulară instantanee a triedrului $OXYZ$.
Poziţiile celor două triedre mobile faţă de cel fix sînt date de unghiurile lui Euler:
— pentru triedrul $Oxyz$, unghiurile ψ,φ,θ;
— pentru triedrul $OXYZ$, unghiurile $\psi,0,\theta$.
Referindu-ne la problema 29.7 se consideră proiecţiile vectorilor $\bar{\omega}$ şi $\bar{\Omega}$ pe axele triedrului $OXYZ$.
În acest caz rezultă:

$$\begin{aligned} p &= \omega_X = \dot{\theta} & P &= \Omega_X = \dot{\theta} \\ q &= \omega_Y = \dot{\psi}\sin\theta & Q &= \Omega_Y = \dot{\psi}\sin\theta \\ r &= \omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta & R &= \Omega_Z = \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Se observă că între aceste proiecţii sînt relaţiile:

$$\Omega_X = \omega_X \qquad \Omega_Y = \omega_Y \qquad \Omega_Z = \omega_Z - \dot{\varphi}, \tag{2}$$

centrul de greutate fiind pe axa de simetrie, conform figurii 29.8, rezultă:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = a. \tag{3}$$

1) *Calculul lui* $\bar{F}_i$
Ţinînd seamă de (2) şi (3), proiecţiile rezultantei forţelor de inerţie pe axele $OXYZ$ [(3) problema 29.7] vor fi:

$$\begin{aligned} F_{iX} &= -Ma\,(\dot{q} - p\dot{\varphi} + rp); \\ F_{iY} &= -Ma\,(p + q\dot{\varphi} + rq); \\ F_{iZ} &= Ma\,(p^2 + q^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Se observă că rezultanta forţelor de inerţie este nulă dacă centrul de greutate coincide cu punctul fix.
În cazul particular cînd solidul s-ar roti în jurul axei sale de simetrie (cazul solidului cu o axă fixă), rezultă:
$\psi = \text{const.}, \theta = \text{const.}$
şi deci $p = q = 0$,
de unde rezultă:

$$F_{iX} = F_{iY} = F_{iZ} = 0.$$

2) *Calculul lui* $\bar{M}_i$ (momentul rezultant al forţelor de inerţie în raport cu punctul fix).
Deoarece solidul este de revoluţie în jurul axei $Oz \equiv OZ$, orice sistem triortogonal de axe, avînd una dintre axe Oz, este un sistem de axe principal

de inerţie pentru rigid. Deci atît sistemul $Oxyz$, cît şi sistemul $OXYZ$ sînt sisteme de axe principale de inerţie.

Oricum s-ar deplasa sistemul $OXYZ$ faţă de corp, J_x, J_y, J_z rămîn constante atît timp cît axa Oz a sistemului coincide mereu cu axa de simetrie a corpului.

Proiecţiile vectorului $\bar{K}$ sînt:

$$K_X = J_x p$$

$$K_Y = J_y q = J_x q$$

$$K_Z = J_z r.$$

Ţinînd seamă de particularităţile problemei, relaţiile (5) din problema 29.7 devin:

$$M_{i_X} = -J_x\dot{p} - qJ_z r + (r - \dot{\varphi})\, J_x q = -J_x\dot{p} + (J_x - J_z)\, qr - J_x q\dot{\varphi}$$

$$M_{i_Y} = -J_x\dot{q} - (r - \dot{\varphi})\, J_x p + pJ_z r = -J_x\dot{q} + (J_z - J_x)\, pr + J_x p\dot{\varphi}$$

$$M_{i_Z} = -J_z\dot{r} - pJ_x q + qJ_x p = -J_z\dot{r}.$$

Se observă, de asemenea, că pentru cazul particular al solidului cu o axă fixă ($p = q = 0$), rezultatele sînt verificate, deoarece rămîne o singură proiecţie a momentului rezultant al forţelor de inerţie, dirijată după axa de simetrie corespunzătoare variaţiei de mărimi a vectorului vitezei unghiulare a rotaţiei proprii: $M_{iZ} = -J_z\dot{r} = -J_z\ddot{\varphi}$.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

Un giroscop, la care $J_x = J_y = 2J_z$, se roteşte în virtutea inerţiei în jurul centrului de greutate, executînd o precesie regulată. Cunoscînd viteza unghiulară ω_1 a rotaţiei proprii a giroscopului şi unghiul dintre axa giroscopului şi axa de precesie $\theta = 60°$, să se afle viteza unghiulară de precesie ω_2.

Răspuns: $\omega_2 = 2\omega_1$.

O turbină, avînd arborele paralel cu axa longitudinală a vaporului, execută 250 rot/min. Greutatea rotorului este de 18 t, raza de inerţie de 1,43 m. Să se determine presiunea giroscopică pe lagăr, distanţa între ele fiind 5,55 m, la întoarcerea vaporului cu viteza unghiulară de 10° pe secundă.

Răspuns: ~ 3 t.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XXX

LUCRU MECANIC. PUTERE, RANDAMENT

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

Lucru mecanic

1) Lucrul mecanic elementar dL, efectuat de o forță $\bar{F}$, aplicată unui punct material A, în intervalul de timp dt, în care vectorul de poziție $\bar{r}$ al punctului A a variat cu $d\bar{r}$, este definit prin produsul scalar (fig. 30, *a*):

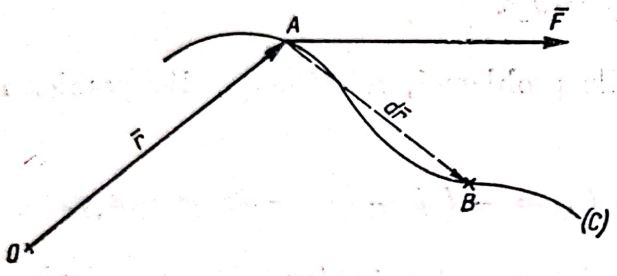


Fig. 30,*a*

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F \cdot dr \cdot \cos\ (\bar{F} \cdot d\bar{r}). \tag{30.1}$$

2) Se observă că dacă se notează cu X, Y, Z proiecțiile forței $\bar{F}$ pe axele de coordonate și cu dx, dy, dz — proiecțiile vectorului $d\bar{r}$, lucrul mecanic elementar mai poate fi exprimat și sub forma analitică:

$$dL = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz. \tag{30.2}$$

3) Se observă că atunci cînd $\sphericalangle(\bar{F} \cdot d\bar{r}) = 0$, adică punctul de aplicație al forței se deplasează pe direcția forței; deoarece valoarea cosinusului este unitatea, rezultă că, în acest caz, lucrul mecanic este egal cu produsul dintre modulele forței și elementului de deplasare:

$$\sphericalangle(\bar{F} \cdot d\bar{r}) < \frac{\pi}{2}.$$

Lucrul mecanic este pozitiv ($dL > 0$) și se numește *lucru mecanic motor*, sau *cheltuit*:

$$\sphericalangle(\bar{F} \cdot d\bar{r}) = \frac{\pi}{2},$$

forța este perpendiculară pe direcția deplasării și lucrul mecanic este nul ($dL = 0$);

$$\sphericalangle(\bar{F} \cdot d\bar{r}) > \frac{\pi}{2}$$

lucrul mecanic este negativ ($dL < 0$) și se numește *lucru mecanic rezistent* sau *util*.

4) În cazul cînd punctul de aplicație al forței execută o deplasare finită, de la A pînă la B, descriind curba C, lucrul mecanic efectuat de forța $\bar{F}$ va fi:

$$L_{AB} = \int_{AB} F \cdot d\bar{r} = \int_{AB} X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz, \tag{30.3}$$

reprezentat prin integrala curbilinie luată de-a lungul traiectoriei C, între limitele A și B.

5) Lucrul mecanic elementar mai poate fi exprimat și sub forma următoare:

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt = \bar{F} \cdot \bar{v} \cdot dt, \tag{30.4}$$

expresie utilă atunci cînd se cunosc $\bar{F}$ și $\bar{v}$ ca funcții de timp.

6) Sînt situații cînd un punct material M este supus unei forțe $\bar{F}$ ale cărei componente X, Y, Z sînt funcții de coordonatele punctului $M(x,y,z)$; în acest caz se spune că punctul M se găsește într-un cîmp de forțe.

Dacă componentele X, Y, Z ale forței $\bar{F}$ sînt respectiv derivatele parțiale ale uneia și aceleiași funcții $U(x,y,z)$, se spune că expresia $U(x,y,z)$ este o funcție de forțe și că forța $\bar{F}$ derivă dintr-o funcție de forțe. În acest caz, lucrul mecanic elementar al forței $\bar{F}$ va fi:

$$dL = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = d\bar{U}, \tag{30.5}$$

și lucrul mecanic fiind efectuat într-o deplasare a punctului de la A pînă la B va fi:

$$L_{AB} = \int_{A}^{B} dU = U_B - U_A, \tag{30.6}$$

unde U_A și U_B sînt valorile funcției de forțe în punctele A și B. Cu alte cuvinte, în astfel de cazuri, expresia lucrului mecanic nu depinde de drumul parcurs.

Se mai notează $V = -U(x,y,z)$, unde V se numește funcția potențială a cîmpului de forțe. În acest caz, lucrul mecanic se mai poate scrie:

$$L_{AB} = V_A - V_B, \tag{30.7}$$

adică este egal cu diferența de potențial dintre potențialul din punctul A și punctul B.

7) Lucrul mecanic al forței de gravitație $\bar{G}$ este egal cu produsul dintre intensitatea forței și diferența de nivel între punctul A de plecare și punctul B de sosire:

$$L_{AB} = G(Z_A - Z_B), \tag{30.8}$$

fiind independent de drumul parcurs.

Scanned with OKEN Scanner

8) Lucrul mecanic al unui cuplu, al cărui moment este $\bar{M}$ și care se rotește cu un unghi elementar $d\theta$, este

$$dL = M \cdot d\theta = M_x \cdot d\theta_x + M_y \cdot d\theta_y + M_z \cdot d\theta_z, \tag{30.9}$$

unde unghiul $d\theta$ se măsoară în radiani.

Este evident că dacă rotația se face în planul cuplului, atunci $dL = m \cdot d\theta$, cei doi vectori fiind paraleli.

9) Se știe din fizică că echivalentul mecanic al caloriei este:

$$1 \text{ kcal} = 427 \text{ kgm}. \tag{30.10}$$

10) Unitățile de măsură pentru lucrul mecanic și ecuațiile de dimensiuni sînt:

Sistemul	Ecuațiile de dimensiuni	Unități fundamentale	Unități practice
CGS	$[L] = [ML^2 \cdot T^{-2}]$	1 din $\times$ 1 cm = 1 erg	
MKS	$[L] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$	1 N $\times$ 1 m = 1 J	1 W·s = 1 J
Tehnic	$[L] = [F \cdot L]$	1 kg $\times$ 1 cm = 1 kgm	1 CP/h = 270 000 kgm.

Putere

11) Se numește puterea forței $\bar{F}$, la timpul t, expresia:

$$P = \frac{dL}{dt}, \tag{30.11}$$

la timpul respectiv. Sau dacă se ține seamă de expresia lucrului mecanic:

$$P = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} = F \cdot v \cdot \cos(\bar{F}, \bar{v}), \tag{30.12}$$

unde v este viteza punctului de aplicație al forței.

12) Expresia analitică a puterii este:

$$P = X \cdot v_x + Y \cdot v_y + Z \cdot v_z, \tag{30.13}$$

cînd: $\sphericalangle(\bar{F}, \bar{v}) < \frac{\pi}{2}$, puterea are semnul pozitiv ($P > 0$) și se numește putere motoare sau putere consumată.

$\sphericalangle(\bar{F}, \bar{v}) = \frac{\pi}{2}$, forța este perpendiculară pe viteză și puterea este nulă ($P = 0$);

$\sphericalangle(F, v) > \frac{\pi}{2}$, puterea are semnul negativ ($P < 0$) și se numește putere utilă.

13) Puterea efectuată de un cuplu va fi:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\overline{M} \cdot d\overline{\theta}}{dt} = \overline{M} \cdot \overline{\omega} = M_x \cdot \omega_x + M_y \cdot \omega_y + M_z \cdot \omega_z, \qquad (30.14)$$

unde M este momentul cuplului şi $\overline{\omega}$ — viteza unghiulară de rotaţie la care este supus cuplul.

Dacă cuplul este rotit chiar în planul său, atunci expresia puterii lui va fi:

$$P = M \cdot \omega. \qquad (30.15)$$

14) Se numeşte putere medie efectuată de forţa $\overline{F}$ în intervalul de timp $(t_B - t_A)$, raportul dintre:

$$\frac{L_{AB}}{t_B - t_A}, \qquad \text{unde } t_B > t_A \qquad (30.16)$$

şi L_{AB} este lucrul mecanic efectuat de forţa $\overline{F}$ cînd îşi deplasează punctul de aplicaţie din A în B, iar $t_B - t_A$ — intervalul de timp în care se face această deplasare.

15) Unităţile de măsură ale puterii şi ecuaţiile de dimensiuni sînt:

Sistemul	Ecuaţiile de dimensiuni	Unităţi fundamentale	Unităţi practice
CGS	$[P] = [ML^2T^{-1}]$	1 erg/s	
MKS	$[P] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]$	1 J/s = 1 W	1 kW = 1 000 W 1 mW = 1 000 kW
Tehnic	$[P] = [F \cdot L \cdot T^{-1}]$	1 km/s	1 CP = 75 kgm/s

Randament

16) Se numeşte randament al unei maşini, raportul dintre lucrul mecanic util produs şi lucrul mecanic motor consumat, sau, ceea ce este tot una, raportul dintre puterea utilă produsă şi puterea motoare consumată:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{P_u}{P_m}. \qquad (30.17)$$

17) Noţiunea de randament se aplică numai în starea de regim a maşinilor, în starea de echilibru dintre forţele motoare şi forţele rezistente.

18) Deoarece în orice mecanisme sînt pierderi provocate de rezistenţe pasive şi frecări, totdeauna $L_u < L_m$, respectiv $P_u < P_m$, deci randamentul va fi totdeauna mai mic decît unitatea. Cu cît randamentul este mai aproape de unitate, cu atît maşina este mai bună.

Scanned with OKEN Scanner

19) Dacă un lucru mecanic motor este transformat într-unul util prin intermediul a mai multe mecanisme, fiecare de randament η_1, η_2, ..., η_p, atunci randamentul total al ansamblului va fi:

$$\eta_{tot} = \frac{L_u}{L_m} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_{n-1},$$

unde n este numărul mecanismelor.

B. PROBLEME REZOLVATE

Lucru mecanic

30.1. Un punct material M se deplasează pe dreapta Δ sub acțiunea unei forțe atractive $\bar{F}$ proporțională cu distanța, cu polul în O și coeficient de proporționalitate K (fig. 30.1). Să se calculeze lucrul mecanic corespunzător deplasării acestui punct între reperele A și B situate pe dreapta Δ.

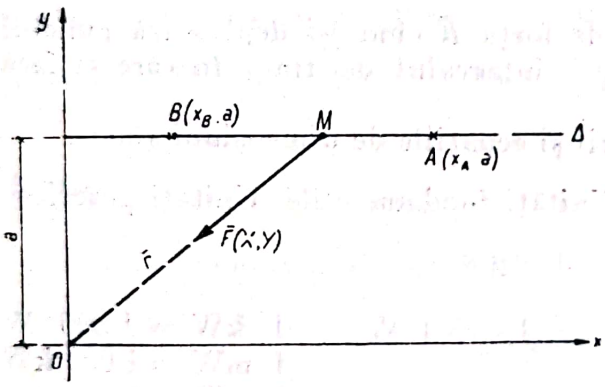


Fig. 30.1

Rezolvare. Fie dreapta Δ și axele alese cu originea în polul O de atracție și $dr \cdot Ox$ paralelă cu dreapta Δ.

Fie a distanța polului atractiv la dreapta Δ și M — punctul atras la un moment dat. Expresia forței atractive este:

$$\bar{F} = -K\bar{r} = -K(x\bar{i} + y\bar{j}),$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție al punctului M. În cazul de față:

$$\bar{F} = -K(x\bar{i} + a\bar{j}),$$

adică proiecțiile forței sînt:

$$X = -Kx \text{ și } Y = -Ka.$$

Vectorul de poziție al punctului M este:

$$\bar{r} = x\bar{i} + a\bar{j}.$$

Expresia lucrului mecanic elementar este (30.1):

$$dL = \bar{F} \cdot d\bar{r} = -K(x\bar{i} + a\bar{j}) \cdot (dx\bar{i}) = -Kx \cdot dx;$$

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -Kx \cdot dx = -K \left| \frac{x^2}{2} \right|_{x_A}^{x_B} = K \frac{x_A^2 - x_B^2}{2}.$$

30.2. Un tub este îndoit în formă de cerc, care are ecuația $x^2 + y^2 = a^2$. O sferă, aflată în tub, se mișcă sub acțiunea unei forțe, care are proiecțiile $X = Ky^2$, $Y = Kxy$, în care K = const. Să se afle lucrul mecanic al acestei forțe pe porțiunea de traiectorie cuprinsă între punctele $A\ (o, a)$ și $B\ (a, o)$ (fig. 30.2).

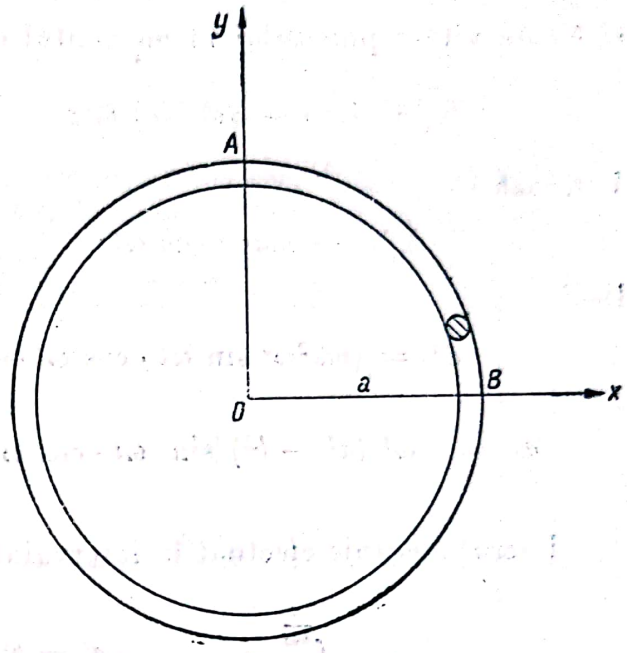


Fig. 30.2

Rezolvare. Expresia lucrului mecanic elementar efectuat de forța $\bar{F}$ este, conform formulei (30.2):

$$dL = X \cdot dx + Y \cdot dy = Ky^2 \cdot dx + Kxy \cdot dy.$$

Lucrul mecanic efectuat pe arcul de cerc AB va fi integrala curbilinie în lungul arcului de cerc a expresiei precedente:

$$L_{AB} = \int_c dL = \int_c Ky^2 \cdot dx + Kx \cdot y \cdot dy,$$

în lungul curbei:

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

deci:

$$y^2 = a^2 - x^2; \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad dy = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Integrala devine:

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} K(a^2 - x^2)\, dx - Kx\sqrt{(a^2 - x^2)}\, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx;$$

$$L_{AB} = K \int_0^a (a^2 - 2x^2)\, dx = \frac{Ka^3}{3}.$$

30.3. Un punct material liber de masă m descrie elipsa $x = a \cdot \cos \omega t$; $y = b \cdot \sin \omega t$. Să se calculeze lucrul mecanic al forței care acționează asupra acestui punct, în intervalul de timp de la $t_0 = 0$ până la $t = \frac{\pi}{4\omega}$.

Rezolvare. Lucrul mecanic elementar va fi calculat cu formula:

$$dL = \bar{F} \cdot \bar{v} \cdot dt = (X \cdot V_x + Y \cdot V_y + Z \cdot V_z)dt, \qquad (30.4)$$

unde $\bar{F}$ este forța care acționează asupra punctului, avînd componentele:

$$X = m\ddot{x} \quad \text{și} \quad Y = m\ddot{y},$$

și $\bar{v}$ este viteza punctului în momentul considerat, avînd componentele:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega \cdot \sin \omega t; \qquad v_y = \dot{y} = b \cdot \omega \cos \omega t.$$

Urmează că:

$$X = -ma\omega^2 \cos \omega t; \qquad Y = -mb\,\omega^2 \sin \omega t.$$

Deci:

$$dL = (ma^2\omega^3 \sin \omega t \cdot \cos \omega t - mb^2\omega^3 \sin \omega t \cdot \cos \omega t)\, dt$$

$$dL = m\omega^3 (a^2 - b^2) \sin \omega t \cdot \cos \omega t\, dt = m\omega^3 \frac{a^2-b^2}{2} \sin 2\omega t \cdot dt.$$

Lucrul mecanic efectuat în intervalul de timp dat va fi:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4\omega}} dL = m\omega^3 \frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^{\pi/4\omega} \sin 2\,\omega t\, dt =$$

$$= -m\omega^3 \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot \frac{1}{2\omega} \Big| \cos 2\,\omega t \Big|^{\frac{\pi}{4\omega}} = -m\omega^2 \frac{a^2 - b^2}{4}.$$

30.4. Ce lucru mecanic se efectuează pentru a ridica paralelipipedul de laturi a,b,c, omogen, de greutate specifică γ, din poziție culcat, cu suprafața bc sprijinită pe planul orizontal, rotindu-l în jurul muchiei sale c (fig. 30.4).

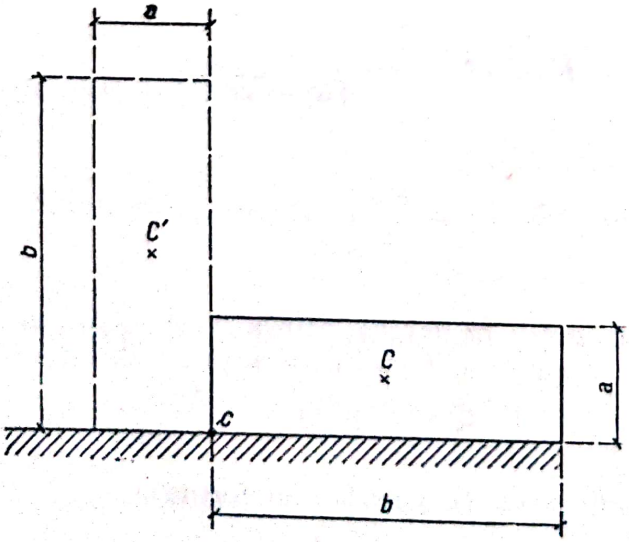


Fig. 30.4

Rezolvare. Greutatea paralelipipedului este $G = \gamma\, abc$ și este aplicată în centrul de greutate c.

Lucrul mecanic efectuat pentru ridicarea paralelipipedului, dat de o forță egală și de sens contrar cu forța de gravitație, va fi conform formulei:

$$L = G\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) = -\gamma \cdot abc\, \frac{b-a}{2},$$

unde $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)$ este diferența de nivel între centrele de greutate în pozițiile inițială și finală.

30.5. Un lucrător transportă $n = 25$ de cărămizi în greutate fiecare $p = 3$ kg, la o înălțime $h = 10$ m. Greutatea proprie a lucrătorului este $G = 65$ kg. Să se determine lucrul mecanic efectuat de el.

Rezolvare.

$$L = (G + p \cdot n)\, h = (65 + 3 \times 25) \times 10 = 1\,400 \text{ kgm}.$$

30.6. Un oblon metalic, omogen, are greutatea specifică $\gamma = 3$ kgf/m² și laturile $a = 3$ m; $h = 2$ m, unde a este lățimea lui și h înălțimea (fig. 30.6). Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a-l ridica complet, dacă ruloul se înfășoară la partea superioară pe un sul subțire? Se neglijează frecările.

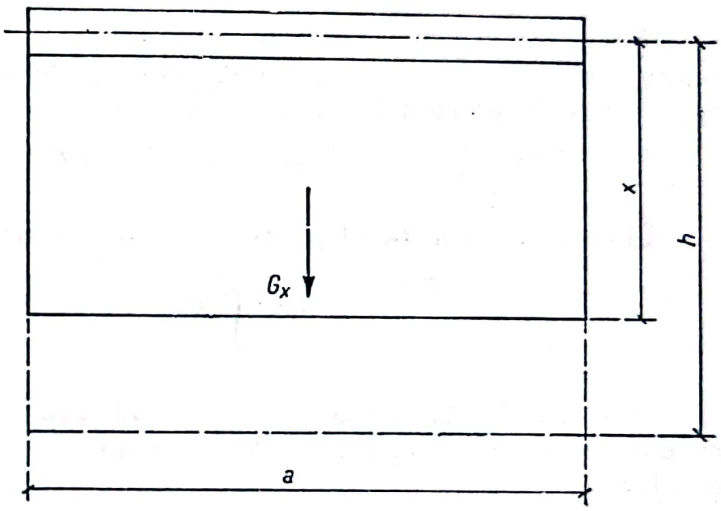


Fig. 30.6

Rezolvare. Se presupune că ruloul s-a înfășurat astfel încît înălțimea oblonului a rămas x. Lucrul mecanic elementar efectuat pentru ridicarea oblonului cu o înălțime dx va fi:

$$dL = G_x \cdot dx,$$

unde G_x este greutatea oblonului neînfășurată:

$$G_x = \gamma \cdot ax,$$

deci:

$$dL = \gamma\, ax\, d\left(\frac{x}{2}\right).$$

Lucrul mecanic total va fi:

$$L = \int_h^0 \gamma \cdot ax \cdot d\left(\frac{x}{2}\right) = -\gamma a \frac{h^2}{2}.$$

Dar $\gamma ah = G$ reprezintă greutatea totală a oblonului; deci:

$$L = -G \cdot \frac{h}{2}.$$

O altă soluție are aplicarea directă a formulei, unde $h/2$ este diferența de nivel între pozițiile extreme ale centrului de greutate al oblonului.

30.7. Două resorturi, de greutate neglijabilă și cu constantele de elasticitate cunoscute K_1 și K_2, sînt legate cap la cap (fig. 30.7). Să se determine lucrul mecanic efectuat pentru a le întinde cu o lungime l.

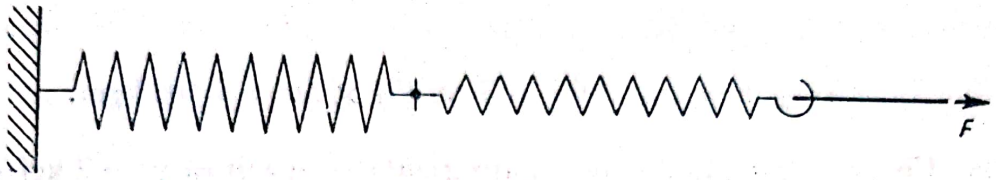


Fig. 30.7

Rezolvare. Fie K constanta resortului echivalent celor două și fie x alungirea lui la un moment dat; efortul dezvoltat va fi: $F = Fx$, iar lucrul mecanic elementar va fi:

$$dL = F \cdot dx = Kx \cdot dx.$$

Lucrul mecanic total pentru a alungi resortul cu l va fi deci:

$$L = \int_0^l Kx \cdot dx = K \frac{l^2}{2}.$$

Pentru a determina constanta K echivalentă a celor două resorturi, dacă se notează cu x_1 și x_2 alungirile fiecărui resort, se constată că pentru efortul F se obține:

$$F = Kx = K_1x_1 = K_2x_2,$$

la echilibru, și alungirea totală a resortului echivalent va fi:

$$x = x_1 + x_2.$$

Din aceste ultime ecuații se deduce:

$$\frac{F}{K} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}$$

sau

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2},$$

deci

$$K = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2}.$$

Urmează că lucrul mecanic total va fi:

$$L = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{l^2}{2}.$$

30.8. Un punct material liber se mișcă pe o orbită eliptică, cu semiaxele a și b, în jurul unui centru care atrage acest punct cu o forță proporțională cu distanța și este situat în centrul elipsei (fig. 30.8). Factorul de proporționalitate este K. Să se afle lucrul mecanic efectuat de forță cînd punctul se deplasează de la $A\,(a,o)$ pînă la $B(a,\,b)$.

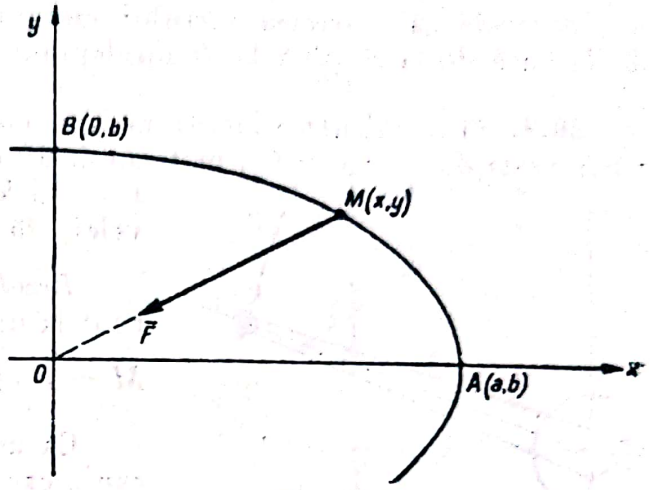


Fig. 30.8

Rezolvare. Forța $\bar{F}$ de atracție are expresia, la un moment dat, cînd punctul M are coordonatele $(x,\,y)$ date de ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$\bar{F}=-K\cdot\overline{OM}=-K\cdot\bar{r}=$$
$$=-K\,(x\bar{i}+y\bar{j}).$$

Cu alte cuvinte, componentele forței $\bar{F}$ pe axele de coordonate sînt:

$$X=-Kx;\qquad Y=-Ky.$$

Se poate arăta că aceste componente sînt derivatele parțiale ale unei funcții de forțe $U(x,\,y)$, adică:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=-Kx;\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=-Ky.$$

În adevăr:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de forța $\bar{F}$ va fi, conform (30.5):

$$dL=dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=-K\,(x\cdot dx+y\cdot dy),$$

deci funcție de forța $U(x,y)$ va fi, integrînd:

$$U=-\frac{K}{2}(x^2+y^2)+C=-\frac{K}{2}r^2+C,$$

unde r este mărimea vectorului de poziție a punctului M.

Lucrul mecanic total efectuat de punctul M cînd se deplasează de la A pînă la B va fi (30.6):

$$L_{AB}=U_B-U_A,$$

unde:

$$U_B=-\frac{K}{2}b^2+C;\qquad U_A=-\frac{K}{2}a^2+C,$$

valoarea funcției de forțe în punctul B respectiv A. Deci:

$$L_{AB} = \frac{K}{2}(a^2 - b^2).$$

Se vede că mărimea lucrului mecanic efectuat de punctul M cînd se deplasează de la A pînă la B nu depinde de forma traiectoriei lui.

30.9. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de un muncitor care rotește o manivelă de braț $l = 0{,}4$ m timp de 10 min, depunînd permanent un efort $F = 15$ kgf perpendicular pe brațul manivelei, făcînd $n = 60$ rot/min (fig. 30.9).

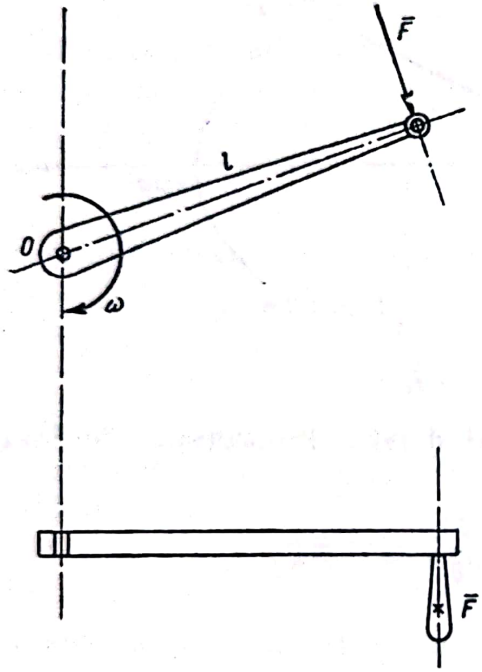


Fig. 30.9

Rezolvare. Manivela este supusă permanent la un cuplu constant:

$$M = F \cdot l = 15 \times 0{,}4 = 6 \text{ kgm}. \qquad (30.9)$$

Ca urmare a formulei (30.9), lucrul mecanic care se efectuează în acest caz este: $L = M \cdot \theta$, unde θ este unghiul măsurat în radiani, cu care s-a rotit manivela. Expresia lui θ este: $\theta = \omega t$, mișcarea fiind o rotație uniformă, unde $\omega = \frac{\pi n}{30} = 2\pi$ rad/s este viteza unghiulară a manivelei. Deci lucrul mecanic efectuat în cele 10 min (600 s) va fi:

$$L = M \cdot \theta = F \cdot l \cdot \omega t = 6 \times 2\pi\, 600 = 7\,200\,\pi = 22\,608 \text{ kgm}.$$

Putere

30.10. Ce rezistență la mișcare întîmpină un vapor a cărui mașină produce $P = 3\,700$ CP și care parcurge uniform $n = 10$ noduri pe oră (1 nod $= 1\,850$ m)?.

Rezolvare. Puterea dezvoltată de mașină (în kgm/s) este:

$$P = 75 \times 3\,700 = n\,277\,500 \text{ km/s}.$$

Viteza vaporului (în m/s) va fi:

$$v = \frac{1\,850 \times 10}{3\,600} = 51{,}39 \text{ m/s}.$$

Vaporul mergînd uniform, toată puterea dezvoltată de motoare este utilizată pentru a învinge rezistența $\bar{F}$ pe care o întîmpină nava la înaintare.

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{277\,500}{51{,}39} = 54\,000 \text{ kg} = 54 \text{ t}.$$

30.11. Să se găsească puterea consumată de frecări în lagărul unui arbore de diametru D (fig. 30.11), care se rotește cu n rotații pe minut, este încărcat normal cu sarcina S și se freacă în cuzinetul său cu un coeficient de frecare f, constant.

Aplicație: $D = 6$ cm; $n = 90$ rot/min; $S = 2$t; $f = 0{,}1$.

Rezolvare. Forța de frecare dezvoltată în paliere este $f \cdot S$ și ea dă un moment față de axul arborelui $fS \cdot \frac{D}{2}$. Puterea consumată de frecări este dată de expresia (30.15):

$$P = M \cdot \omega = f \cdot S \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} = \frac{f \cdot SD\pi n}{60}.$$

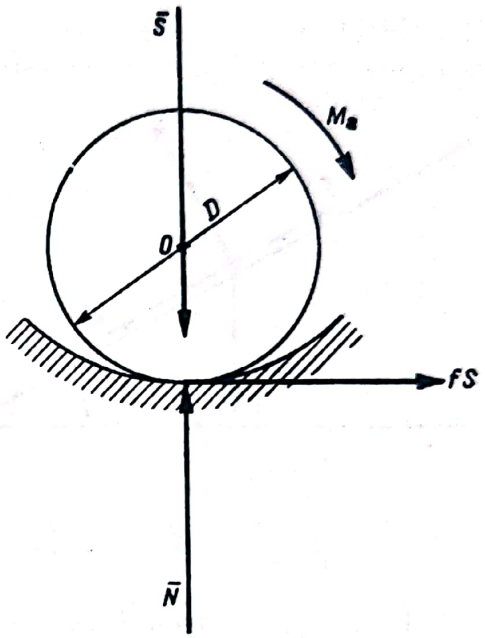


Fig. 30.11

Aplicație:

$$P = \frac{0{,}1 \times 2\,000 \times 0{,}06 \times \pi \times 90}{60} =$$

$$= 56{,}52 \text{ km/s} = 7{,}53 \text{ CP}.$$

30.12. Ce cuplu produce un motor de N (în CP) care se rotește cu n rotații pe minut?

Din formula (30.15) se deduce:

$$75\,N = M\omega = M\frac{\pi n}{30},$$

de unde:

$$M = \frac{30 \times 75}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = 716{,}20\,\frac{N}{n}\,[\text{kgm}].$$

Această formulă este utilă în multe aplicații și dă direct mărimea cuplului, cînd se cunoaște puterea motorului, exprimată în cai-putere și turația lui, în rotații pe minut.

30.13. Un berbec de bătut piloni în greutate $G = 500$ kg trebuie să se ridice de 14 ori pe minut, la înălțimea $h = 1{,}5$ m. De cîți muncitori ar fi nevoie pentru acest lucru, dacă puterea medie a fiecăruia este $N = 7$ kgm/s?

Numărul de muncitori se va calcula din raportul puterii dezvoltate de berbec și puterea capabilă a fiecărui muncitor.

Scanned with OKEN Scanner

Puterea dezvoltată de berbec va fi:

$$P_t = \frac{L}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{500 \times 1{,}5}{\frac{60}{14}} = 175 \text{ kgm/s};$$

$$n = \frac{P_t}{N} = \frac{175}{7} = 25 \text{ muncitori.}$$

30.14. O garnitură de tren de $G = 500$ t poate atinge în palier o viteză maximă de 72 km/h. Care este puterea maximă dezvoltată de locomotivă știind că rezistența la mers este $r = 6$ kg/t. Presupunînd că trenul trebuie să urce o rampă de $10^0/_{00}$, care este viteza maximă pe care o poate atinge pe rampă?

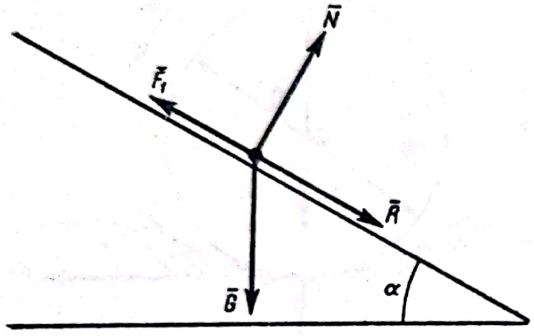


Fig. 30.14

Rezolvare. În palier rezistența totală la înaintare a trenului va fi (fig. 30.14):

$$R = G \cdot r = 500 \times 6 = 3\,000 \text{ kg.}$$

În această situație, toată puterea dezvoltată de locomotivă este necesară pentru a învinge rezistența R, deci:

$$P_{max} = R \cdot v = 3\,000 \times \frac{72}{3{,}6} = 60\,000 \text{ kgm/s} = 800 \text{ CP.}$$

În ipoteza că trenul urcă rampa, puterea maximă a locomotivei va trebui să învingă o nouă rezistență la înaintare F_1, mai mare decît prima, care se calculează din echilibrul pe planul înclinat al unui punct material (prin ipoteză trenul) sub acțiunea forțelor din figura 30.14, considerînd că trenul parcurge rampa uniform. Unghiul rampei se cunoaște, dacă se dă panta, adică:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100}.$$

Rezultă:

$$F_1 = R + G \sin \alpha.$$

Deoarece unghiul este mic se poate considera $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$; deci:

$$F_1 = R + G \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3\,000 + 500\,000 \times \frac{1}{100} = 8\,000 \text{ kg.}$$

Viteza maximă pe care o va primi trenul va fi:

$$v_1 = \frac{P_{max}}{F_1} = \frac{60\,000}{8\,000} = 7{,}5 \text{ m/s} = 27 \text{ km/h.}$$

30.15. Presiunea aburului pe pistonul unei mașini cu abur este $p = 5$ kgf/cm². Diametrul pistonului este $D = 20$ cm, lungimea cursei lui este $S = 40$ cm. Să se determine puterea mașinii, dacă pistonul face $n = 100$ curse pe minut.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Puterea dezvoltată de mașină este dată de expresia $P = \frac{L}{t}$; lucrul mecanic efectuat într-o cursă a pistonului se calculează din produsul dintre forța F dezvoltată de abur pe suprafața pistonului și cursa lui S, timpul t este timpul cît durează o cursă.
Deci:

$$P = \frac{F \cdot S}{t} = \frac{p \cdot \frac{\pi D^2}{4}}{\frac{60}{n}} = \frac{\pi p \cdot D^2 \cdot n \cdot S}{240} \text{ [kgm/s]},$$

unde mărimile se exprimă astfel:

p — în kg/cm²;
D — în cm;
n — în rot/min;
S — în m.

$$P = \frac{\pi \times 5 \times 20^2 \times 100 \times 0{,}4}{240} = 1\,050 \text{ km/s} = \frac{1\,050}{75} = 14 \text{ CP}.$$

30.16. Puterea unei mașini poate fi determinată în felul următor: pe arborele mașinii se așază o șaibă din fontă, care este apoi centrată și fixată cu șuruburi. Peste șaibă se montează saboții unei frîne care se pot strînge în buloane. Unul dintre saboți are o cumpănă, cu un taler pentru greutăți. Contragreutatea P se alege astfel încît dispozitivul de strîngere, așezat liber

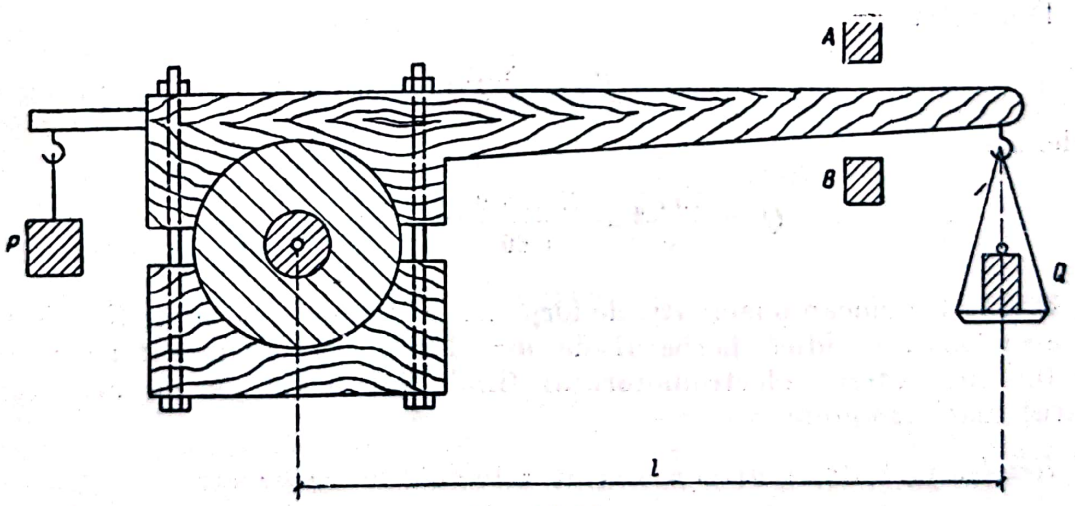


Fig. 30.16

pe arbore, să se afle în echilibru, în poziție orizontală, fără greutăți pe taler, adică astfel încît cumpăna să treacă printre două repere fixe A și B. Proba începe prin strîngerea buloanelor pînă cînd mașina ajunge la numărul de turații cerut. Cumpăna apasă cu această ocazie pe reperul fix A. Se așază apoi pe taler greutăți pînă ce brațul se depărtează de A și ocupă o poziție orizontală între A și B (fig. 30.16).

Să se determine puterea mașinii dacă pe taler se așază greutăți de Q[kgf], lungimea brațului fiind l[m] și arborele mașinii are n turații pe minut.

Rezolvare. Cînd buloanele sînt strînse și mașina funcționează, la periferia șaibei se nasc niște forțe de frecare datorită contactului cu saboții, forțe care dau un cuplu rezistent de moment M; toată puterea dezvoltată de mașină este consumată pentru producerea acestui cuplu rezistent, cînd turația este constantă.

Asupra saboților lucrează un cuplu egal și de semn contrar, echilibrat de cuplul dat de greutatea Q, adică $M = Q \cdot l$.

În această situație, puterea mașinii este dată de expresia:

$$P = M \cdot \omega = Q \cdot l \frac{\pi n}{30} \text{ [kgm/s]} = \frac{Q \cdot l\pi \cdot n}{30 \times 75} = 0{,}0014 \; Q \cdot l \cdot n \text{ [CP]}$$

Randament

30.17. Un motor de putere $N = 4{,}5$ kW este folosit pentru ridicarea unei greutăți Q cu viteza $v = 1$ m/min.

Cunoscînd randamentul $\eta = 0{,}8$ al dispozitivului de ridicare să se determine greutatea maximă Q care poate fi ridicată.

Rezolvare. Puterea motorului este $P_m = 1{,}36\, N = 1{,}36 \times 4{,}5 = 6{,}12$ CP. Puterea utilă a motorului este:

$$P_u = \eta \cdot P_m = 0{,}8 \times 6{,}12 = 4{,}9 \text{ CP.}$$

Din relația:

$$P_u = \frac{Q \cdot v}{75},$$

se deduce:

$$Q = \frac{75\, P_u}{v} = \frac{75 \times 4{,}9}{1/60} = 2\,205 \text{ kg}.$$

30.18. Un ciocan pneumatic de forjă are greutatea berbecului $G = 200$ kg. Un electromotor ridică berbecul de $n = 120$ de ori pe minut pe o cursă $h = 0{,}6$ m. Puterea electromotorului fiind $N = 4$ CP, să se afle randamentul mașinii-unelte.

Rezolvare. Puterea utilă a mașinii este dată de expresia:

$$P_u = \frac{L_u}{t} = \frac{G \cdot h}{t} = \frac{200 \times 0{,}6}{\frac{60}{120}} = 240 \text{ kgm/s} = 3{,}2 \text{ CP.}$$

Randamentul mașinii va fi:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{3{,}2}{4} = 0{,}8.$$

Scanned with OKEN Scanner

30.19. Pe o linie de tramvai circulă $n = 300$ vagoane cu o viteză medie de 15 km/h. Greutatea fiecărui vagon fiind $G = 12$ t, iar rezistența medie totală la rulare pentru fiecare vagon fiind $r = 20$ kgf/t, se cere să se determine puterea motoare a mașinilor din centrala de forță a tramvaielor, dacă rețeaua are un randament $\eta = 0{,}92$.

Rezolvare. Puterea consumată de un tramvai este:

$$p_c = \frac{F \cdot v}{75} = \frac{r \cdot G \cdot v}{75} = \frac{20 \times 12 \times 15/3{,}6}{75} \text{ [CP]}.$$

Puterea consumată de toate tramvaiele:

$$P_c = n \cdot p = \frac{300 \times 20 \times 12 \times 15}{3{,}6 \times 75} = 4\,000 \text{ CP}.$$

Puterea motoare a mașinilor centralei de forță va fi:

$$P_m = \frac{P_c}{\eta} = \frac{4\,000}{0{,}92} = 4\,350 \text{ CP} = 3\,200 \text{ kW}.$$

30.20. O mașină cu abur de putere $N = 40$ CP acționează o pompă, care lucrînd neîntrerupt ridică în $z = 5$ zile o cantitate de apă $Q = 2 \times 10^7$kg la înălțimea $h = 48$ m. Care este randamentul instalației de pompare?

Rezolvare. Puterea utilă consumată în cele 5 zile de pompare va fi:

$$P_u = \frac{Q \cdot h}{24 \times 3\,600 \times z} \text{ [kgm/s]},$$

unde numitorul reprezintă numărul de secunde de funcționare în cele 5 zile:

$$P_u = \frac{2 \times 10^7 \times 48}{24 \times 3\,600 \times 5} = 2\,222{,}2 \text{ kgm/s}.$$

Randamentul instalației va fi:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{2\,222{,}2}{40 \times 75} = 0{,}74.$$

30.21. Un bazin de volum $V = 300$ m^3 conține apă și trebuie golit cu ajutorul unei pompe care are randamentul $\eta = 0{,}8$, acționată de un motor de $N = 2$ CP. Apa trebuie ridicată la înălțimea $h = 2$ m; după cît timp va fi golit bazinul?

Rezolvare.

$$\eta P_m = P_u, \quad \text{unde } P_m = N = 2 \text{ CP și}$$

greutatea utilă:

$$P_u = Q \cdot h = \frac{\gamma V}{t},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\gamma = 1\,000$ kgf/m^3 reprezintă greutatea specifică a apei și t este timpul de golire; deci:

$$\eta\, 75\, N = \frac{\gamma V}{t} \cdot h,$$

de unde:

$$t = \frac{\gamma V \cdot h}{\eta \times 75\, N} = \frac{1\,000 \times 300 \times 2}{0{,}8 \times 75 \times 2} = 5\,000 \text{ s} = 1 \text{ h } 23 \text{ min } 20 \text{ s}.$$

30.22. Un automobil de greutate $G = 1{,}2$ t pornește într-o mișcare rectilinie uniform accelerată. Știind că randamentul transmisiei sale este $\eta = 0{,}6$ se cere să se determine puterea medie a motorului dacă, după ce parcurge o lungime $l = 100$ m, automobilul are viteza $v = 36$ km/h.

Rezolvare. Notînd cu F forța acceleratoare a automobilului, cu t — timpul în care se efectuează mișcarea, puterea utilă medie consumată va fi:

$$P_{m \cdot u} = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot l}{t}.$$

Dar $F = m \cdot a$,
unde m este masa automobilului;
a — accelerația lui.

În același timp, legea de mișcare uniform accelerată a automobilului

$$l = \frac{1}{2}\, at^2 \quad \text{cu } v = at$$

dă:

$$a = \frac{v^2}{2l} \quad \text{și} \quad t = \frac{2l}{v}.$$

Transformînd expresia puterii utile, se obține:

$$P_{m \cdot u} = \frac{m \cdot a \cdot l}{t} = \frac{m\,\dfrac{v^2}{2l}}{\dfrac{2l}{v}} = \frac{m \cdot v^3}{4l}.$$

Puterea motorului automobilului va fi:

$$P_m = \frac{P_{m \cdot u}}{\eta} = \frac{m \cdot v^3}{4l\eta}.$$

Aplicație:

$$P_m = \frac{\dfrac{1\,200}{9{,}81} \cdot \left(\dfrac{36}{3{,}6}\right)^3}{4 \times 100 \times 0{,}6} = 510 \text{ km/s} = 6{,}8 \text{ CP}.$$

30.23. Un motor cu benzină are puterea $N = 60$ CP măsurată la bancul de probă; știind că el consumă $Q = 15$ kg benzină în timp de o oră și că puterea calorică a benzinei este $C = 10\,200$ kcal/kg, se cere să se determine randamentul total al motorului.

Rezolvare. Randamentul motorului va fi:

$$\eta = \frac{L_u}{L_m}.$$

Lucrul mecanic util produs de motor într-o oră este:

$$L_u = 60 \text{ CP/h} = 60 \times 75 \times 3\,600 = 16{,}2 \times 10^6 \text{ kgm}.$$

Lucrul mecanic total consumat este dat de echivalentul mecanic al celor 15 l de benzină consumați într-o oră:

$$L_m = 427 \times Q \cdot C = 427 \times 15 \times 10 \times 200 = 65{,}33 \times 10^6 \text{ kgm}.$$

Deci:

$$\eta = \frac{16{,}2 \times 10^6}{65{,}33 \times 10^6} = 0{,}248$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

30.24. O pompă, lucrînd fără întrerupere, ridică în intervalul de timp de 24 h 3 240 t apă, la înălțimea de 30 m. Puterea mașinii care acționează pompa este de 30 CP. Să se afle randamentul ei.

30.25. Un motor electric are 40 CP și 900 rot/min. Știind că randamentul său este $\eta = 0{,}8$ se cere: energia (în kWh) pe care o absoarbe de la rețea în timp de trei ore și forța periferică pe care o dezvoltă la roată cu diametrul de 300 mm montată pe axul său.

30.26. O turbină este pusă în mișcare printr-o cădere de apă care vine de la distanța de 1,3 km, cu o pantă medie de 2 cm/m. Debitul căderii este de 15 m^3/min și randamentul turbinei este $\eta = 0{,}82$. Turbina acționează un generator electric care are, la rîndul său, randamentul $\eta = 0{,}9$. Se cere:

a) puterea utilă a turbinei (în CP) și a generatorului (în kW);

b) energia (în kWh) furnizată de generator în timp de 40 min.

Capitolul XXXI

MIȘCĂRI IMPULSIVE

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

În cazul mișcărilor impulsive (ciocnirilor) se fac următoarele ipoteze simplificatoare:

a) Ciocnirea este produsă de una sau de mai multe forțe foarte mari, forțele percutante $\overline{\mathcal{F}}$ care acționează un interval de timp foarte scurt (t', t''), timpul cît durează ciocnirea $t'' - t'$ fiind finit însă.

b) În raport cu forţele percutante se neglijează forţele care acţionează în mod curent asupra corpurilor care se ciocnesc (de exemplu, greutatea proprie).

c) În intervalul (t', t'') cît durează ciocnirea se neglijează deplasările corpurilor.

Se numeşte *percuţie* expresia:

$$\bar{\mathcal{P}} = \int_{t'}^{t''} \bar{F}\, dt. \tag{31.1}$$

În cazul mişcărilor impulsive se aplică teoremele generale care elimină percuţiile interioare, şi anume teorema impulsului:

$$\bar{H}'' - \bar{H}' = \sum \bar{\mathcal{P}}_i \tag{31.2}$$

şi teorema momentului cinetic:

$$\bar{K}'' - \bar{K}' = \sum \bar{r}_i \times \bar{\mathcal{P}}_i \tag{31.3}$$

în care $\bar{\mathcal{P}}_i$ sînt percuţiile exterioare sistemului, $\bar{H}'$ şi $\bar{H}''$ impulsul total al sistemului la începutul şi sfîrşitul ciocnirii

$$\bar{H} = \sum m_i \bar{v}_i = M \dot{\bar{\rho}} \tag{31.4}$$

(M — masa întregului sistem, $\dot{\bar{\rho}}$ — viteza centrului maselor sistemului), $\bar{K}'$ şi $\bar{K}''$ reprezentînd momentul cinetic al sistemului la începutul şi sfîrşitul ciocnirii ($\bar{K} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$). Dacă un solid are o mişcare de rotaţie în jurul axei Oz, componentele momentului cinetic sînt:

$$K_x = -J_{xz}\omega \qquad K_y = -J_{yz}\,\omega \qquad K_z = J_z\omega, \tag{31.5}$$

ω fiind viteza unghiulară a solidului, J_{xz}, J_{yz} — momentele de inerţie centrifuge şi J_z — momentul de inerţie al solidului faţă de axa de rotaţie.

Pentru calculul momentului cinetic se poate aplica teorema lui König:

$$\bar{K} = \rho \times M \dot{\bar{\rho}} + \bar{K}_C, \tag{31.6}$$

în care $\bar{\rho} \times M \dot{\bar{\rho}}$ reprezintă momentul cinetic al centrului maselor C (dacă masa întregului sistem ar fi concentrată în C) şi $\bar{K}_C$ este momentul cinetic în mişcarea relativă în jurul centrului maselor.

Spre deosebire de teorema momentului cinetic din cazul mişcărilor obişnuite aplicabilă doar în raport cu puncte fixe sau în raport cu centrul maselor, în cazul mişcărilor impulsive din cauza ipotezei simplificatoare de la punctul *c*, teorema momentului cinetic este aplicabilă în raport cu orice punct al sistemului.

În fenomenele de ciocniri se disting două faze: *a*) prima în care corpurile se turtesc (faza de compresiune), la sfîrşitul căreia punctele în contact au proiecţiile vitezelor, pe normala $\bar{n}$ la suprafeţele în contact, egale; *b*) a doua,

în care corpurile își revin (faza de destindere). Se numește *coeficient de restituire* (coeficient de elasticitate la ciocnire), expresia:

$$k = \frac{\mathfrak{P}_n''}{\mathfrak{P}_n'} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1), \tag{31.7}$$

unde $\mathfrak{P}_n'$ și $\mathfrak{P}_n''$ sînt percuțiile din cele două faze ale ciocnirii proiectate pe normala $\bar{n}$.

Ciocnirea este perfect plastică pentru $k = 0$ și perfect elastică pentru $k = 1$. În cazul a două corpuri, valoarea acestui coeficient este:

$$k = \frac{v_{2n}'' - v_{1n}''}{v_{1n}' - v_{2n}'}, \tag{31.8}$$

adică este egal cu cîtul dintre vitezele relative (proiectate pe normala $\bar{n}$) ale punctelor care se ciocnesc, după, și înainte de ciocnire.

În cazul ciocnirii unui corp avînd o axă fixă Oz, pentru a nu apărea percuții în axă trebuie îndeplinite condițiile

$$J_{xz} = 0 \qquad y_A = \frac{J_z}{M\eta} \qquad z_A = \frac{J_{yz}}{M\eta}, \tag{31.9}$$

percuția $\overline{\mathfrak{P}}$ aplicată corpului în punctul A (x_A, y_A, z_A) fiind totodată normală pe planul yOz determinat de axa de rotație Oz și de centrul maselor C (O,η, ζ). Punctul A se numește *centru de percuție*, distanța de la acest punct pînă la axa de rotație y_A fiind egală cu lungimea pendulului simplu sincron al corpului.

Pierderea de energie cinetică, în cazul ciocnirii centrice a două sfere, este:

$$\Delta E = E' - E'' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1' - v_2')^2 (1 - k^2), \tag{31.10}$$

unde m_1 și m_2 sînt masele sferelor; v_1' și v_2' — vitezele lor înainte de ciocnire și k — coeficientul de restituire.

În cazul sistemelor rigide fără frecări prin introducerea bruscă a unei legături rigide (ciocnire plastică), pierderea de energie se determină cu ajutorul teoremei lui Carnot:

$$E' - E'' = E_p, \tag{31.11}$$

unde $E' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ și $E'' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i''^2$ sînt energiile cinetice ale sistemului înainte și după ciocnire, iar:

$$E_p = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i'' - \bar{v}_i')^2 \tag{31.12}$$

este energia cinetică a vitezelor pierdute $\bar{v}_i'' - \bar{v}_i$. Din teorema lui Carnot se se poate deduce formula

$$E'' = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i' \bar{v}_i''. \tag{31.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME REZOLVATE

31.1. O sferă de masă m_1 ciocnește cu viteza v_1' o sferă de masă m_2 care se găsea în repaus. Știind că după ciocnire prima sferă se oprește, se cere viteza sferei a doua după ciocnire v''_2 și coeficientul de restituire k.

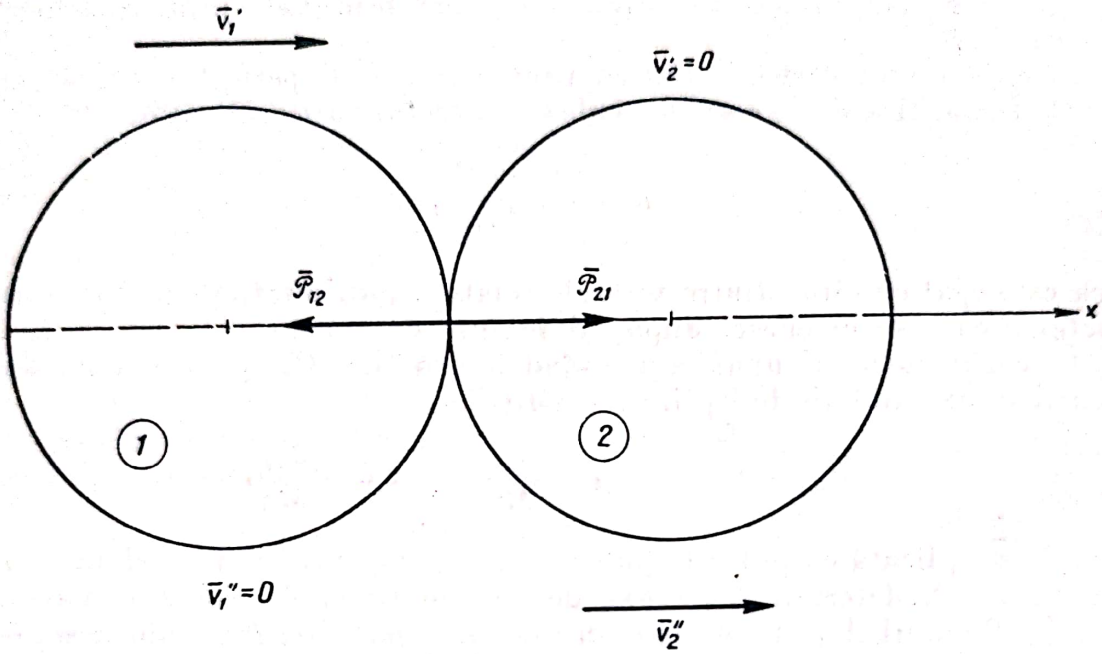


Fig. 31.1

Rezolvare. Singurele percuții fiind cele dintre cele două sfere, interioare față de întregul sistem proiectînd teorema impulsului (31.2) pe axa Ox (fig. 31.1) rezultă:

$$H''_x - H'_x = 0, \tag{1}$$

unde:

$$H'_x = m_1 v_1' + m_2 v_1' = m_1 v_1' \tag{2}$$
$$H''_x = m_1 v_1'' + m_2 v_2'' = m_2 v_2''.$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$v_2'' = \frac{m_1}{m_2} v_1'. \tag{3}$$

Expresia (31.8) a coeficientului de restituire este:

$$k = \frac{v_2'' - v_1''}{v_1' - v_2'} = \frac{v_2''}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Cum $0 \leqslant k \leqslant 1$, pentru ca problema să aibă sens trebuie ca:

$$m_1 \leqslant m_2,$$

deci este imposibil ca un corp mai greu ciocnind un corp mai ușor care stătea în repaus să se oprească în urma ciocnirii.

Scanned with OKEN Scanner

31.2. Ciocanul unei mașini de forjat avînd greutatea $G_1 = 1$ tf lovește cu viteza $v_1' = 45$ cm/s o bucată de metal care cîntărește împreună cu nicovala $G_2 = 14$ tf. Știind că coeficientul de restituire $k = 0{,}5$, să se determine vitezele v_1'' și v_2'' ale ciocanului și nicovalei după ciocnire, și randamentul ciocanului.

Rezolvare. Aplicînd teorema impulsului (31.2) pentru sistemul format din ciocan și nicovală $\sum \bar{\mathcal{R}}_i = 0$ (percuțiile fiind interioare), impulsul se conservă $\bar{H}' = \bar{H}''$ deci:

$$m_1 v_1' = m_1 v_1'' + m_2 v_2'' \tag{1}$$

(viteza nicovalei înainte de ciocnire fiind nulă, $v_2' = 0$). Conform (31.8):

$$k = \frac{v_2'' - v_1''}{v_1'}. \tag{2}$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (1) și (2) rezultă:

$$v_1'' = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_1' = -18 \text{ cm/s} \qquad v_2'' = \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} v_1' = 4{,}5 \text{ cm/s}. \tag{3}$$

Viteza negativă v_1'' a ciocanului arată că el își schimbă, după ciocnire, sensul de mișcare.

În urma ciocnirii o parte din energia cinetică se transformă în energie utilă (de deformare, căldură etc.), expresia ei (31.10) este — ținînd seamă că $v_2' = 0$:

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) v_1'^2. \tag{4}$$

Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire este energia ciocanului:

$$E' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2.$$

Randamentul ciocanului va fi:

$$\eta = \frac{\Delta E}{E'} = \frac{\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2} = \frac{m_2(1-k^2)}{m_1 + m_2} = \frac{G_2(1-k^2)}{G_1 + G_2} =$$

$$= \frac{14\,(1 - 0{,}5^2)}{1 + 14} = 0{,}7.$$

31.3. Bila *1* ciocnește cu viteza v_1' bilele *2*, *3*, ..., *n* aflate în repaus (fig. 31.3). Cunoscînd masele bilelor m_1, m_2, m_3, ..., m_n și coeficienții de

restituire $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ dintre bilele *1—2*, *2—3*, ..., *n-1-n*, să se determine viteza ultimei sfere după ciocnire v_n''. Ciocnirile dintre sfere sînt succesive.

Caz particular: $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n$; $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1} = 1$ (ciocnire perfect elastică).

Rezolvare. Se va examina ciocnirea a două bile (i) și $(i+1)$. Bila i are înainte de ciocnire viteza $\bar{v}_i'$ în urma ciocnirii cu bila precedentă $(i-1)$, bila $(i+1)$ stînd în repaus $\bar{v}_{i+1} = 0$. Neacționînd percuții exterioare sistemului celor două bile, impulsul (31.2) se conservă ($\bar{H}' = \bar{H}''$), deci:

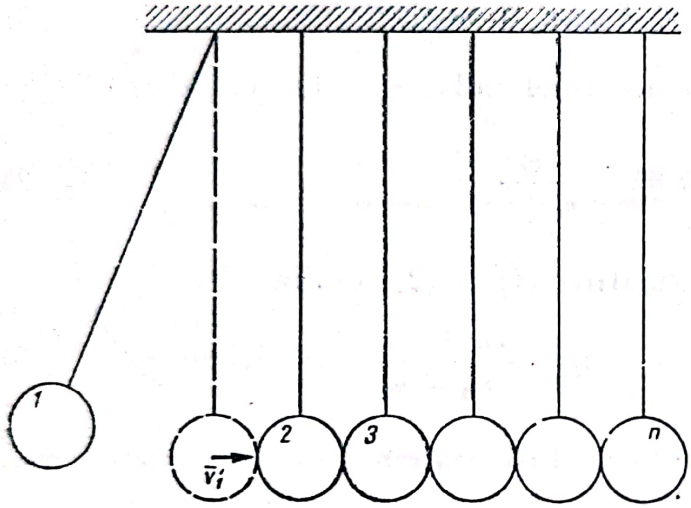


Fig. 31.3

$$m_i v_i' = m_i v_i'' + m_{i+1} v_{i+1}'' \qquad (1)$$

și conform (31.8):

$$k_i = \frac{v_{i+1}'' - v_i''}{v_i'}. \qquad (2)$$

Rezolvînd sistemul (1) și (2) se obține viteza bilei $(i+1)$ după ciocnire:

$$v_{i+1}'' = \frac{m_i(1+k_i)}{m_i + m_{i+1}} v_i' \qquad (3)$$

și viteza bilei (i) după a doua ciocnire:

$$v_i'' = \frac{m_i - k_i m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} v_i'. \qquad (4)$$

În ciocnirea dintre bilele $(i+1)$, $(i+2)$ rolul vitezei v_i' îl va avea v_{i+1}'' determinat de relația (3). Repetînd astfel raționamentele, prin inducție se va obține:

$$v_n'' = \frac{m_{n-1}(1+k_{n-1})}{m_{n-1}+m_n} v_{n-1}' = \frac{m_{n-1}(1+k_{n-1})}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{m_{n-2}(1+k_{n-2})}{m_{n-2}+m_{n-1}} v_{n-2}' = \ldots$$

$$\ldots = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_{n-1}(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_{n-1})}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)\ldots(m_{n-1}+m_n)} v_1'$$

$$v_n'' = v_i' \prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{m_i(1+k_i)}{m_i + m_{i-1}}\right]. \qquad (5)$$

În cazul particular examinat $k_i = 1$; $m_i = m_{i+1}$ rezultă:

$$\frac{m_i(1+k_i)}{m_i + m_{i+1}} = 1;$$

deci:

$$v_n'' = v_1',$$

vitezele sferelor *1*, *2*, ..., n-1 după a doua ciocnire fiind nule: $v_i'' = \frac{m_i - m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} v_i' = 0$. Primele sfere se opresc, și ultima pornește cu viteza sferei *1*. Acestea sînt condițiile experienței lui Mariotte.

31.4. Două sfere de mase $m_1 = m$ și $m_3 = 2m$ ciocnesc simultan, cu aceeași viteză v_0, o sferă de masă $m_2 = 2m$ care se găsea în repaus (fig. 31.4).

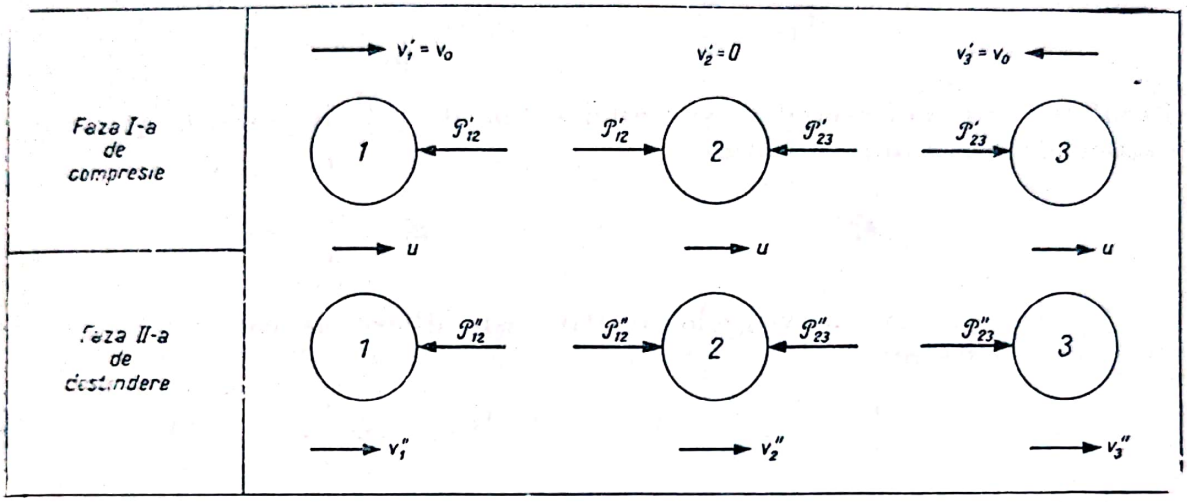


Fig. 31.4

Știind că ciocnirea dintre sferele *1* și *2* este perfect elastică $k_{12} = 1$ și cunoscînd coeficientul de restituire dintre sferele *2* și *3* $k_{23} = \frac{1}{2}$, să se determine vitezele v_1, v_2'' și v_3'' ale celor trei sfere după ciocnire.

Rezolvare. Pentru determinarea acestor viteze nu este permis să se folosească expresia (31.8) a coeficientului de restituire stabilită pentru cazul ciocnirii a două corpuri. O soluție corectă a acestei probleme se poate da pornind de la definiția coeficientului de restituire (31.7) egal cu raportul percuțiilor din faza de destindere și cea de compresiune.

Ciocnirea fiind simultană, sfîrșitul fazei de compresiune pentru sferele *1* și *2*, respectiv *2* și *3* coincid, sferele avînd viteza comună u.

Necunoscutele problemei sînt în număr de 8: vitezele v_1'', v_2'', v_3'', u și percuțiile $\mathcal{P}_{12}'$, $\mathcal{P}_{23}'$ din faza de compresiune și $\mathcal{P}_{12}''$, $\mathcal{P}_{23}''$ din faza de destindere.

Se obțin șase ecuații aplicînd teorema impulsului (31.2) pentru două dintre sfere, de exemplu sferele 1 și 3:

$$m_1 u - m_1 v_0 = -\mathcal{P}_{12}' \tag{1}$$

$$m_1 v_1'' - m_1 u = -\mathcal{P}_{12}'' \tag{2}$$

$$m_3 u - m(-v_0) = \mathcal{P}_{23}' \tag{3}$$

$$m_3 v_3'' - m_3 u = \mathcal{P}_{23}'' \tag{4}$$

și pentru întregul sistem:

$$(m_1 + m_2 + m_3)u - (m_1 v_0 - m_3 v_0) = 0 \tag{5}$$

$$m_1 v_1'' + m_2 v_2'' + m_3 v_3'' - (m_1 + m_2 + m_3)\, u = 0 \tag{6}$$

în cele două faze ale ciocnirii. Ultimele două ecuații se obțin din relația (31.7):

$$k_{12} = \frac{\mathcal{S}_{12}''}{\mathcal{S}_{12}'} \qquad k_{23} = \frac{\mathcal{S}_{23}''}{\mathcal{S}_{23}'}. \tag{7}$$

Rezolvînd sistemul precedent și ținînd seamă de valorile maselor și coeficienților de restituire se obține:

$$v_1'' = -\frac{7}{5} v_0 \qquad v_2'' = 0 \qquad v_3'' = \frac{v_0}{5}.$$

Se vede că raportul vitezelor relative este diferit de valoarea coeficientului de restituire:

$$\frac{v_2'' - v_1''}{v_1' - v_2'} = \frac{5}{7} \neq 1 \qquad \frac{v_3'' - v_2''}{v_2' - v_3'} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2}.$$

31.5. O minge lansată din A_0 cu viteza $\bar{v}_0$ sub unghiul α ciocnește podeaua în punctele A_1, A_2, ..., A_n, ... (fig. 31.5, *a*). Să se determine pozițiile acestor puncte, intervalele de timp t_0, t_1, ..., t_n, ... dintre două ciocniri și înălțimile

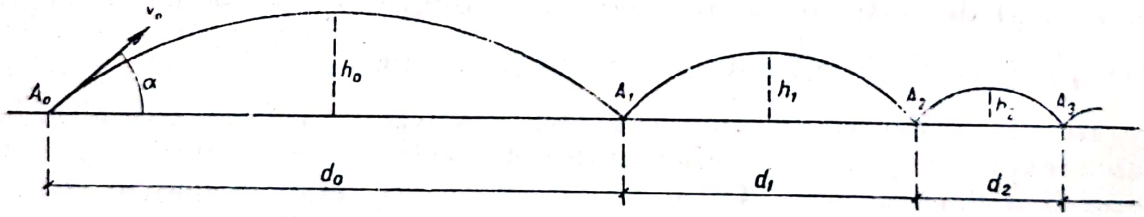


Fig. 31.5, *a*

maxime h_0, h_1, ..., h_n, ..., cunoscîndu-se coeficientul de restituire k dintre minge și podea și neglijîndu-se rezistența aerului și frecarea dintre minge și podea.

Rezolvare. În problema 21.8 s-a studiat mișcarea mingii din A_0 în A_1 (mișcarea punctului greu în vid), determinîndu-se în relațiile (8), și (7) bătaia d_1, timpul după care cade pe sol t_1 și înălțimea maximă h_1:

$$A_0A_1 = d_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \qquad h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \tag{1}$$

De asemenea s-a stabilit că viteza de cădere v_1' este egală cu viteza de lansare v_0:

$$v_1' = v_0,$$

unghiul de cădere fiind egal cu cel de lansare α. Mingea ciocnește prima oară podeaua în punctul A_1. Să se determine viteza v_1'' a mingii după ciocnire. Deoarece se neglijează frecările, percuția $\bar{\mathcal{P}}$ dintre minge și podea este normală; pentru a o elimina, se proiectează teorema impulsului (31.2) pe axa Ox:

$$H_x'' = H_x' = \sum \mathcal{P}_{ix} = 0. \quad (2)$$

Cum $H_x'' = m\, v_1'' \cos \beta$ și $H_x' = m\, v_1' \cos \alpha = m\, v_0 \cos \alpha$, unde m este masa mingii, din (2) rezultă:

$$v_1'' \cos \beta = v_0 \cos \alpha. \quad (3)$$

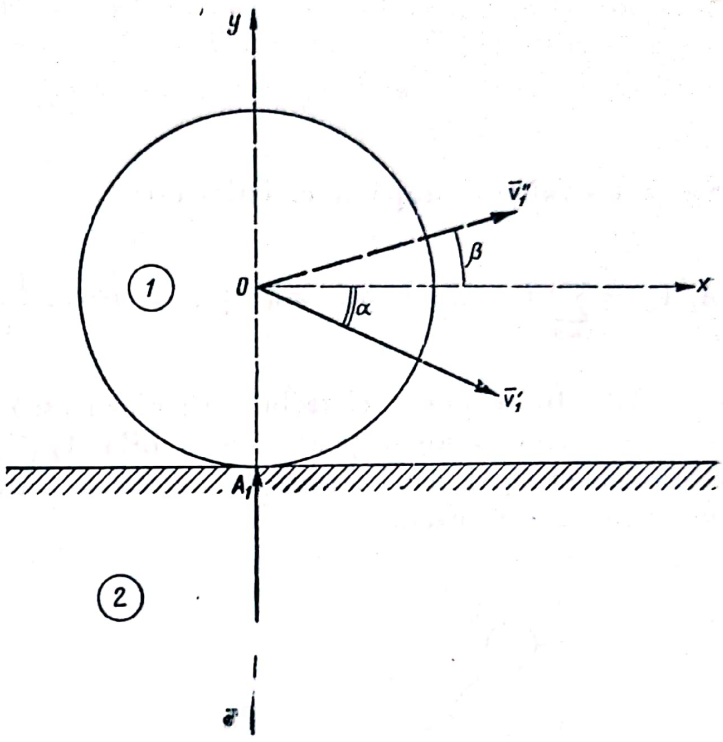


Fig. 31.5, *b*

O a doua relație pentru determinarea necunoscutelor v_1'' și β se obține din expresia (31.8) a coeficientului de restituire:

$$k = \frac{v_{2y}'' - v_{1y}''}{v_{1y}' - v_{2y}'} = \frac{0 - v_1'' \sin \beta}{-v_0 \sin \alpha - 0}, \quad (4)$$

deoarece proiecțiile vitezei mingii înainte și după ciocnire pe normala A_{1y} la suprafața de ciocnire sînt $v_{1y}' = -v_1' \sin \alpha = -v_0 \sin \alpha$, $v_{1y}'' = v_1'' \sin \beta$, viteza podelei fiind nulă și înainte, și după ciocnire, $v_{2y}' = v_2'' = 0$. Din (4) rezultă:

$$v_1'' \sin \beta = k\, v_0 \sin \alpha \quad (5)$$

și deci din (3) și (5) se obține:

$$v_1'' = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha} \qquad \operatorname{tg} \beta = k \operatorname{tg} \alpha \quad (6)$$

și cum $k \leqslant 1$, $v_1'' \leqslant v_0$ și $\beta \leqslant \alpha$. Înlocuind pe v_0 prin v_1'' și pe α prin β în formulele (1) și ținînd seamă de (3) și (5) se pot determina distanța A_1A_2, timpul t_1 dintre ciocnirile în A_1 și A_2 și înălțimea h_1 la care se ridică mingea:

$$A_1A_2 = d_1 = \frac{v_1''^2 \sin 2\beta}{g} = \frac{2 v_1'' \sin \beta\, v_1'' \cos \beta}{g} = \frac{2 k\, v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{k\, v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = k d_0;$$

$$t_1 = \frac{2 v_1'' \sin \beta}{g} = \frac{2 k\, v_0 \sin \alpha}{g} = k t_0 \qquad h_1 = \frac{v_1''^2 \sin^2 \beta}{2g} = \frac{k^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = k^2 h_0.$$

În același mod se determină:

$$A_nA_{n+1} = d_n = kd_{n-1} = \ldots = k^n d_0 = \frac{k^n v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad t_n = kt_{n-1} = \ldots = k^n t_0 = \frac{2k^n v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$h_n = k^2 h_{n-1} = \ldots = k^{2n} h_0 = \frac{k^{2n} v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Spațiul străbătut după n ciocniri este:

$$A_0A_n = \sum_{i=0}^{n} d_i = d_0 (1 + k + k^2 + \ldots + k^n) = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} d_0 = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

31.6. În ce punct C trebuie să ciocnească bila de biliard A_1 marginea mesei pentru ca apoi să poată ciocni bila A_2 (fig. 31.6, *a*)?. Se cunosc distanțele a, b_1 și b_2 și coeficientul de restituire k dintre bilă și marginea mesei. Se neglijează frecările.

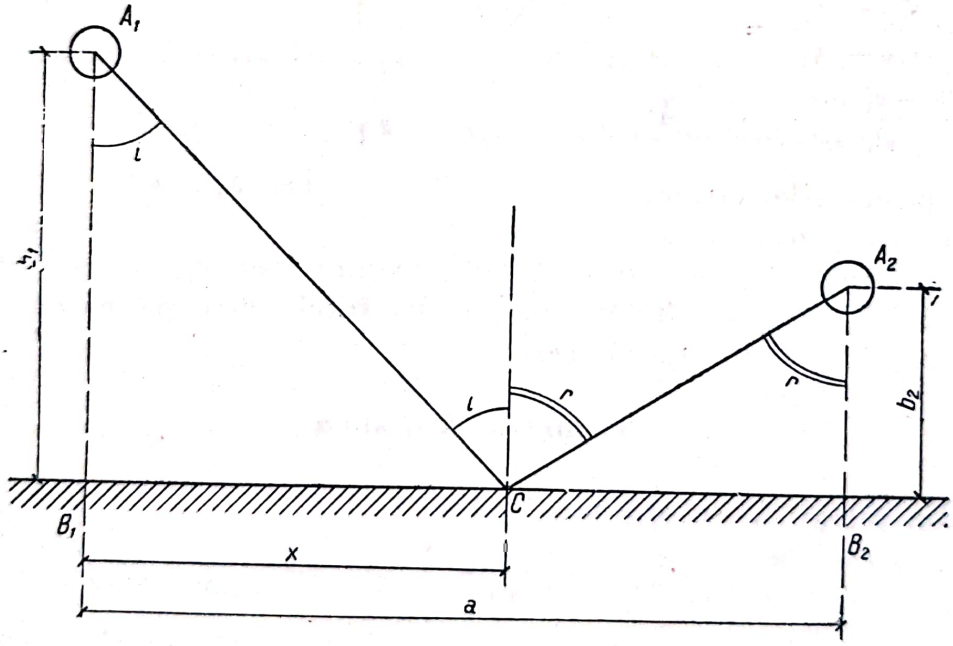


Fig. 31.6, *a*

Rezolvare. Fie $\bar{v}_1'$ și $\bar{v}_1''$ vitezele bilei înainte și după ciocnire și i și r unghiurile (de incidență și de reflexie) formate de direcțiile acestor viteze cu normala în C la suprafața de ciocnire. Pentru a elimina percuția $\bar{\mathcal{P}}$ se va proiecta teorema impulsului (31.2) pe direcția Cx:

$$m v_1'' \sin r - m v_1' \sin i = 0 \qquad (1)$$

(m este masa bilei). Expresia (31.8) a coeficientului de restituire este:

$$k = \frac{v''_{2y} - v''_{1y}}{v'_{1y} - v'_{2y}} = \frac{0 - v''_1 \cos r}{-v'_1 \cos i - 0}, \tag{2}$$

deoarece proiecțiile vitezei bilei pe normala Cy la suprafața de ciocnire sînt $v'_{1y} = -v'_1 \cos \alpha$, $v''_{1y} = v''_1 \cos r$, viteza marginii mesei de biliard fiind nulă înainte și după ciocnire $v'_{2y} = v''_{2y} = 0$.

Din (1) și (2) rezultă:

$$v''_1 \sin r = v'_1 \sin i$$
$$v''_1 \cos r = k\, v'_1 \cos i,$$

deci:

$$v''_1 = v'_1 \sqrt{\sin^2 i + k^2 \cos^2 i}$$
$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{k} \operatorname{tg} i. \tag{3}$$

Cum $k \leqslant 1$, $r \geqslant i$, unghiul de reflexie fiind mai mare decît unghiul de incidență. În cazul ciocnirii perfect elastice $k = 1$, deci $r = i$ și $v''_1 = v'_1$; în cazul ciocnirii plastice, $k = 0$, deci: $r = \frac{\pi}{2}$, bila se va rostogoli de-a lungul marginii mesei cu viteza $v''_1 = v'_1 \sin i$.

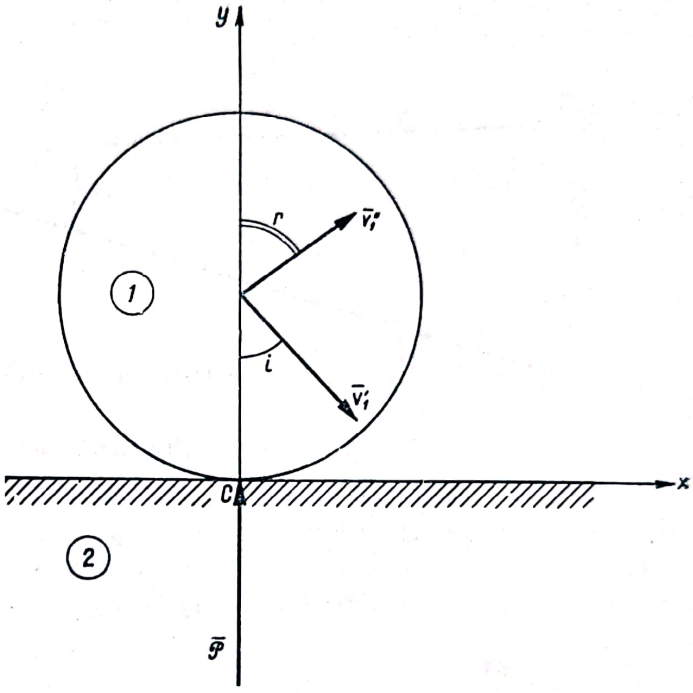


Fig. 31.6, *b*

Din triunghiurile A_1B_1C și A_2B_2C (fig. 31.6, *a*) rezultă:

$$\operatorname{tg} i = \frac{x}{b_1} \qquad \operatorname{tg} r = \frac{a - x}{b_2} \tag{4}$$

și înlocuind în (3) rezultă poziția punctului C:

$$x = \frac{kb_1}{kb_1 + b_2} a. \tag{5}$$

31.7. Două sfere de mase egale m sînt lansate în același timp din punctele A și B (fig. 31.7, *a*). Cunoscîndu-se viteza primei sfere v'_1 și unghiul α, cu ce viteză v'_2 trebuie lansată sfera a doua pentru ca să se întîlnească în C. Știind că ciocnirea este perfect elastică, să se determine vitezele sferelor $\bar{v}''_1$ și $\bar{v}''_2$ după ciocnire.

Rezolvare. Pentru ca sferele să se întîlnească în C trebuie să ajungă în același moment t. Mișcarea lor fiind uniformă:

$$t = \frac{AC}{v'_1} = \frac{BC}{v'_2}.$$

de unde:

$$v_2' = \frac{BC}{AC} v_1' = \frac{v_1'}{\cos \alpha}. \qquad (1)$$

Pentru determinarea distribuției de viteze după ciocnirea din C trebuie să se cunoască mărimea vitezelor sferelor după ciocnire v_1'' și v_2'', și direc-

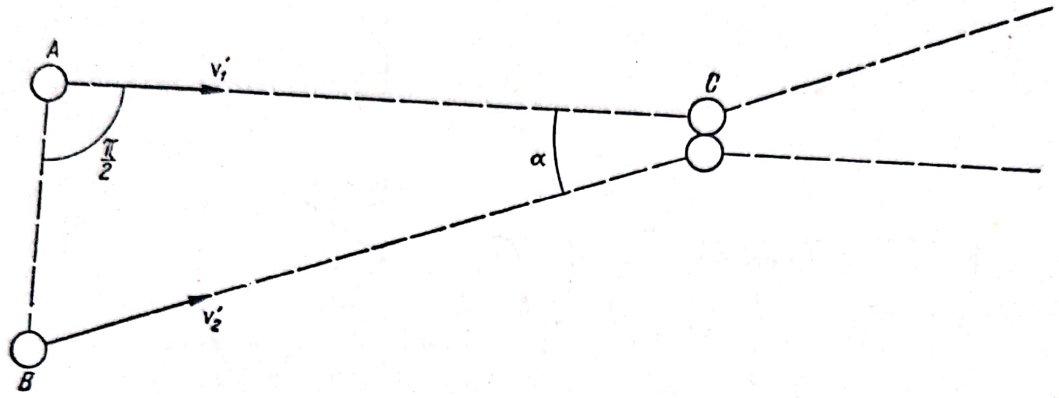


Fig. 31.7, *a*

țiile lor determinate prin unghiurile β_1 și β_2 formate de aceste viteze cu direcția AC (axa Cx). Este nevoie de patru relații în care să nu intervină percuțiile interioare dintre sfere $\mathcal{P}_{12}$ și $\mathcal{P}_{21}$ (fig. 31.7). Se va proiecta teorema impulsului (31.2) pentru fiecare sferă în parte pe axa Cx normală pe aceste percuții:

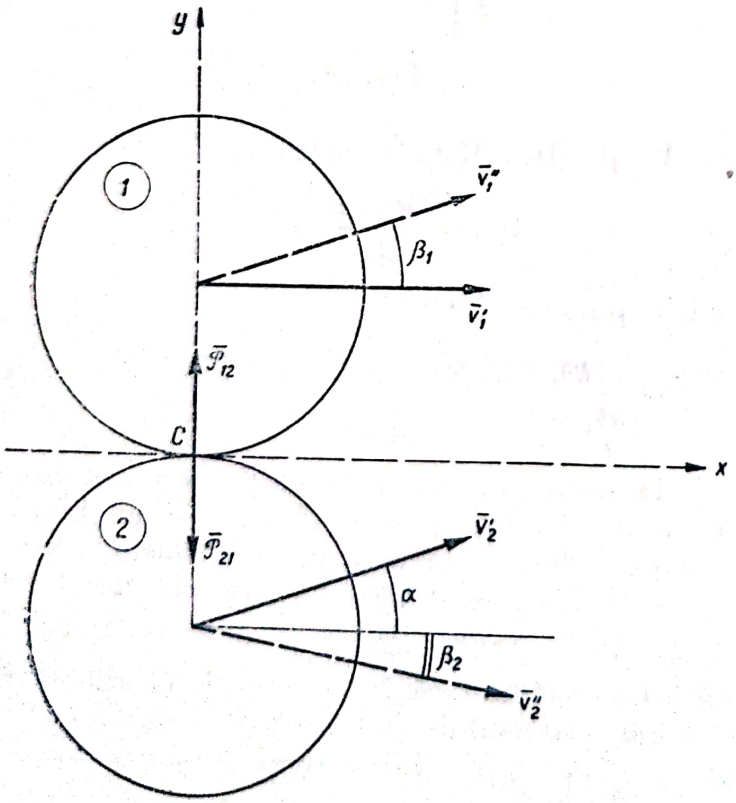


Fig. 31.7, *b*

$$m v_1'' \cos \beta_1 - m v_1' = \mathcal{P}_{12x} = 0 \qquad (2)$$

$$m v_2'' \cos \beta_2 - m v_2' \cos \alpha = \mathcal{P}_{21x} = 0. \qquad (3)$$

De asemenea se aplică teorema impulsului pentru întregul sistem care elimină percuțiile interioare. Ecuația de proiecție pe Cx nu mai are rost să fie scrisă, deoarece ea este suma ecuațiilor (2) și (3). Proiectînd pe Cy rezultă:

$$(m v_1'' \sin \beta_1 - m v_2'' \sin \beta_2) - (0 + m v_2' \sin \alpha) = 0 \qquad (4)$$

Ultima relație este dată de expresia coeficientului de restituire (31.8). Ciocnirea fiind perfect elastică $k = 1$,

$$1 = \frac{v''_{2y} - v''_{1y}}{v'_{1y} - v'_{2y}} = \frac{-v''_2 \sin \beta_2 - v''_1 \sin \beta_1}{0 - v'_2 \sin \alpha}. \tag{5}$$

Rezolvînd sistemul (2) ... (5) și ținînd seamă de (1) se obține:

$$\beta_1 = \alpha \qquad \beta_2 = 0$$

$$v''_1 = v'_2 = \frac{v'_1}{\cos \alpha} \qquad v''_2 = v'_1,$$

adică:

$$\bar{v}''_1 = \bar{v}'_2 \qquad \bar{v}''_2 = \bar{v}'_1,$$

vitezele celor două sfere „schimbîndu-se" între ele în urma ciocnirii.

31.8. O bară articulată în O se depărtează de verticală cu unghiul α și este lăsată să cadă liber fără viteză inițială (fig. 31.8, *a*). După ce se lovește de piedica A, bara se depărtează de verticală cu unghiul $\beta = \alpha$. Să se determine coeficientul de restituire k. La ce distanță $OA = b$ trebuie așezată piedica A pentru ca să nu apară percuții în articulația O?

Rezolvare. Se poate determina viteza unghiului ω', a barei la începutul ciocnirii, aplicînd teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic care elimină reacțiunea $\bar{R}$ din articulația O:

$$E - E_0 = \mathfrak{L} \tag{1}$$

Energia barei (corp avînd o mișcare de rotație) este conform (34.8) $E = \frac{1}{2} J_z \omega'^2$, unde J_z este momentul de inerție al barei în raport cu axa de rotație, $E_0 = 0$ (bara pleca din repaus) și lucrul mecanic al greutății Mg a barei este $\mathfrak{L} = Mg\,l'(1 - \cos \alpha)$, unde $l = OC$ (distanța de la axa de rotație pînă la centrul de greutate al barei), $l(1 - \cos \alpha)$ fiind deplasarea centrului de greutate pe verticală. Făcînd înlocuirile în (1) se obține:

$$\frac{1}{2} J_z \omega'^2 - 0 = Mg\,l\,(1 - \cos \alpha). \tag{2}$$

Analog aplicînd teorema energiei între momentul cînd se termină ciocnirea (bara are viteza unghiulară ω'') și momentul cînd depărtarea de verticală este maximă ($E = 0$) se obține:

$$0 - \frac{1}{2} J_z \omega''^2 = -Mg\,l\,(1 - \cos \beta). \tag{3}$$

Coeficientul de restituire (31.8) este:

$$k = \frac{v_2'' - v_1''}{v_1' - v_2'} = \frac{0 - (-\omega'' y_A)}{\omega' y_A - 0} = \frac{\omega''}{\omega'}, \qquad (4)$$

deoarece vitezele punctului A de pe bară înainte și după ciocnire sînt $|v_1'| = \omega' y_A$, $|v_1''| = \omega'' y_A$, vitezele piedicii sînt nule $v_2' = v_2'' = 0$. Pe figura 31.8, *b* s-au trasat sensurile acestor viteze și sensul axei An pe care au fost proiectate.

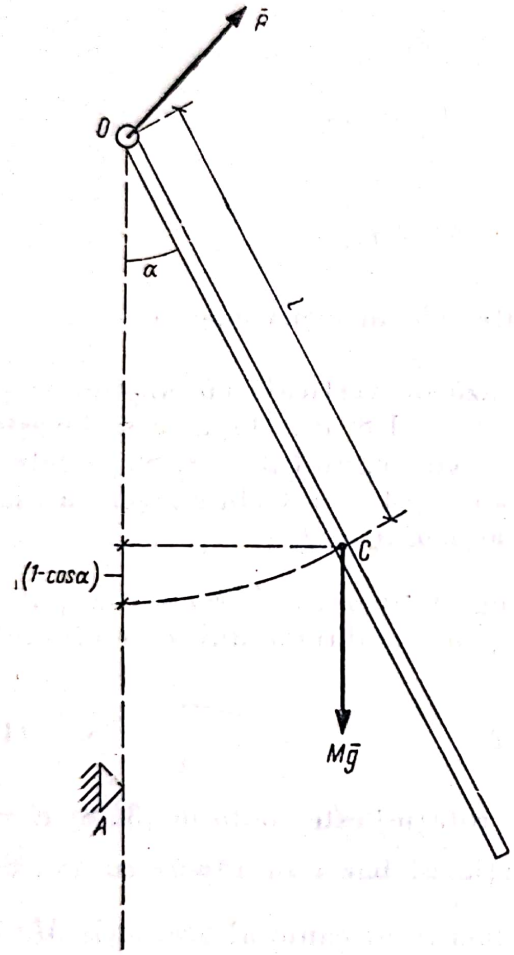


Fig. 31.8, *a*

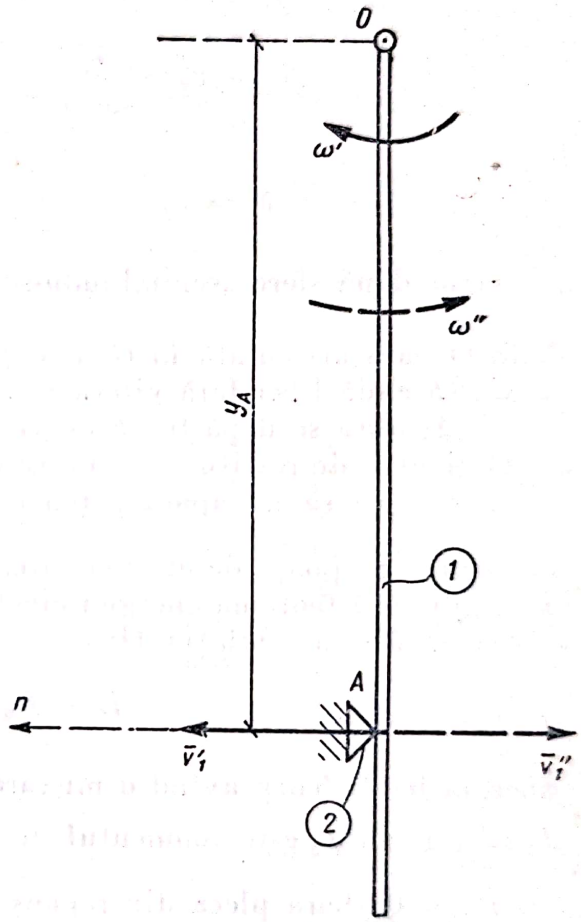


Fig. 31.8, *b*

Împărțind relațiile (3) și (2) rezultă:

$$\frac{\omega''^2}{\omega'^2} = \frac{1 - \cos\beta}{1 - \cos\alpha} = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

deci:

$$k = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1 \quad (\beta \leqslant \alpha) \qquad (5)$$

Pentru a nu avea percuții în ax, A trebuie să fie centrul de percuție al barei, deci conform (31.9):

$$y_A = \frac{J_z}{M\eta} = \frac{J_z}{Ml} = \text{lungimea pendulului simplu sincron.}$$

În cazul unei bare omogene de lungime a, $l = \frac{a}{2}$, $J_z = \frac{Ma^2}{3}$ (v. tabela 26.1, *I*)

deci:

$$y_A = \frac{\frac{1}{3} Ma^2}{\frac{1}{2} Ma} = \frac{2}{3} a. \tag{6}$$

31.9. O bară omogenă articulată în capătul ei O care se poate roti în jurul axei orizontale Oz și se află în repaus este lovită în punctul A de un glonț perpendicular pe planul determinat de bară și axa de rotație. După lovire glonțul rămîne în bară, iar bara se depărtează de verticală cu unghiul α. Să se determine viteza glonțului înainte de lovire v_1', știind că masa glonțului este m, masa barei M, lungimea ei a, momentul de inerție $J_z = \frac{1}{3} Ma^2$, și $OA = b$. Să se determine apoi percuția $\bar{\mathcal{P}}_0$ din axa de rotație. În ce condiții $\bar{\mathcal{P}}_0 = 0$?

Rezolvare. Aplicînd teorema energiei sistemului bară-glonț între momentul sfîrșitului ciocnirii și cel în care bara formează unghiul maxim de înclinare α cu verticala, se poate determina viteza unghiulară ω'' a barei la sfîrșitul ciocnirii. Rezultă:

$$0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} Ma^2 + mb^2\right)\omega''^2 = -\left(M\frac{a}{2} + mb\right) g\,(1 - \cos\alpha), \tag{1}$$

deoarece energia inițială este conform (34.9) $E_0 = \frac{1}{2} J_z \omega'' + \frac{1}{2} m v_2''^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} Ma^2 + mb^2\right)\omega''$, ($v_1'' = \omega'' b$ = viteza glonțului după ciocnire), energia finală este nulă $E = 0$, lucrul mecanic al greutăților $M\bar{g}$ și $m\bar{g}$ fiind $\mathcal{L} = -Mg\frac{a}{2}(1 - \cos\alpha) - mg\,b\,(1 - \cos\alpha)$, lucrul mecanic al reacțiunii $\bar{R}_0$ din articulație fiind nul (fig. 31.9, *a*).

Rezolvînd ecuația (1) se obține:

$$\omega'' = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{6\,(Ma + 2\,m\,b)}{Ma^2 + 3\,m\,b^2}\,g}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se studieze ciocnirea dintre bară și glonț (fig. 31.9, *b*). Singura percuție exterioară întregului sistem este percuția $\bar{\mathcal{P}}_0$ din ax; pentru a o elimina, se aplică teorema momentului cinetic (31.3) în raport cu axa de rotație Oz:

$$K_z'' - K_z' = 0, \tag{3}$$

deoarece momentul percuției $\bar{\mathcal{P}}_0$ față de Oz este nul. Momentul cinetic fiind momentul impulsului, $K_z' = m\, v_1'\, b$ (bara era în repaus înainte de ciocnire),

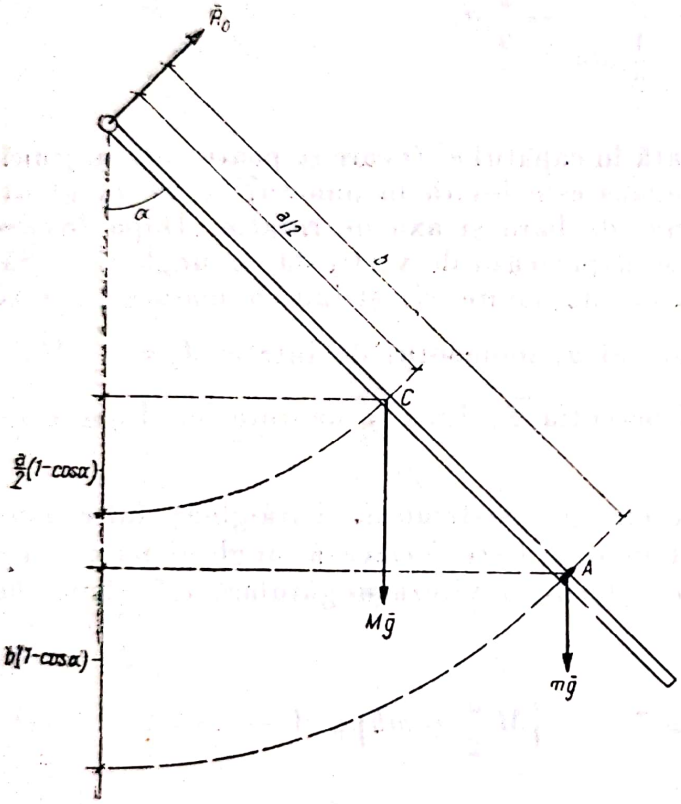


Fig. 31.9, *a*

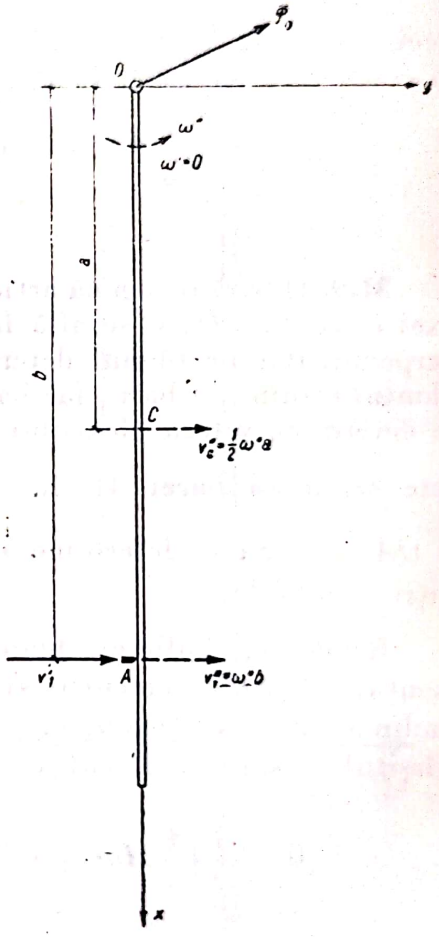


Fig. 31.9, *b*

conform (31.5) $K_z'' = J_z\,\omega'' + m\, v_1''\, b = \left(\frac{1}{3}\, M\, a^2 + m\, b^2\right)\omega''$. Înlocuind în 3) rezultă:

$$\left(\frac{1}{3}Ma^2 + mb^2\right)\omega'' = m\, v_1'\, b,$$

de unde ținînd seamă și de (2):

$$v_1' = \frac{Ma^2 + 3\,mb^2}{3\,mb}\,\omega'' = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{6\,(Ma^2 + 3mb^2)\,(Ma + 2mb)}{3\,mb}\,g}. \tag{4}$$

Pentru determinarea percuției din ax, se aplică teorema impulsului (31.2):

$$\bar{H}'' - \bar{H}' = \bar{\mathcal{P}}_0. \tag{5}$$

Cum $\bar{H}' = m\, v_1' \vec{j}$, iar $\bar{H}'' = M\, v_C'' \vec{j} + m\, v_1'' \vec{j} = \left(\frac{1}{2} Ma + m\, b\right) \omega'' \vec{j}$ pentru calculul impulsului barei s-a aplicat relația (31.4); din (5) ținînd seamă de (4) rezultă:

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \left[\left(\frac{1}{2} Ma + mb\right) \omega'' - m\, v_1'\right] \vec{j} = \frac{Ma}{3b} \left(\frac{3}{2} b - a\right) \omega'' \vec{j}. \tag{6}$$

Pentru ca percuția din ax să fie nulă trebuie ca:

$$\frac{3}{2} b - a = 0 \qquad b = \frac{2}{3} a,$$

rezultat care se putea obține direct cu ajutorul relației (31.9) în același mod ca în problema precedentă.

Observație. Problema aceasta este identică cu problema pendulului balistic, cu ajutorul căruia se poate măsura viteza unui proiectil.

31.10. O mașină Atwood este alcătuită dintr-un scripete fix (disc omogen de masă M, rază r, moment de inerție față de axa de rotație $J_z = \frac{1}{2} Mr^2$) peste care este trecut un fir inextensibil, de capetele firului fiind suspendate două greutăți identice A și B de masă $m = \frac{1}{4} M$. Un inel C de masă m cade pe verticală și ciocnește cu viteza v_0 greutatea A care era în repaus. Știind că ciocnirea este plastică, să se studieze mișcarea sistemului după ciocnire și să se determine percuțiile din fir și din axul scripetelui.

Rezolvare. Pentru întregul sistem singura percuție exterioară este percuția $\bar{\mathcal{P}}_0$ din axul scripetelui. Distribuția de viteze după ciocnire se poate determina aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) care în cazul nostru devine:

$$K_z'' - K_z' = 0, \tag{1}$$

deoarece momentul lui $\bar{\mathcal{P}}_0$ față de Oz este nul. Înainte de ciocnire momentul cinetic este cel al inelului C:

$$K_z' = m\, v_0\, r, \tag{2}$$

și după ciocnire:

$$K_z'' = 2\, m\, v''\, r + m\, v''\, r + J_z\, \omega'' \tag{3}$$

(în fig. 31.10, *a* s-au reprezentat cu linie întreruptă impulsurile corpurilor *A*, *B* și *C* după ciocnire, $v'' = \omega'' r$ fiind viteza comună a acestor corpuri). Înlocuind în (3):

$$K_z'' = 2\,m\,v''\,r + m\,v\,''r + \frac{1}{2}\cdot 4\,m\cdot r^2\,\frac{v''}{r} = 5\,m\,v''\,r \qquad (4)$$

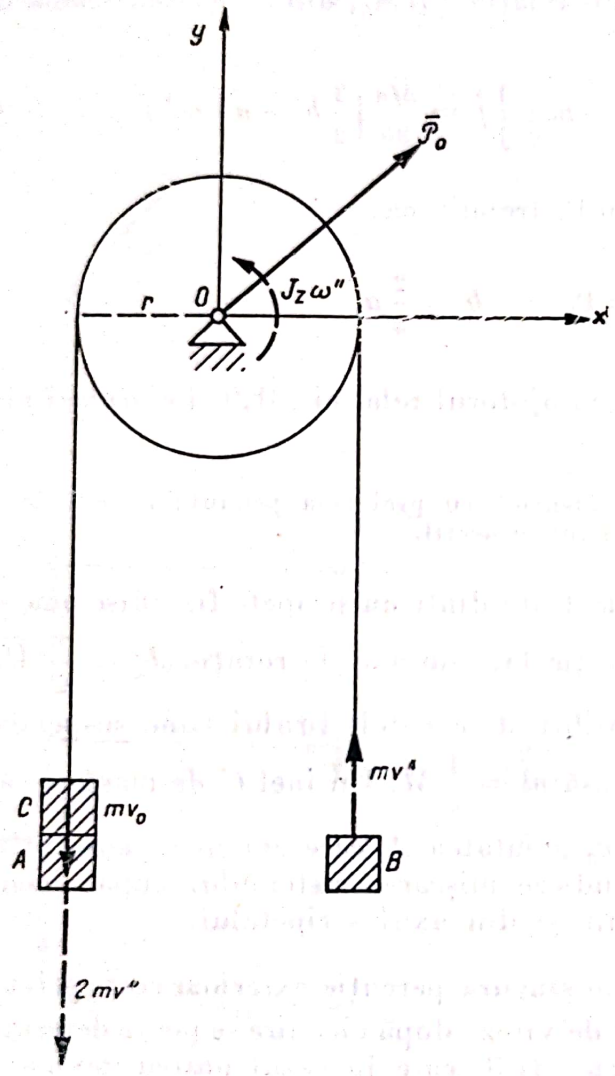


Fig. 31.10, *a*

și apoi în (1) rezultă:

$$v'' = \frac{v_0}{5}. \qquad (5)$$

Pentru determinarea percuțiilor din fire se izolează greutățile (fig. 31.10, *b*). Asupra greutăților *A* și *C* acționează percuția $\bar{\mathcal{P}}_1$ din fir. Proiectînd teorema impulsului (31.2) pe axa *Oy* rezultă:

$$-2\,m\,v'' - (-m\,v_0) = \mathcal{P}_1$$

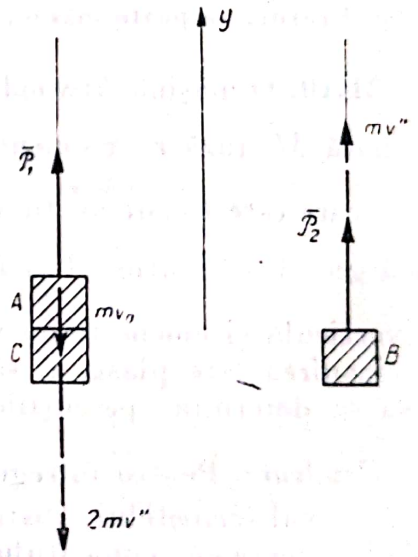


Fig. 31.10, *b*

deci:

$$\mathcal{P}_1 = m\,v_0 - 2m\,v'' = \frac{3}{5}\,m\,v_0. \qquad (6)$$

Procedînd analog pentru greutatea *B* asupra căreia acționează percuția $\bar{\mathcal{P}}_2$ se obține:

$$m\,v'' - 0 = \mathcal{P}_2 \qquad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{5}\,m\,v_0. \qquad (7)$$

Aplicînd teorema impulsului întregului sistem (fig. 31.10, *a*), cum impulsul discului (31.4) $M\dot{\bar{\rho}} = 0$, întrucît centrul de greutate al discului este fix, rezultă:

$$0 - 0 = \mathcal{P}_{0x} \qquad (-2\,m\,v'' + m\,v'') - (-m\,v_0) = \mathcal{P}_{0y},$$

de unde:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{0y} = m\,v_0 - m\,v'' = \frac{4}{5}\,m\,v_0. \tag{8}$$

Pentru a urmări mișcarea întregului sistem după ciocnire, cel mai comod este să se aplice teorema momentului cinetic, deoarece momentul cinetic este dat de expresia (4) în care în loc de v'' se introduce viteza v a corpurilor la un moment dat, $K_z = 5\,mvr$. Rezultă:

$$\frac{dK_z}{dt} = \mathfrak{M}_z \tag{9}$$

deci ținînd seamă de forțele care acționează asupra sistemului

$$5\,m\,r\,\dot{v} = 2\,m\,g\,r - m\,g\,r, \tag{10}$$

de unde accelerația greutăților este:

$$a = \dot{v} = \frac{g}{5} \tag{11}$$

și, prin integrare, viteza v și drumul s parcurs de greutăți sînt:

$$v = a\,t + v'' = \frac{g}{5}\,t + \frac{v_0}{5} \qquad s = \frac{gt^2}{10} + \frac{v_0 t}{5}. \tag{12}$$

31.11. O bară omogenă AB, de masă M și lungime l, moment de inerție față de articulația O situată la mijlocul ei $J_z = \frac{Ml^2}{12}$, se poate roti într-un plan vertical. O sferă C de masă m ciocnește cu viteza v_1' capătul A al barei, ciocnirea fiind perfect elastică. Știind că înainte de ciocnire bara era în orizontală și în repaus, se cere viteza unghiulară ω'' a barei și viteza v_1'' a sferei după ciocnire.

Rezolvare. Singura percuție exterioară sistemului este cea din articulație $\bar{\mathcal{P}}_0$ care se elimină aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) față de axa de rotație Oz:

$$K_z'' - K_z' = 0, \tag{1}$$

unde:

$$K_z' = m\,v_1'\,\frac{l}{2} \qquad K_z'' = m\,v_1''\,\frac{l}{2} + J_z''\,\omega'' = m\,v_1''\,\frac{l}{2} + \frac{Ml^2}{12}\,\omega'' \tag{2}$$

(în fig. 31.11 vitezele înainte de ciocnire sînt reprezentate cu linie plină, iar cele după ciocnire — cu linie întreruptă).

Din (1) și (2) rezultă:

$$m\,v_1'' = \frac{M\,l}{6} + \omega'' = m\,v_1'. \tag{3}$$

O a doua relație în care să intervină necunoscutele v_1'' și ω'' se obține din expresia (31.8) a coeficientului de restituire. Ciocnirea fiind perfect elastică, $k = 1$,

$$1 = \frac{v_{2x}'' - v_{1x}''}{v_{1x}' - v_{2x}'} = \frac{\omega''\,\dfrac{l}{2} - v_1''}{v_1' - 0}, \tag{4}$$

unde $v_{2x}'' = \omega''\,\dfrac{l}{2}$ și $v_{2x}' = \omega'\,\dfrac{l}{2} = 0$ reprezintă viteza capătului barei după și înainte de ciocnire proiectată pe normala Ox pe suprafața de ciocnire. Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (3) și (4) rezultă:

$$\omega'' = \frac{12\,m\,v_1'}{(3\,m + M)\,l} \qquad v_1'' = \frac{3\,m - M}{3\,m + M}\,v_1'.$$

Dacă $m < \dfrac{M}{3}$, $v_1'' < 0$, deci sfera sare în sus după ciocnire, și dacă $m > \dfrac{M}{3}$, $v_1'' > 0$ sfera continuîndu-și mișcarea pe verticală în jos. Neglijînd frecările bara va avea după ciocnire o mișcare de rotație uniformă.

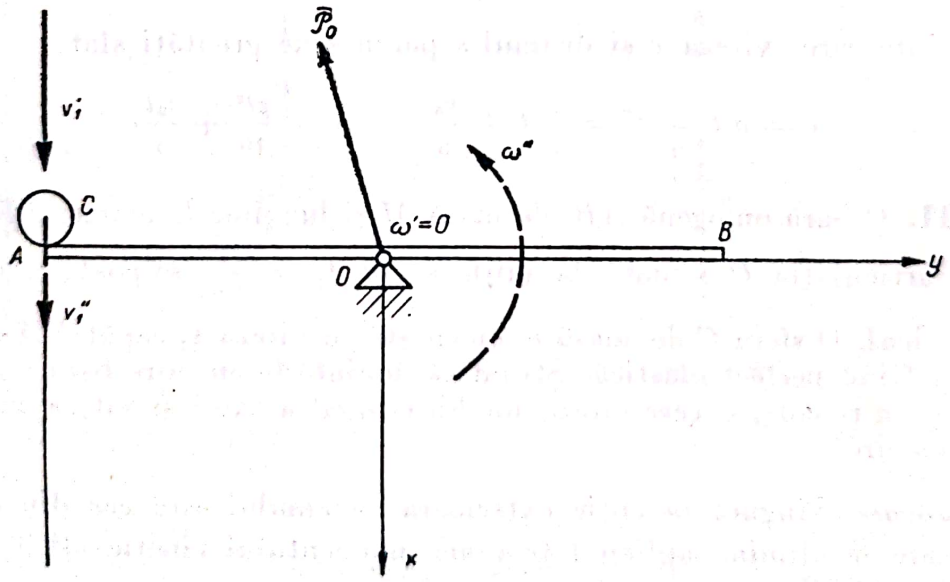


Fig. 31.11

31.12. Să se determine pozițiile centrelor de percuție A pentru plăcile din figura 31.12, *a*, *b* și *c*. Presupunînd apoi cunoscute pozițiile centrelor de percuție A pentru plăcile din figura 31.12, *d*, *e* și *f*, să se determine pozițiile axelor de rotație Oz.

Rezolvare. Toate aceste plăci fiind plane $x = 0$, deci condiția (31.9) $J_{xz} = 0$ este îndeplinită. Coordonatele centrului de percuție sînt:

$$y_A = \frac{J_z}{M\eta} \qquad z_A = \frac{J_{yz}}{M\eta}. \tag{1}$$

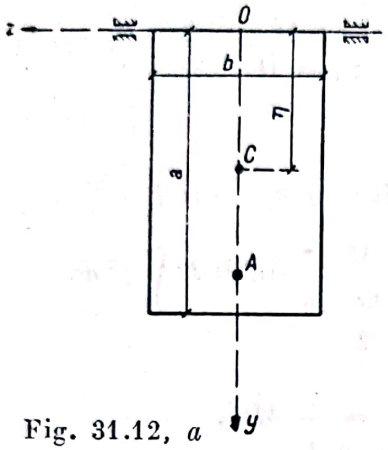


Fig. 31.12, *a*

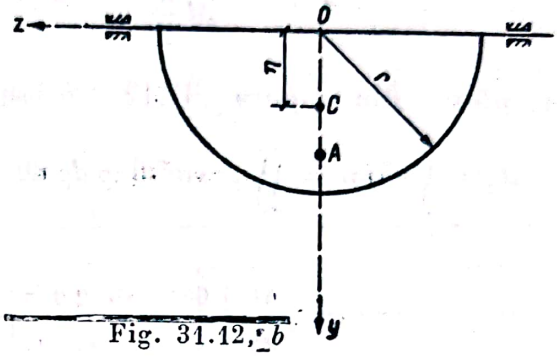


Fig. 31.12, *b*

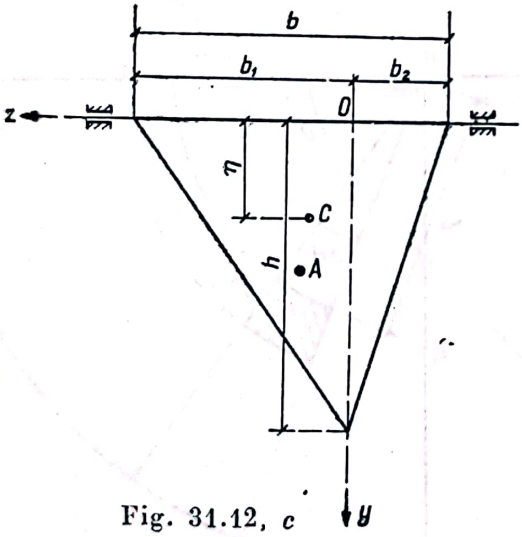


Fig. 31.12, *c*

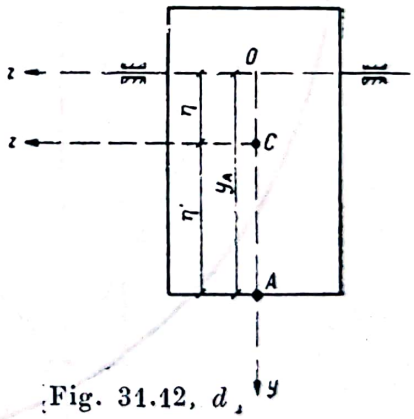


Fig. 31.12, *d*

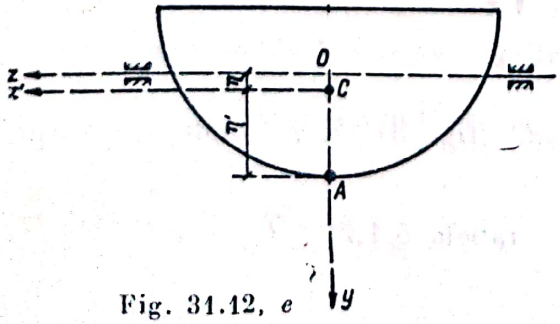


Fig. 31.12, *e*

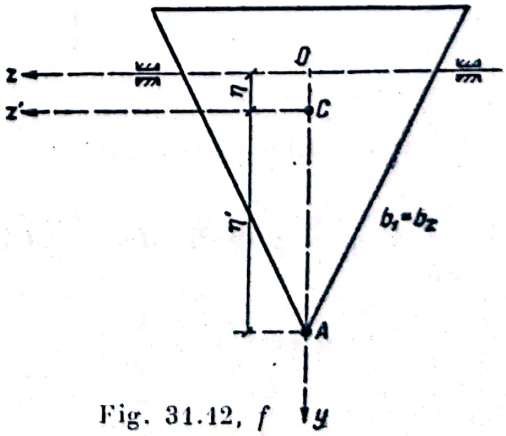


Fig. 31.12, *f*

Pentru placa din figura 31.12, *a* se dă:

$J_z = \frac{1}{3} Ma^2$ (v. tabela 26.1,*1*), $\eta = \frac{a}{2}$, $J_{yz} = 0$, deoarece axa Oy este axă de simetrie. Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{1}{3} Ma^2}{M\frac{a}{2}} = \frac{2}{3} a \qquad z_A = 0. \tag{2}$$

Pentru placa din figura 31.12, *b* se dă:

$$J_z = \int y^2 dm = \iint \rho^2 \sin^2 \theta \mu \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{M}{\frac{\pi r^2}{2}} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^r \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \frac{M}{\frac{\pi r^2}{2}} \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{\pi} \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^r = \frac{1}{4} Mr^2, \tag{3}$$

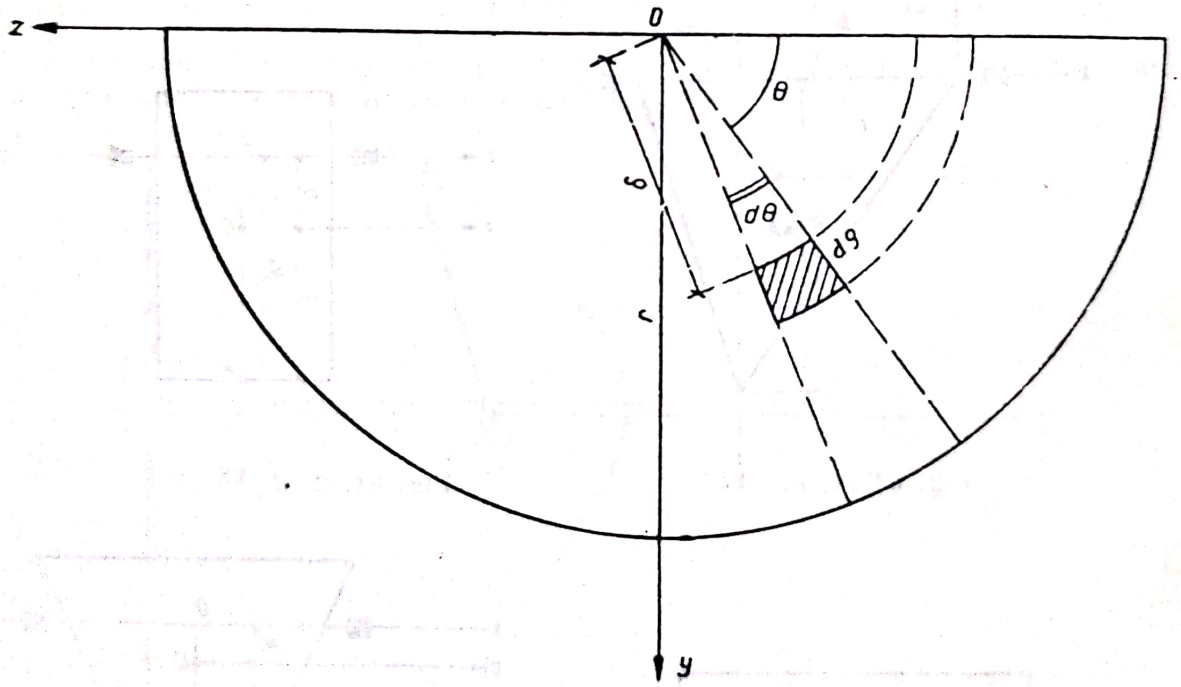


Fig. 31.12, *g*

deoarece $y = \rho \sin \theta$, $dm = \rho dA = \mu \rho d\rho d\theta$ (fig. 31.12, *g*), unde masa specifică:

$$\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{\pi r^2}{2}}; \quad \eta = \frac{4r}{3\pi} \text{ (v. tabela 5.1,7)}, \quad J_{yz} = 0,$$

deoarece axa Oy este axă de simetrie. Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{Mr^2}{4}}{M\frac{4r}{3\pi}} = \frac{3}{16}\,r \approx 0{,}589\,r \quad z_A = 0. \tag{4}$$

Pentru placa din figura 31.12, *c* se dă:

$$J_z = \frac{1}{6}\,Mh^2 \text{ (v. tabela 26.1, 3)}, \quad \eta = \frac{h}{3} \text{ (v. tabela 5.1, 5)}$$

și

$$J_{yz} = \int yz\,dm = \iint yz\,\mu\,dy\,dz = \frac{M}{\frac{(b_1+b_2)h}{2}} \int_0^h y\,dy \int_{z_2}^{z_1} z\,dz \tag{5}$$

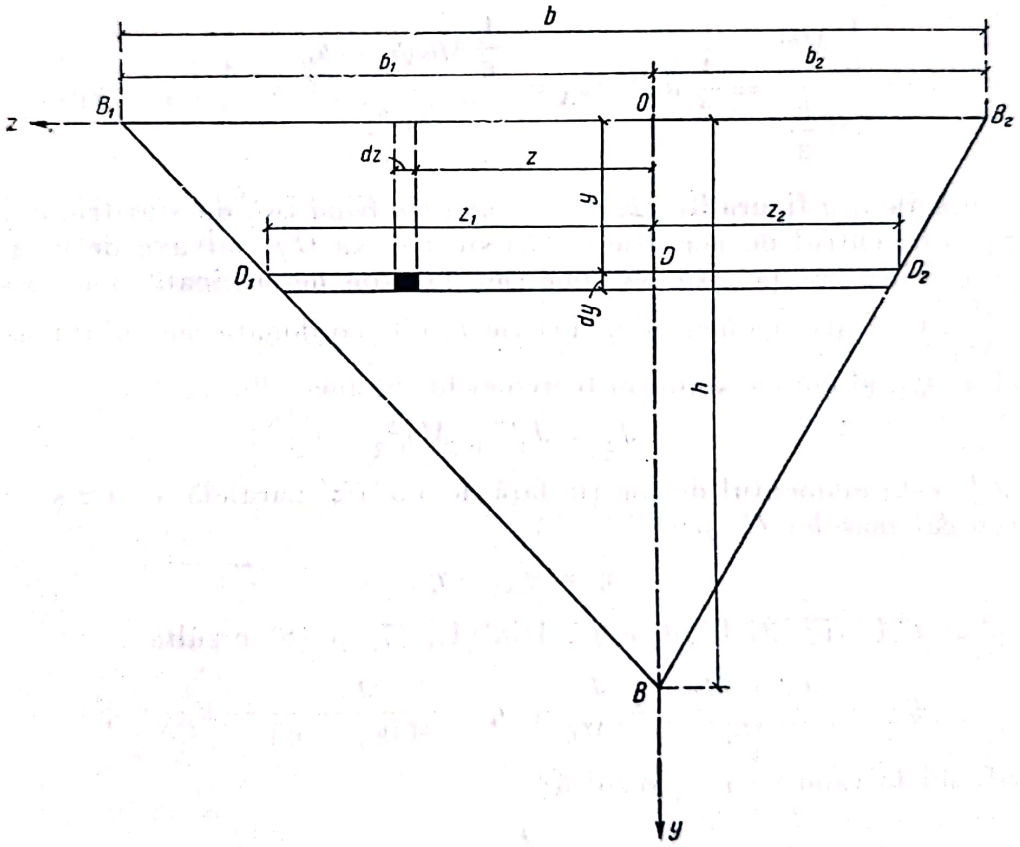


Fig. 31.12, *h*

deoarece $dm = \mu\,dA = \mu\,dy\,dz$ (fig. 31.12, *h*), unde masa specifică $\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{(b_1+b_2)h}{2}}$. Din triunghiurile asemenea OBB_1 și DBD_1, respectiv OBB_2 și DBD_2 rezultă:

$$\frac{b_1}{z_1} = \frac{h}{h-y} \qquad \frac{b_2}{|z_2|} = \frac{h}{h-y},$$

de unde:

$$z_1 = \frac{b_1}{h}(h - y) \qquad z_2 = -|z_2| = -\frac{b_2}{h}(h - y)$$

și înlocuind în (5):

$$J_{yz} = \frac{M}{\frac{(b_1 + b_2)h}{2}} \int_0^h y dy \left| \frac{z^2}{2} \right|_{-\frac{b_2}{h}(h-y)}^{\frac{b_1}{h}h-y} = \frac{2M}{(b_1 + b_2)h} \cdot \frac{b_1^2 - b_2^2}{h^2} \int_0^h (h - y)^2 y \, dy =$$

$$= \frac{1}{6} Mh(b_1 - b_2).$$

Înlocuind în (1) rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{1}{6} Mh^2}{M\frac{h}{3}} = \frac{1}{2} h \qquad z_A = \frac{\frac{1}{6} Mh(b_1 - b_2)}{M\frac{h}{3}} = \frac{1}{2}(b_1 - b_2). \tag{6}$$

Pentru plăcile din figura 31.12, *d*, *e*, *f*, axa Oy fiind axă de simetrie $J_{yz} = 0$, deci $z_A = 0$ centrul de percuție se găsește pe axa Oy, iar axa de rotație Oz este perpendiculară pe axa de simetrie. Trebuie determinată doar distanța $y_A = \frac{J_z}{M\eta}$. Însă atît momentul de inerție J_z cît și ordonata centrului maselor η depind de y_A, și anume conform teoremei lui Steiner (26.7):

$$J_z = J_{z'} + M\eta^2, \tag{7}$$

unde $J_{z'}$ este momentul de inerție față de axa Cz' paralelă cu Oz și trecînd prin centrul maselor C, și:

$$\eta = y_A - \eta', \tag{8}$$

unde $\eta' = CA$ (fig. 31.12, *d*, *e*, *f*). Din (1), (7) și (8) rezultă:

$$y_A = \frac{J_{z'} + M\eta^2}{M\eta} = \frac{J_{z'}}{M\eta} + \eta = \frac{J_{z'}}{M(y_A - \eta')} + y_A - \eta'$$

și rezolvînd în raport cu y_A rezultă:

$$y_A = \frac{J_{z'}}{M\eta'} + \eta'. \tag{9}$$

Pentru placa din figura 31.12, *d* se obține:

$$J_{z'} = \frac{1}{12} Ma^2 \text{ (v. tabela 26.1, 1)}, \quad \eta' = \frac{a}{2}, \text{ deci:}$$

$$y_A = \frac{\frac{1}{12} Ma^2}{M\frac{a}{2}} + \frac{a}{2} = \frac{2a}{3}. \tag{10}$$

Pentru placa din figura 31.12, *e*, aplicînd teorema lui Steiner (26.7) și ținînd seamă de (3):

$$J_{z'} = \frac{1}{4} Mr^2 - M\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2, \quad \text{și} \quad \eta' = r - \frac{4r}{3\pi}, \text{ deci:}$$

$$y_A = \frac{Mr^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)}{Mr\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)} + r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = \frac{15\pi - 32}{12\pi - 16} r \approx 0{,}698\, r. \tag{11}$$

Pentru placa din figura 31.12, *f* rezultă:

$$J_{z'} = \frac{1}{18} Mh^2 \text{ (v. tabela 26.1, 3)}, \quad \eta' = \frac{2}{3} h, \text{ deci:}$$

$$y_A = \frac{\frac{1}{18} Mh^2}{M\frac{2h}{3}} + \frac{2}{3} h = \frac{3h}{4}. \tag{12}$$

31.13. O placă plană se mișcă în planul său, viteza $\bar{v}'_C$ a centrului maselor C și viteza unghiulară $\bar{\omega}$ a plăcii fiind cunoscute. Se fixează un punct A al plăcii ale cărei coordonate polare r, θ în raport cu C sînt cunoscute (fig. 31.13, *a*). Să se determine viteza unghiulară $\bar{\omega}''$ a plăcii după fixarea punctului A. Caz particular: placa omogenă dreptunghiulară din figura 31.13, *b* avînd o mișcare de translație cu viteza $\bar{v}'_C$.

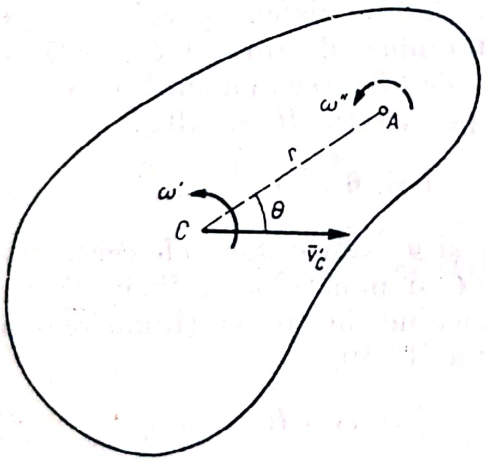


Fig. 31.13, *a*

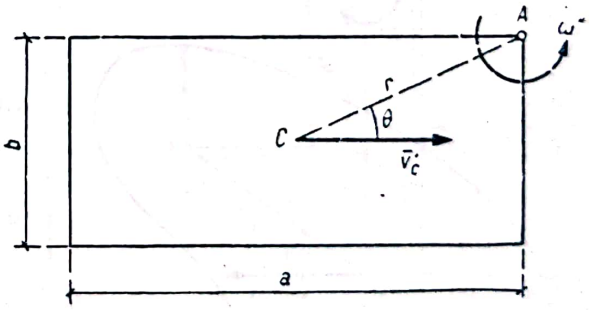


Fig. 31.13, *b*

Să se determine apoi poziția punctului A, pentru a opri placa.

Rezolvare. Singura percuție exterioară este cea din punctul de fixare $\bar{\mathcal{P}}_A$. Se poate elimina aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) în raport cu axa Az normală pe planul plăcii în punctul A:

$$K''_{Az} - K'_{Az} = 0, \tag{1}$$

unde momentele cinetice înainte și după fixarea punctului A sînt:

$$K'_{Az} = Mv'_C r \sin 0 + K_{Cz} = Mv'_C r \sin 0 + J_{z'}\omega' \tag{2}$$

[s-a aplicat teorema lui König (31.6), J_z, fiind momentul de inerție al plăcii față de axa Cz' paralelă cu Az și trecînd prin centrul maselor] și:

$$K''_{Az} = J_z\omega'' = (J_{z'} + Mr^2)\omega'' \tag{3}$$

[s-a aplicat relația (31.5) și teorema lui Steiner (26.7) $J_z = J_{z'} + Mr^2$, r fiind distanța dintre axele Az și Cz']. Înlocuind în (1) rezultă:

$$\omega'' = \frac{Mv'_c r \sin\theta + J_{z'}\omega'}{J_{z'} + Mr^2}. \tag{4}$$

Pentru placa din figura 31.13, b, din tabela 26.1,9: $J_{z'} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$,

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\theta = \frac{b}{2r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \omega' = 0,$$

deci:

$$\omega'' = \frac{Mv'_c \frac{b}{2}}{\frac{1}{12}M(a^2 + b^2) + \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)} = \frac{3}{2}\frac{v'_c b}{a^2 + b^2}. \tag{5}$$

Pentru ca placa să se oprească, trebuie ca $\omega'' = 0$, sau:

$$Mv'_c r \sin\theta + J_{z'}\omega' = 0. \tag{6}$$

Să se pună acest rezultat sub o altă formă. Alegînd un sistem de referință ca în figura 31.13, c cu originea în centrul instantaneu de rotație I al plăcii (înainte de fixarea punctului A) și axa Iy pe direcția IC rezultă:

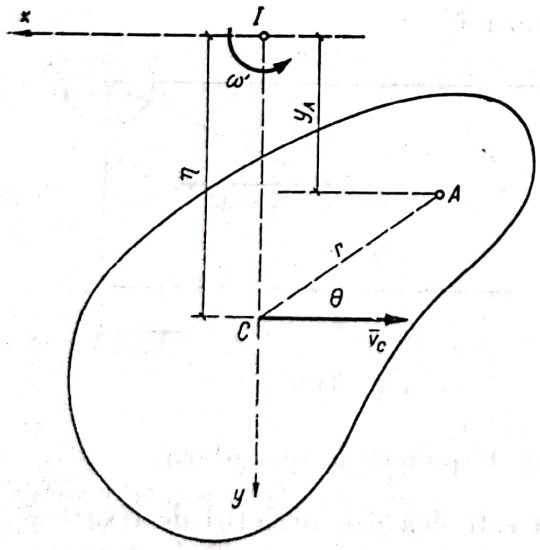


Fig. 31.13, c

$$r\sin\theta = \eta - y_A, \tag{7}$$

unde η și y_A sînt ordonatele centrului maselor C și punctului de fixare.

Înlocuind în (6) și ținînd seamă de relația (16.10):

$$v'_c = \omega' \cdot IC = \omega'\eta \tag{8}$$

rezultă:

$$y_A = \frac{J_{z'} + M\eta^2}{M\eta} = \frac{J_I}{M\eta}, \tag{9}$$

$J_I = I_{z'} + M\eta^2$ reprezentînd momentul de inerție al plăcii în raport cu centrul instantaneu de rotație I.

Locul geometric al punctului A este deci o dreaptă paralelă cu viteza v'_C situată la o distanță egală cu lungimea pendulului simplu, sincron, corespunzător centrului instantaneu de rotație, deci punctul A este centrul de percuție al punctului I.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă placa avea o mișcare de translație $\omega' = 0$, din relația (6) rezultă $r \sin 0 = 0$, deci:

$$0 = 0,$$

punctul A găsindu-se pe suportul vitezei $\bar{v}'_C$.

31.14. Se consideră sistemul din figură format din platforma *1* de greutate $2P$, contragreutățile 2 și 3 de greutate P și scripeții 4 și 5 având momentele de inerție în raport cu axa de rotație $J_z = \lambda \frac{P}{g} r^2$, unde r este raza scripeților și λ — un coeficient adimensional. Greutatea Q cade de la înălțimea h și ciocnește plastic platforma *1* în mijlocul ei. Știind că înainte de ciocnire platforma era în stare de repaus, să se determine distribuția de viteze a sistemului după ciocnire.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, dar din cauza simetriei platforma va avea o mișcare de translație și vitezele unghiulare ale scripeților vor fi egale.

Pentru a elimina percuțiile exterioare $\bar{\mathcal{P}}_4$ și $\bar{\mathcal{P}}_5$ din lagărele scripeților, ciocnirea fiind plastică, se va aplica teorema lui Carnot (31.11):

$$E' - E'' = E_p. \qquad (1)$$

Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire este energia greutății Q:

$$E' = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q}{g} 2gh = Qh, \qquad (2)$$

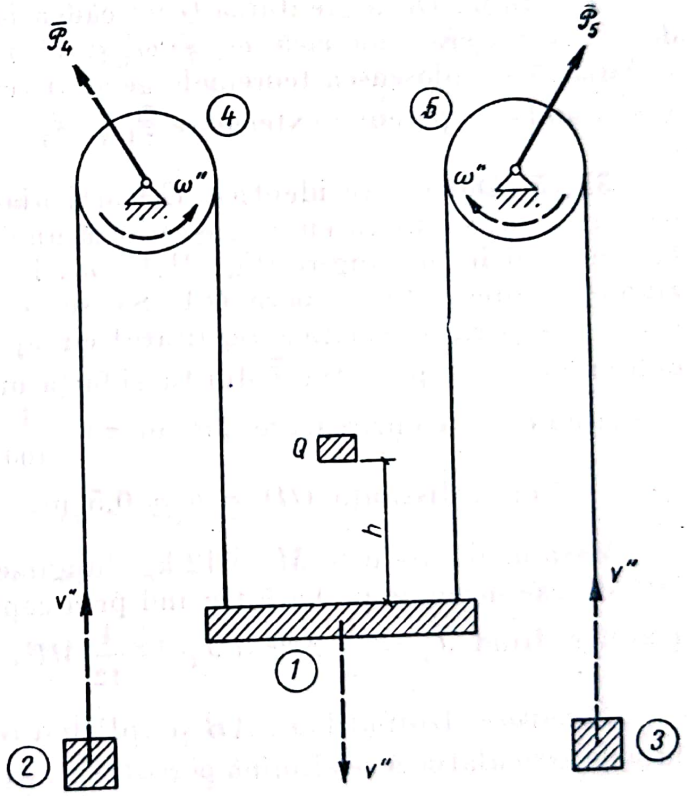


Fig. 31.14

deoarece viteza greutății înainte de ciocnire $v' = \sqrt{2gh}$. După ciocnire platforma și greutatea Q au viteza v'', contragreutățile aceeași viteză, dar dirijată în sus, iar scripeții — viteza unghiulară $\omega'' = \frac{v''}{r}$, deci energia cinetică a sistemului este:

$$E'' = \frac{1}{2}\left(2\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\right) v''^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{P}{g} v''^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} J_z \omega''^2 = \frac{P(4 + 2\lambda) + Q}{2g} v''^2. \qquad (3)$$

Energia cinetică a vitezelor pierdute (31.12) este:

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}(v''-0)^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(v''-v')^2+2\cdot\frac{1}{2}\frac{P}{g}(v''-0)^2+2\cdot\frac{1}{2}J_z(\omega''-0)^2=$$

$$=\frac{P(4+2\lambda)+Q}{2g}v''^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v'^2-\frac{Q}{g}v'v''. \qquad (4)$$

Substituind relațiile (2), (3) și (4) în (1) rezultă:

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v'^2-\frac{P(4+2\lambda)+Q}{2g}v''^2=\frac{P(4+2\lambda)+Q}{2g}v''^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v''^2-\frac{Q}{g}v'v'',$$

de unde:

$$v''=\frac{Q}{P(4+2\lambda)+Q}v'=\frac{\sqrt{2gh}\,Q}{P(4+2\lambda)+Q}. \qquad (5)$$

Observație. Dacă greutatea Q nu cădea la mijlocul platformei, distribuția de viteze nu era simetrică $\omega_4'' \neq \omega_5''$ și avînd nevoie de mai multe ecuații trebuia să se folosească teoremele generale care în acest caz nu permit eliminarea ambelor percuții exterioare $\overline{\mathcal{P}}_4$ și $\overline{\mathcal{P}}_5$.

31.15. Două bare identice, OA articulată în O și AB articulată în A de prima bară, se mișcă cu aceeași viteză unghiulară ω' într-un plan orizontal, barele fiind în prelungire (fig. 31.15, *a*). La un moment dat, firul AD întinzîndu-se oprește brusc bara OA. Să se determine viteza unghiulară ω_2'' a barei AB și să se verifice rezultatul cu ajutorul teoremei lui Carnot. Să se determine apoi percuția $\overline{\mathcal{P}}$ din fir și forța medie de întindere $\overline{\mathcal{T}}$ a firului presupunîndu-se că oprirea are loc în $\tau=\frac{1}{100}$ s și cunoscînd lungimea firului $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ m și distanța $OD=b=0{,}5$ m.

Masa unei bare este $M=12$ kg, lungimea $l=1$ m, momentele de inerție față de axe normale pe bară trecînd prin capătul barei, respectiv prin centrul maselor fiind $J_z=\frac{1}{3}Ml^2$ și $J_{z'}=\frac{1}{12}Ml^2$, iar $\omega'=10\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rezolvare. Izolînd bara AB și aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) față de articulația A se elimină percuția $\overline{\mathcal{P}}_A$ exterioară sistemului (fig. 31.15, *b*):

$$K_{Az}''-K_{Az}'=0. \qquad (1)$$

Momentele cinetice înainte și după întinderea firului se calculează cu teorema lui König (31.6):

$$K_{Az}'=\frac{l}{2}Mv_2'+K_{C_2z}'=\frac{l}{2}Mv_2'+J_{z'}\omega_2'=\frac{l}{2}M\frac{3l}{2}\omega'+\frac{1}{12}Ml^2\omega'=$$

$$=\frac{5}{6}Ml^2\omega', \qquad (2)$$

respectiv cu relația (31.5) (după întinderea firului bara a doua are o mișcare de rotație în jurul lui A):

$$K''_{Az} = J_z\omega''_2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega''_2. \tag{3}$$

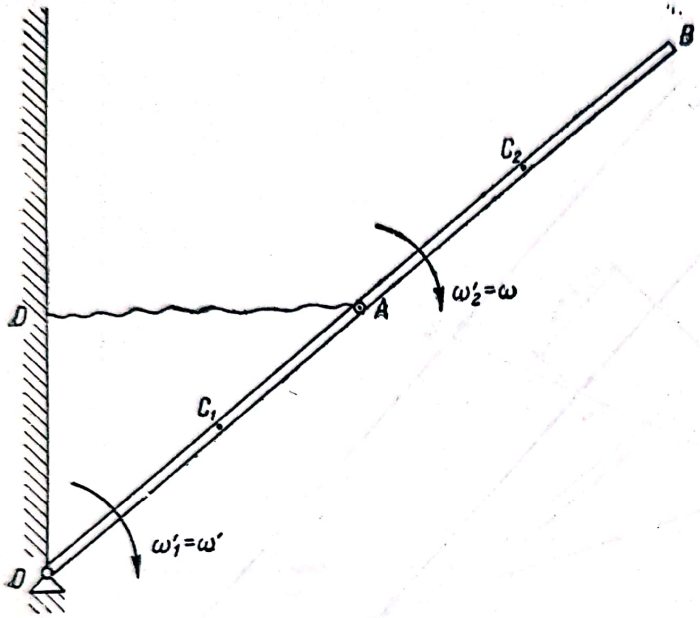


Fig. 31.15, *a*

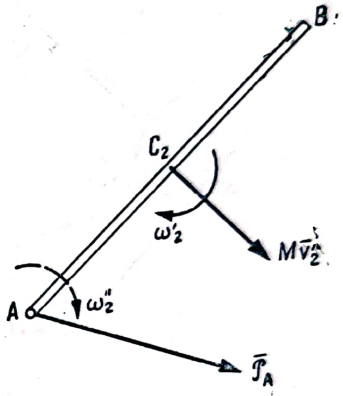


Fig. 31.15, *b*

În relația (2), viteza (14.2) a punctului C_2, $\bar{v}'_2 = \bar{v}'_A + \bar{\omega}'_2 \times \overline{AC}_2$, deci:

$$v'_2 = v_A + \omega'_2\frac{l}{2} = \omega'_1 l + \omega_2\frac{l}{2} = \frac{3}{2}\omega' l. \tag{4}$$

deoarece:

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \omega.$$

Înlocuind pe (2) și (3) în (1) rezultă:

$$\omega''_2 = \frac{5}{2}\omega' = 25\ \text{s}^{-1}. \tag{5}$$

Pentru verificare aplicăm relația (31.13):

$$E'' = \sum\frac{1}{2}m_i\bar{v}'_i\bar{v}''_i, \tag{6}$$

consecință imediată a principiului lui Carnot. Energia cinetică a sistemului după întinderea firului este energia barei a doua:

$$E'' = \frac{1}{2}J_z\omega''^2_2 = \frac{1}{6}Ml^2\omega''^2_2. \tag{7}$$

Cum pentru bara OA vitezele $\bar{v}''_i = 0$ și pe bara AB vitezele unui punct M_i situat la distanța x de articulația A sînt:

$$v'_i = v'_A + \omega'_2 x = \omega'(l + x) \qquad v''_i = \omega''_2 x,$$

ambele normale pe bară (v. fig. 31.15, *c*):

$$\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i' \bar{v}_i'' = \sum_{(AB)} \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i' \bar{v}_i'' =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l v_i' v_i'' \, dm = \frac{1}{2} \frac{M}{l} \int_0^l \omega'(l + x) \, \omega'' \, x dx = \frac{5}{12} M l^2 \omega' \omega_2'' \tag{8}$$

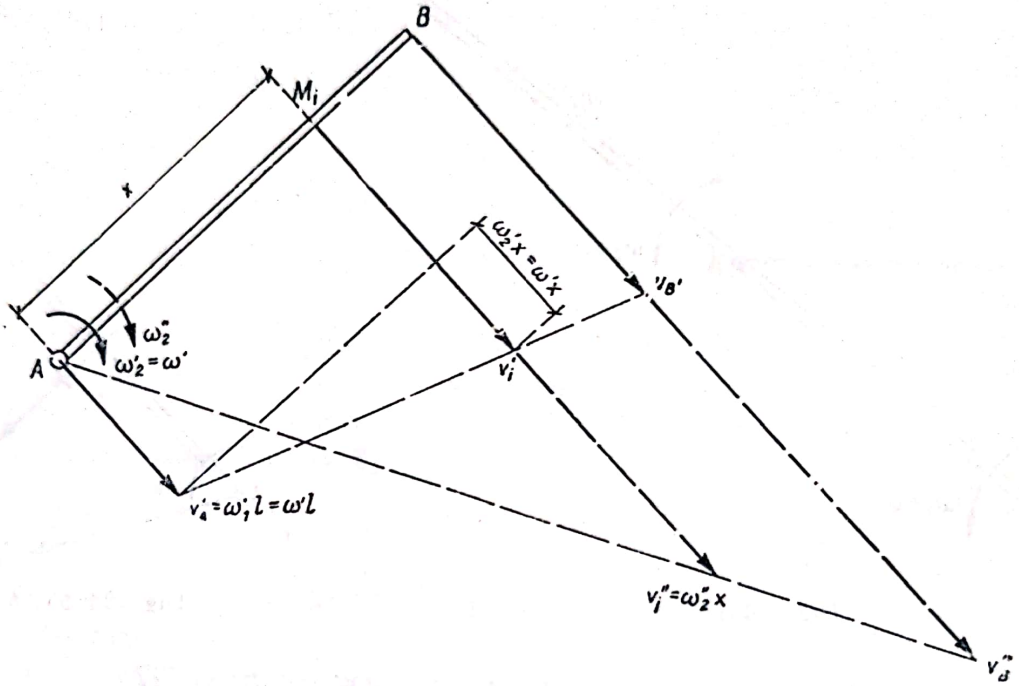


Fig. 31.15, *c*

și înlocuind în (6) rezultă:

$$\frac{1}{6} M l^2 \omega_2'' = \frac{5}{12} M l^2 \omega' \omega_2'',$$

de unde se regăsește valoarea:

$$\omega_2'' = \frac{5}{2} \omega'. \tag{5}$$

Pentru a determina percuția $\bar{\mathcal{P}}$ din fir, se taie firul și se aplică teorema momentului cinetic (31.3) față de punctul *O* pentru a elimina percuția $\bar{\mathcal{P}}_0$ (fig. 31.15,*d*). Alegînd drept pozitiv sensul de rotație al barelor:

$$K_{Oz}'' - K_{Oz}' = - \mathcal{P} l \sin \alpha. \tag{9}$$

Momentele cinetice calculate cu formulele (31.5) și (31.6) sînt:

$$K_{Oz}' = J_z \omega_1' + \frac{3l}{2} M v_2' + K_{C_{2z}}' = \frac{1}{3} M l^2 \omega' + \frac{3l}{2} M \frac{3l}{2} \omega' +$$

$$+ \frac{1}{12} M l^2 \omega' = \frac{8}{3} M l^2 \omega'$$

$$K_{Oz}'' = 0 + \frac{3l}{2} M v_2'' + K_{C_{2z}}'' = \frac{3l}{2} M \frac{l}{2} \omega_2'' + \frac{1}{12} M l^2 \omega_2'' = \frac{5}{6} M l^2 \omega_2''.$$

(Pe fig. 31.15, *d* s-au reprezentat impulsurile centrului maselor C_2 al barei a doua folosite la calculul momentului cinetic cu ajutorul teoremei lui König).

Făcînd înlocuirile în (9) rezultă ținînd seamă și de (5):

$$\mathcal{S} = \frac{(16\omega' - 5\omega_2'')Ml}{6 \sin \alpha} = \frac{7\,Ml\omega'}{12 \sin \alpha}.$$

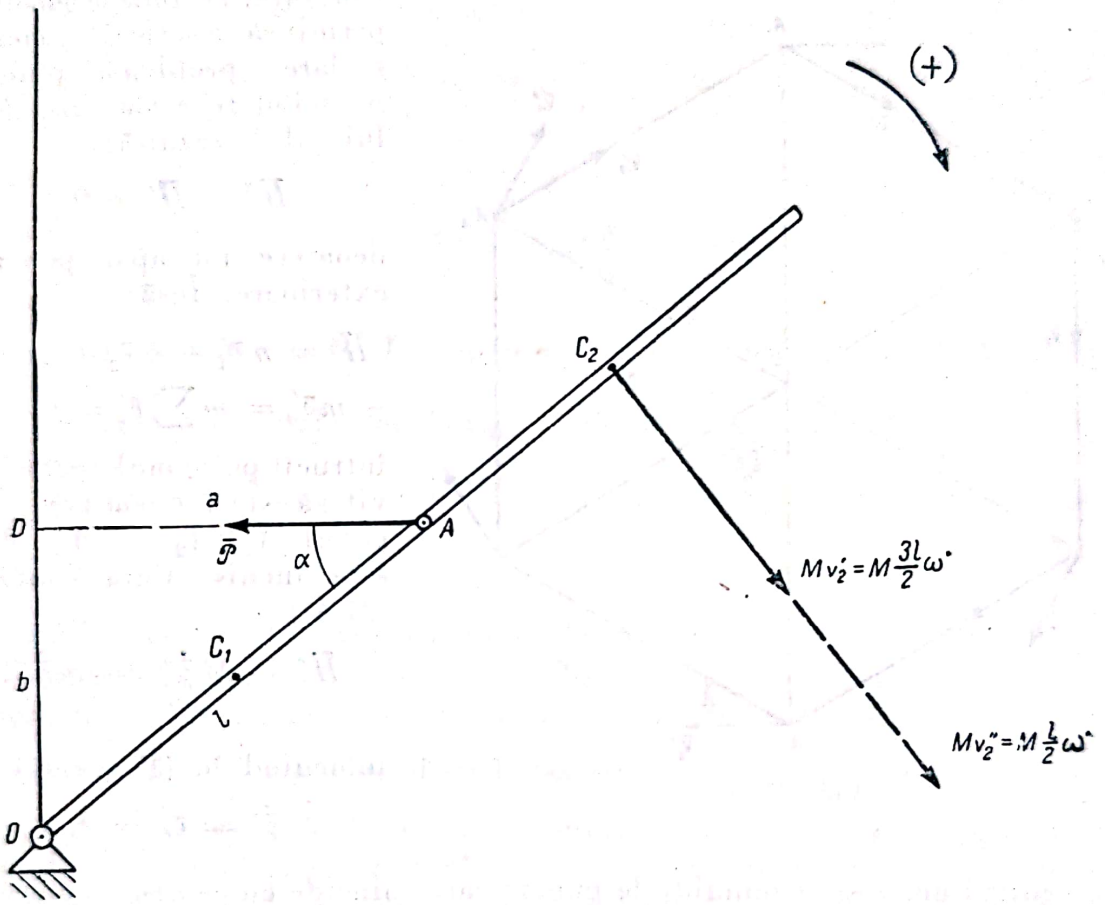


Fig. 31.15, *d*

Presupunînd forța de întindere a firului constantă $\mathcal{F}$, din (31.1) rezultă:

$$\mathcal{S} = \int_0^\tau \mathcal{F}dt = \mathcal{F}\tau \qquad \mathcal{F} = \frac{7\,Ml\omega'}{12\,\tau \sin \alpha}.$$

Pentru aplicația numerică $\cos \alpha = \dfrac{a^2 + l^2 - b^2}{2al} = \dfrac{\frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = 30°$

$$\mathcal{S} = \frac{7 \times 12 \times 1 \times 10}{12 \times 0{,}5} = 140 \text{ kgm/s} = \frac{140}{9{,}81} \text{ kgf.s} \approx 142{,}8 \text{ kgf·s}$$

$$\mathcal{F} = \frac{7 \times 12 \times 1 \times 10}{12 \times 0{,}01 \times 0{,}5} = 14\,000\ N = \frac{1\,400}{9{,}81} \text{ kgf} \approx 1\,428 \text{ kgf}.$$

Scanned with OKEN Scanner

31.16. Punctele materiale A_1, A_2, ..., A_n, de mase egale m, formează la un moment dat un poligon regulat cu n laturi și se mișcă cu viteze egale v', îndreptate în direcțiile laturilor A_1A_2, A_2A_3,...,A_nA_1 ale poligonului. Aceste puncte se leagă brusc prin bare rigide fără greutate. Să se determine vitezele v_i'' ale punctelor și energia pierdută a sistemului. Cazuri particulare $n=2$, $n=3$.

Rezolvare. După ce punctele au fost legate brusc, sistemul are trei grade de libertate. Teoremele generale permit să se scrie trei ecuații scalare (problemă plană). Aplicînd teorema impulsului (31.2) rezultă:

$$\bar{H}'' - \bar{H}' = 0, \qquad (1)$$

deoarece nu apar percuții exterioare. Însă:

$$\bar{H}' = m\bar{v}_1' + m\bar{v}_2' + \ldots + m\bar{v}_n' = m\sum \bar{v}_i' = 0 \qquad (2)$$

întrucît poligonul vectorilor viteză este asemenea cu poligonul A_1, A_2, ..., A_n, deci este închis. Cum conform (31.4):

$$\bar{H}'' = M\dot{\bar{\rho}}'' = nm\dot{\bar{\rho}}'', \qquad (3)$$

înlocuind în (1) rezultă:

$$\dot{\bar{\rho}}'' = \bar{v}_C'' = 0, \qquad (4)$$

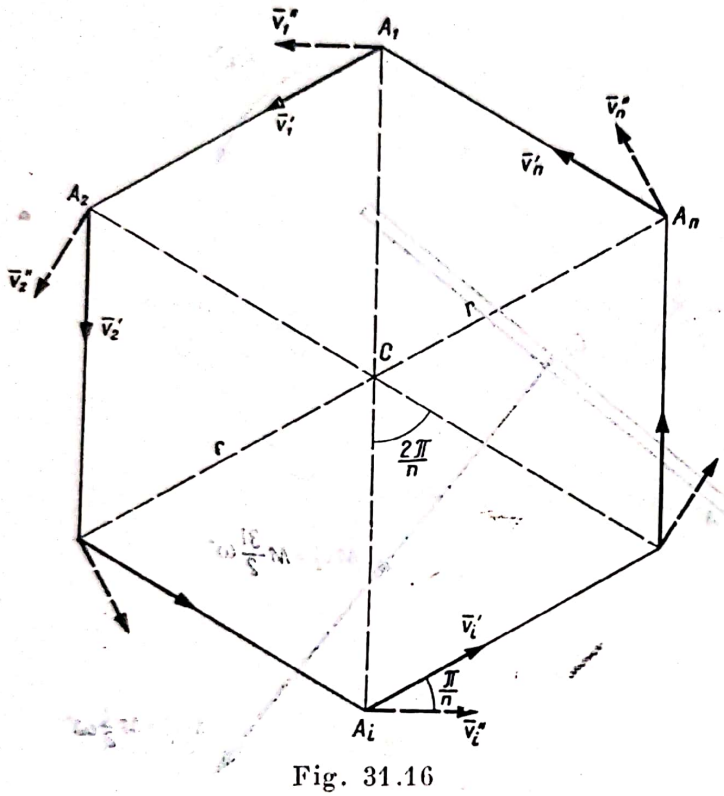


Fig. 31.16

adică centrul maselor sistemului de puncte care coincide cu centrul geometric al poligonului rămîne fix. Deci după rigidizarea punctelor, sistemul va avea o mișcare de rotație în jurul punctului C cu viteza unghiulară ω'', viteza unui punct A_i fiind:

$$v_i'' = \omega'' \cdot CA_i = \omega'' R = v'',$$

unde R este raza cercului exînscris poligonului.

Pentru determinarea lui ω'' se poate aplica teorema momentului cinetic sau teorema lui Carnot. Aplicînd-o sub forma (31.13):

$$E'' = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i' \bar{v}_i'' \qquad (5)$$

se obține energia cinetică după rigidizare:

$$E'' = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i''^2 = \frac{1}{2} nmv''^2 \qquad \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i' \bar{v}_i'' = \frac{1}{2} nmv'v'' \cos\frac{\pi}{n}$$

deoarece unghiul dintre $\bar{v}_1'$ și $\bar{v}_1''$ este $\frac{\pi}{2}$ (fig. 31.16). Înlocuind în (5) rezultă:

$$v'' = v' \cos\frac{\pi}{n} \qquad \omega'' = \frac{v'}{R}\cos\frac{\pi}{n}. \tag{6}$$

Energia pierdută a sistemului este:

$$\Delta E = E' - E'' = \frac{1}{2}nmv'^2 - \frac{1}{2}nmv''^2 = \frac{1}{2}nm\left(v'^2 - v'^2\cos^2\frac{\pi}{n}\right) = E'\sin^2\frac{\pi}{2},$$

deci:

$$\frac{\Delta E}{E'} = \sin^2\frac{\pi}{n} \tag{7}$$

pentru cazurile particulare. Pentru $n = 2$: $\frac{\Delta E}{E'} = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$, toată energia este pierdută, punctele oprindu-se. Pentru $n = 3$, $v'' = v'\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}v'$, $\frac{\Delta E}{E'} = \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$, trei sferturi din energia cinetică inițială se pierde în urma rigidizării.

31.17. Placa 1, de masă M_1, având forma unui triunghi dreptunghic isoscel, de catetă a, ciocnește cu viteza $v_1' = \sqrt{2}v_0$, placa 2, un pătrat de latură a și masă $M_2 = 2M_1$, care stătea în repaus (fig. 31.17, *a*). Cunoscînd coeficientul de restituire $k = \frac{5}{8}$, se cere distribuția de viteze ale plăcilor după ciocnire determinîndu-se vitezele $\bar{v}_1''$ și $\bar{v}_2''$ ale centrelor maselor C_1 și C_2, vitezele unghiulare ω_1'' și ω_2'' și vitezele v_{A1}'' și v_{A2}'' ale punctelor A care se ciocnesc. Momentele de inerție ale plăcilor în raport cu axele normale pe planul lor C_1z și C_2z sînt $J_{1z} = \frac{1}{9}M_1a^2$, $J_{2z} = \frac{1}{6}M_2a^2$.

Rezolvare. Izolînd plăcile (fig. 31.17, *b* și *c*), necunoscutele scalare ale problemei sînt vitezele v_{1x}'', v_{1y}'', ω_1'', și v_{2x}'', v_{2y}'', ω_2'' precum și percuția $\mathcal{P}$ dintre plăci (șapte necunoscute). Aplicînd teoremele generale (31.2) și (31.3) (în raport cu centrele maselor), pentru placa 1 (fig. 31.17, *b*) rezultă:

$$M_1\left(v_{1x}'' - v_1'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\mathcal{P} \tag{1}$$

$$M_1\left(v_{1y}'' - v_1'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \tag{2}$$

$$J_{1z}(\omega_1'' - 0) = \mathcal{P}\frac{a}{3}, \tag{3}$$

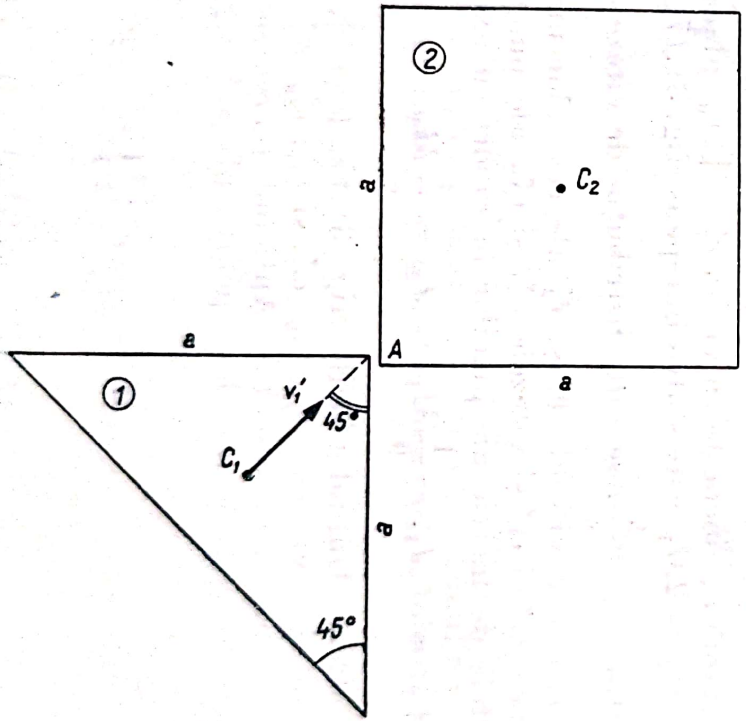


Fig. 31.17, *a*

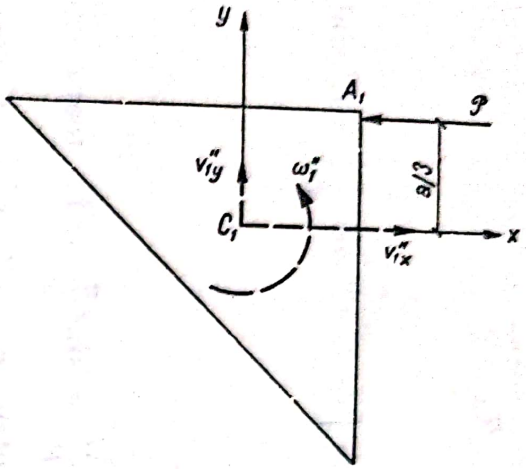


Fig. 31.17, *b*

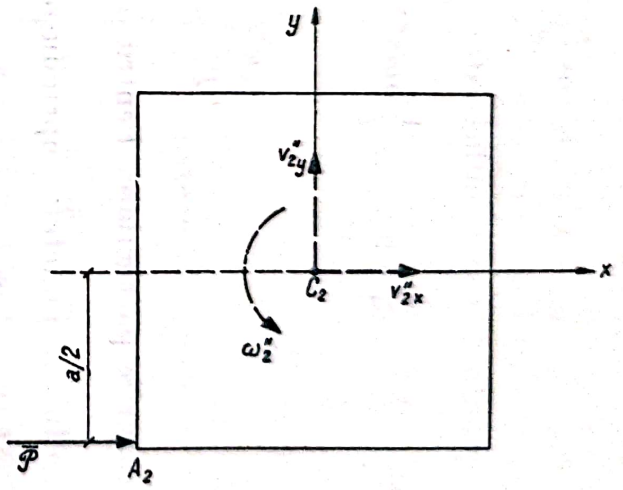


Fig. 31.17, *c*

și pentru placa 2 (fig. 31.17, *c*):

$$M_2(v''_{2x} - 0) = \mathcal{S} \tag{4}$$

$$M_2(v''_{2y} - O) = 0 \tag{5}$$

$$J_{2z}(\omega''_2 - O) = \mathcal{S}\frac{a}{2}. \tag{6}$$

A șaptea relație se obține din expresia (31.8) a coeficientului de restituire:

$$k = \frac{v''_{A2x} - v''_{A1x}}{v'_{A1x} - v'_{A2x}} \tag{7}$$

(normala la suprafața ciocnită este direcția Ax). Cum conform (14.2):

$$\bar{v}''_{A1} = \bar{v}''_1 + \bar{\omega}''_1 \times \overline{C_1A_1} = v''_{1x}\bar{i} + v''_{1y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega''_1 \\ \frac{a}{3} & \frac{a}{3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(v''_{1x} - \frac{1}{3}\omega''_1 a\right)\bar{i} + \left(v''_{1y} + \frac{1}{3}\omega''_1 a\right)\bar{j} \tag{8}$$

$$\bar{v}''_{A2} = \bar{v}''_2 + \bar{\omega}'' \times \overline{C_2A_2} = v''_{2x}\bar{i} + \bar{v}''_{2y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega''_2 \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(v''_{2x} + \frac{1}{2}\omega''_2 a\right)\bar{i} + \left(v''_{2y} - \frac{1}{2}\omega''_2 a\right)\bar{j} \tag{9}$$

și:

$$\bar{v}'_{A1} = \bar{v}'_1 = v'_1\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + v'_1\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} = v_0\bar{i} + v_0\bar{j} \; ; \; v'_{A2} = 0,$$

relația (7) devine, ținînd seamă și de valoarea $k = \frac{5}{8}$:

$$v''_{2x} + \frac{1}{2}\omega''_2 a - v''_{1x} + \frac{1}{3}\omega''_1 a = \frac{5}{8}v_0. \tag{10}$$

Din (1)... (6) se obține, ținînd seamă de datele problemei:

$$v''_{1x} = v_0 - \frac{\mathcal{S}}{M_1} \quad v''_{1y} = v_0 \quad \omega''_1 = \frac{3\mathcal{S}}{M_1 a}$$

$$v''_{2x} = \frac{\mathcal{S}}{M_2} = \frac{P}{2M_1} \quad v''_{2y} = 0 \quad \omega''_2 = \frac{3P}{M_2 a} = \frac{3\mathcal{S}}{2M_1 a} \tag{11}$$

și înlocuind în (10) rezultă :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}M_1 v_0,$$

deci relațiile (11) devin:

$$v''_{1x} = \frac{v_0}{2} \quad v''_{1y} = v_0 \quad \omega''_1 = \frac{3}{2}\frac{v_0}{a}$$
$$v''_{2x} = \frac{v_0}{4} \quad v''_{2y} = 0 \quad \omega''_2 = \frac{3}{4}\frac{v_0}{a} \qquad (12)$$

și înlocuind în (8) și (9), componentele vitezelor punctelor A care se ciocnesc sînt:

$$v''_{A1x} = 0 \quad v''_{A1y} = \frac{3}{2}v_0 \quad v''_{A2x} = \frac{5}{8}v_0 \quad v''_{A2y} = -\frac{3}{8}v_0.$$

31.18. Sfera omogenă *1* ciocnește sistemul format din barele *2*, *3* și *4* articulate în punctele O_2, O_3 și O_4, bara *4* ciocnind la rîndul ei sfera omogenă *5* (fig. 31.18, *a*). Știind că înainte de ciocnire sfera *1* se rostogolea cu viteza v_0 pe un plan orizontal, celelalte corpuri fiind în repaus, să se determine viteza v''_5

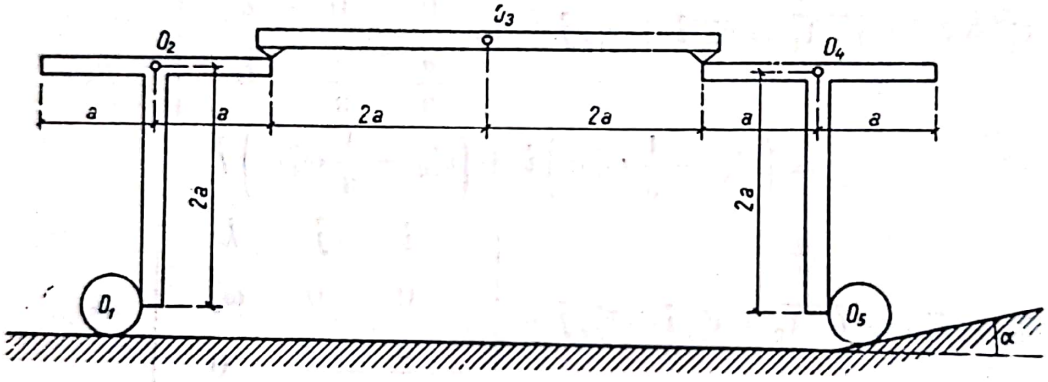


Fig. 31.18, *a*

cu care se rostogolește sfera *5* după ciocnire și coeficientul de frecare μ dintre sfera *5* și planul înclinat. Se cunosc masele barelor $M_2 = M_3 = M_4 = M$, masele sferelor $M_1 = M_5 = \frac{1}{18}M$, momentele de inerție față de axele O_{1z}, $O_{2z}, \ldots, O_{5z}$ normale pe planul în care are loc mișcarea $J_1 = J_5 = \frac{2}{5}M_1 r^2$, $J_2 = J_4 = \frac{5}{6}Ma^2$. $J_3 = \frac{4}{3}Ma^2$, r fiind raza sferelor, unghiul α $\left(\cos\alpha = \frac{4}{5}\right)$ și coeficienții de restituire $k_{12} = k_{45} = \frac{9}{10}$, $k_{23} = k_{34} = \frac{3}{4}$. Se neglijează frecarea dintre corpurile sistemului.

Rezolvare. Ciocnirile corpurilor avînd loc succesiv, vor fi studiate pe rînd.

Ciocnirea corpurilor 1 și 2 (fig. 31.18, *b*). Pentru corpul *1* se aplică teoremele generale (31.2) și (31.3) față de O_2:

$$M_1(v''_1 - v'_1) = -\mathcal{S}_{12} \qquad (1)$$
$$0 = P_{1n} \qquad (2)$$
$$-J_1(\omega''_1 - \omega'_1) = \mathcal{S}_{1t}r, \qquad (3)$$

unde $v_1' = v_0$, iar $\mathcal{P}_{1n}$ și $\mathcal{P}_{1t}$ sînt componentele tangențiale și normale ale percuției dintre sferă și planul orizontal;

$$\mathcal{P}_{1t} \leqslant \mathcal{P}_{1n}. \tag{4}$$

Rezolvînd sistemul rezultă $\mathcal{P}_{1n} = \mathcal{P}_{1t} = 0$, $\omega_1'' = \omega_1' = \frac{v_0}{r}$ și cum din (1) $v_1'' \neq v_1'$, după ciocnire sfera *1* nu se mai rostogolește fără alunecare, adică $v_1'' \neq \omega_1'' r$.

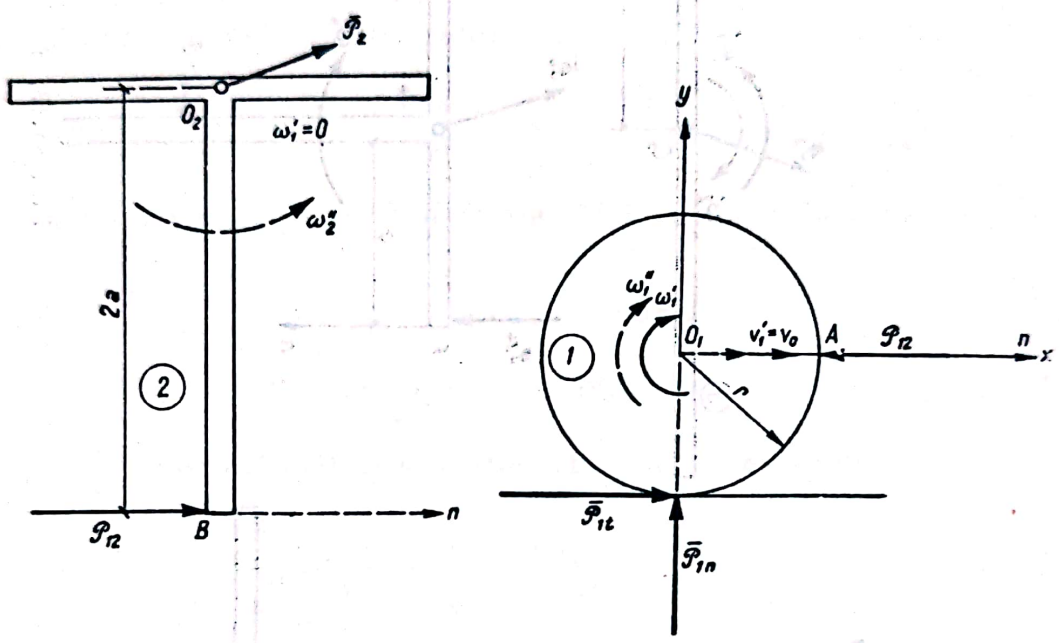


Fig. 31.18, *b*

Pentru corpul *2* se aplică teorema momentului cinetic față de O_2:

$$J_2(\omega_2'' - 0) = 2\mathcal{P}_{12}\, a. \tag{5}$$

În sfîrșit, din (31.8):

$$k_{12} = \frac{v_{Bn}'' - v_{An}}{v_{An}' - v_{Bn}''} = \frac{2a\omega_2'' - v_1''}{v_1'' - 0}, \tag{6}$$

deoarece $v_{An} = (\bar{v}_1 + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1A}) \cdot \bar{n} = \bar{v}_1 \cdot \bar{n} = v_{1n}$, $\overline{O_1A}$ și $\bar{n}$ fiind coliniare.

Rezolvînd ecuațiile (1), (5) și (6) se obține:

$$v_1'' = \frac{4a^2M_1 - k_{12}J_2}{4a^2M_1 + J_2} v_1' = -\frac{v_0}{2}; \quad \omega_2'' = \frac{2aM_1(1 + k_{12})v_1'}{4a^2M_1 + J_2} = \frac{v_0}{5a}. \tag{7}$$

Ciocnirea corpurilor 2 și 3 (fig. 31.18, *c*). Aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) față de O_2 și O_3:

$$J_2(\omega_2'' - \omega_2') = -\mathcal{P}_{23}a \tag{8}$$

$$-J_3(\omega_3'' - 0) = -2\mathcal{P}_{23}a \tag{9}$$

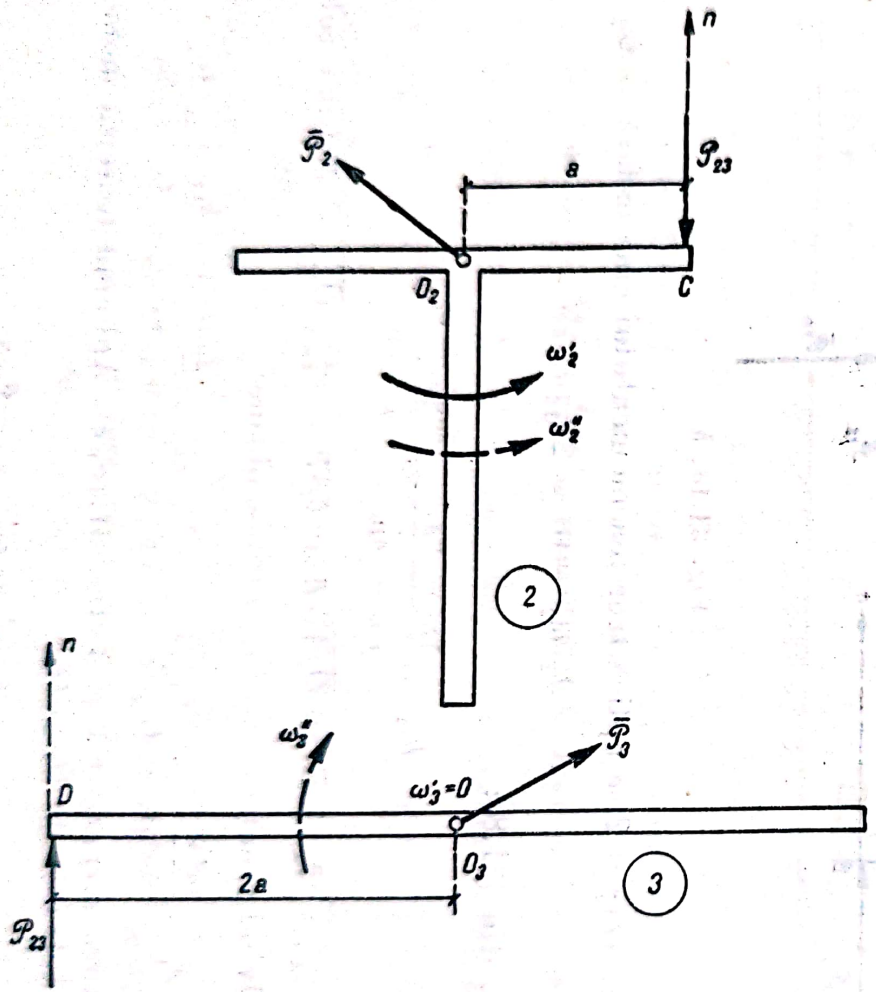


Fig. 31.18, *c*

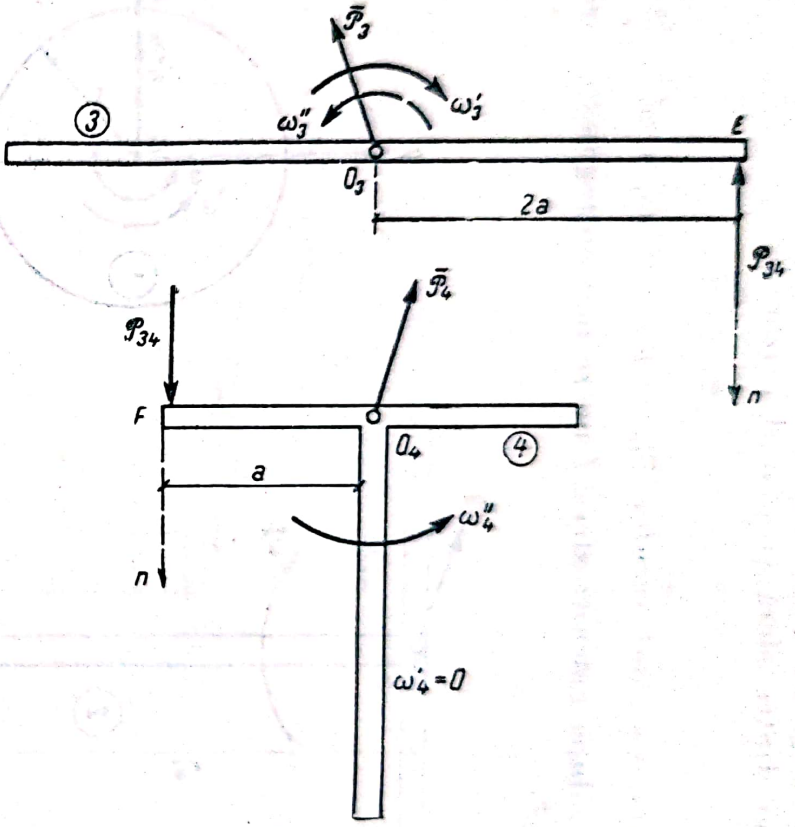


Fig. 31.18, *d*

a fost ales, ca sens pozitiv, sensul trigonometric, viteza unghiulară a barei *2* înainte de ciocnire ω_2' fiind viteza unghiulară a barei *2* în urma ciocnirii cu sfera (1) dată de relația (7), deci $\omega_2' = \frac{v_0}{5a}$. Expresia coeficientului de restituire (31.8) este:

$$k_{23} = \frac{v_D'' - v_{Cn}''}{v_{Cn}' - v_{Dn}'} = \frac{2a\omega_3'' - a\omega_2''}{a\omega_2' - 0}. \tag{10}$$

Rezolvînd sistemul (8) ... (10) se obține:

$$\omega_2'' = \frac{4J_2 - k_{23}J_3}{4J_2 + J_3}\omega_2' = \frac{v_0}{10a} \qquad \omega_3'' = \frac{2J_2(1 + k_{23})}{4J_2 + J_3}\omega_2' = \frac{v_0}{8a}. \tag{11}$$

Ciocnirea dintre corpurile 3 *și* 4 (fig. 31.18,*d*). Se aplică teorema (31.3) față de O_3 și O_4:

$$J_3[\omega_3'' - (-\omega_3')] = 2a\mathcal{P}_{34} \tag{12}$$

$$J_4(\omega_4'' - 0) = a\mathcal{P}_{34}, \tag{13}$$

unde $\omega_3' = \frac{v_0}{8a}$ a fost calculat prin relația (11). Din (31.8) rezultă:

$$k_{34} = \frac{v_{Fn}'' - v_{En}''}{v_{En}' - v_{Fn}'} = \frac{a\omega_4'' - (-2a\omega_3'')}{2a\omega_3' - 0}. \tag{14}$$

Rezolvînd sistemul (12) ... (14) se obține:

$$\omega_3'' = \frac{-J_3 + 4k_{34}J_4}{J_3 + 4J_4}\omega_3' = \frac{v_0}{32a} \qquad \omega_4'' = \frac{2J_3(1 + k_{34})}{J_3 + 4J_4}\omega_3' = \frac{v_0}{8a}. \tag{15}$$

Ciocnirea corpurilor 4 *și* 5 (fig. 31.18, *e*). Pentru corpul *4* se scrie ecuația (31.3) față de O_4:

$$J_4(\omega_4'' - \omega_4') = -2a\mathcal{P}_{45}, \tag{16}$$

unde $\omega_4' = \frac{v_0}{8a}$ este dat de ecuația (15). Pentru corpul *5* se aplică ambele teoreme generale:

$$M_5(v_5'' - 0) = \mathcal{P}_{45}\cos\alpha - \mathcal{P}_{5t} \tag{17}$$

$$0 = \mathcal{P}_{5n} - \mathcal{P}_{45}\sin\alpha \tag{18}$$

$$-J_5(\omega_5'' - 0) = -\mathcal{P}_{5t}r, \tag{19}$$

unde:

$$\mathcal{P}_{5t} \leqslant \mu\,\mathcal{P}_{5n} \qquad v_5'' = r\omega_5'' \tag{20}$$

(rostogolire fără alunecare). În sfîrșit:

$$k_{45} = \frac{v''_{Hn} - v''_{Gn}}{v'_{Gn} - v'_{Hn}} \quad \frac{v''_5 \cos\alpha - 2a\omega''_4}{2a\omega'_4 - 0}, \tag{21}$$

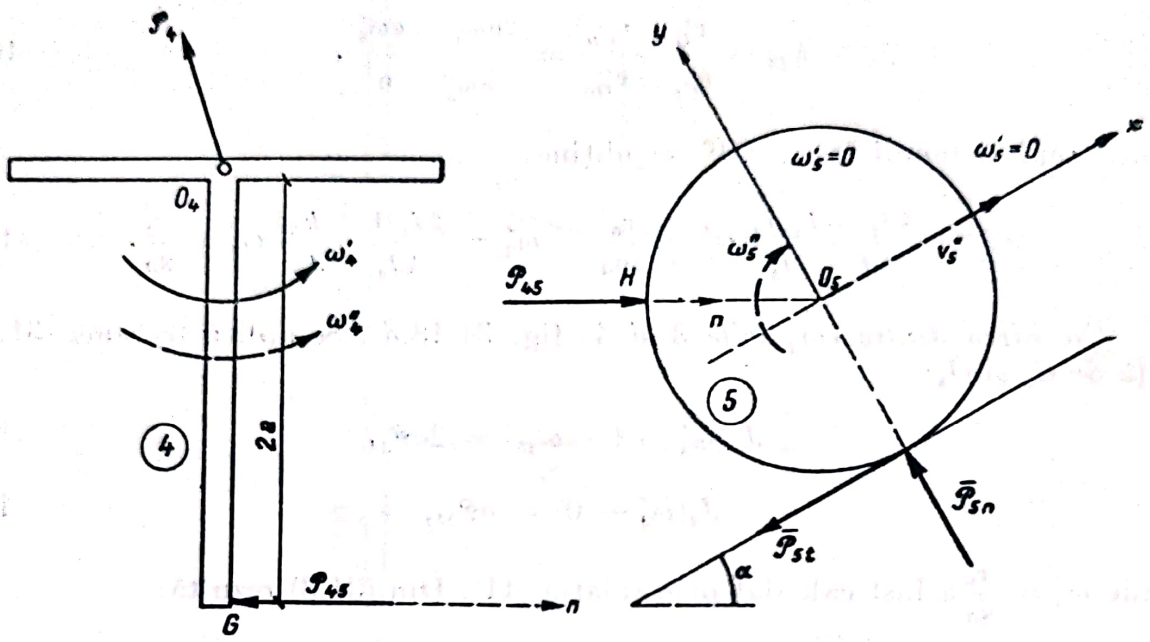


Fig. 31.18, *e*

deoarece $v_{Hn} = (\bar{v}_5 + \bar{\omega}_5 \times \bar{O}_5\bar{H})\,\bar{n} = \bar{v}_5\,\bar{n} = v_{5n}$, $\bar{O}_5\bar{H}$ și $\bar{n}$ fiind coliniare. Rezolvînd sistemul (17) ... (21) rezultă:

$$\omega''_4 = \frac{J_4 \cos^2\alpha - 4k_{45}\,a^2\left(M_5 + \frac{J_5}{r^2}\right)}{J_4 \cos^2\alpha + 4a^2\left(M_5 + \frac{J_5}{r^2}\right)}\,\omega'_4 = \frac{3v_0}{80a};$$

$$v''_5 = \frac{2aJ_4\,(1 + k_{45})\cos\alpha}{J_4 \cos^2\alpha + 4\,a^2\left(M_5 + \frac{J_5}{r^2}\right)}\,\omega'_4 = \frac{3v_0}{8};$$

$$\omega''_5 = \frac{v''_5}{r} = \frac{3v_0}{8r},$$

și:

$$\mu \geqslant \frac{\mathcal{P}_{5t}}{\mathcal{P}_{5n}} = \frac{J_5 \operatorname{ctg}\alpha}{M_5 r^2 + J_5} = \frac{8}{21}.$$

31.19. Sub ce unghi α față de orizontală trebuie să cadă o minge de tenis pe sol, pentru ca în urma ciocnirii să sară pe verticală în sus. Masa mingii

este M, raza ei r, momentul ei de inerție față de un diametru este $J = \frac{2}{3} Mr^2$, coeficientul de frecare dintre minge și sol μ, și coeficientul de restituire este k. Înainte de ciocnire mingea avea o mișcare de translație cu viteza v_1'.

Rezolvare. Aplicînd teorema impulsului (31.2) și teorema momentului cinetic (31.3) față de axa Oz se obține:

$$M(0 - v_1' \cos\alpha) = -\mathfrak{P}_t \qquad (1)$$

$$M[v_1'' - (-v_1' \sin\alpha)] = \mathfrak{P}_n \qquad (2)$$

$$-J(\omega_1'' - 0) = -\mathfrak{P}_t r, \qquad (3)$$

unde $\mathfrak{P}_n$ și $\mathfrak{P}_t$ (fig. 31.19) sînt componentele percuției dintre minge și sol, legate între ele de relația:

$$\mathfrak{P}_t = \mu \mathfrak{P}_n. \qquad (4)$$

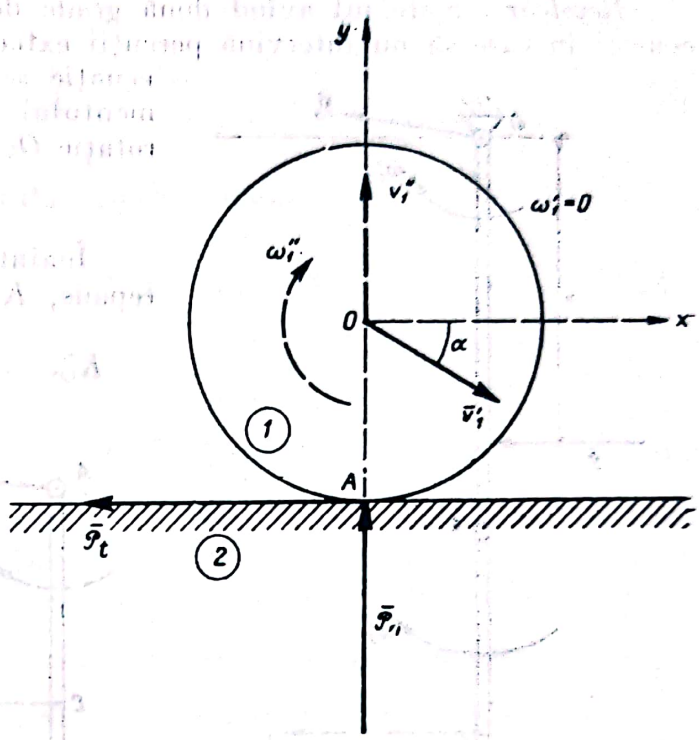


Fig. 31.19

Din (31.8) rezultă:

$$k = \frac{v_{A2y}'' - v_{A1y}''}{v_{A1y}' - v_{A2y}'} = \frac{0 - v_1''}{-v_1' \sin\alpha - 0}, \qquad (5)$$

deoarece $\bar{v}_{A1y} = (\bar{v}_1 + \bar{\omega} \times \overline{OA})\bar{j} = \bar{v}_1 \cdot \bar{j} = v_{1y}$, $\overline{OA}$ și $\bar{j}$ fiind coliniare, și $\bar{v}_{A2} = 0$, deoarece solul (corpul 2) rămîne în repaus.

Rezolvînd sistemul se obține:

$$v_1'' = kv_1' \sin\alpha \qquad \omega_1'' = \frac{Mrv_1' \cos\alpha}{J} = \frac{3v_1' \cos\alpha}{2r}, \qquad (6)$$

mingea căpătînd și o mișcare de rotație, și:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu(1+k)}. \qquad (7)$$

Pentru $\alpha > \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\mu(1+k)}$ mingea va sări înapoi.

31.20. Sistemul din figura 31.20, *a*, alcătuit din două bare omogene de masă M și lungime l articulate în punctele O și A, se găsește în stare de repaus. Să se determine vitezele unghiulare ω_1'' și ω_2'' dacă se ciocnește una dintre bare, percuția $\bar{\mathfrak{P}}$ normală pe bare și distanța x fiind cunoscute.

Se cunosc momentele de inerție $J_0 = \frac{1}{3} Ml^2$ (față de capătul barei) și $J_C = \frac{1}{12} Ml^2$ față de centrul maselor.

Rezolvare. Sistemul având două grade de libertate trebuie scrise două ecuații în care să nu intervină percuții exterioare necunoscute. O astfel de ecuație se obține aplicînd teorema momentului cinetic (31.3) față de axa de rotație Oz:

$$K''_{Oz} - K'_{Oz} = \mathfrak{P}x. \qquad (1)$$

Înainte de ciocnire sistemul era în repaus, $K'_{Oz} = 0$, și după ciocnire:

$$K''_{Oz} = J_0\omega''_1 + M_2 v''_C \frac{3l}{2} + J_C\omega''_2, \qquad (2)$$

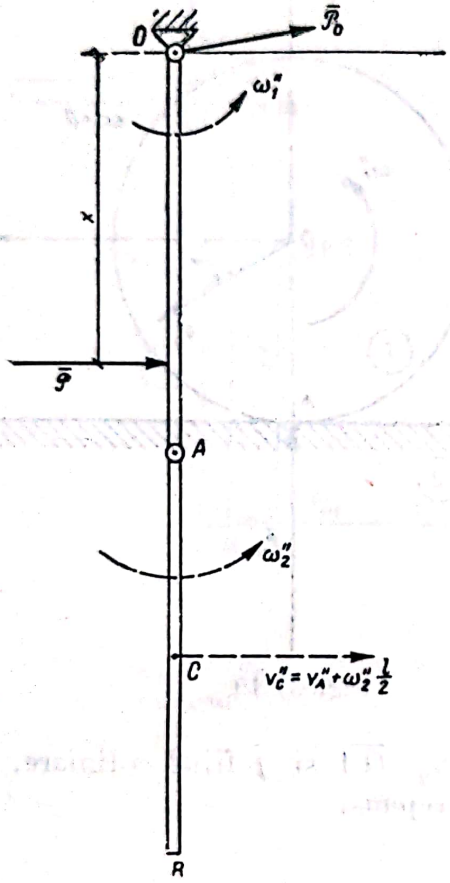


Fig. 31.20, *a*

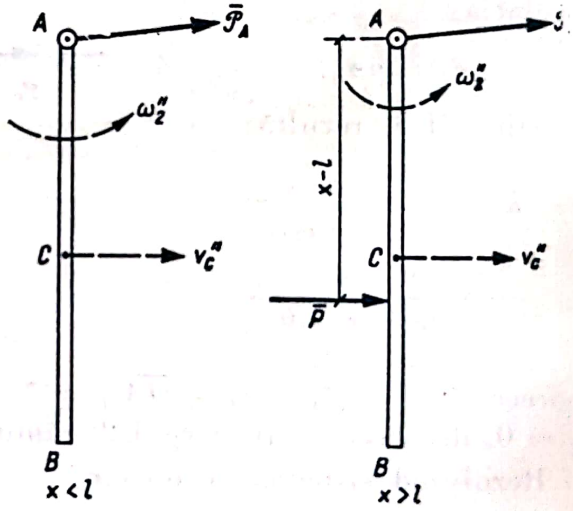


Fig. 31.20, *b*

pentru bara a doua aplicîndu-se teorema lui König (31.6). Viteza centrului maselor al barei a doua este conform (14.2):

$$\bar{v}''_C = \bar{v}_A + \overline{\omega''_2} \times \overline{AC} \qquad v''_C = \omega''_1 l + \omega''_2 \frac{l}{2}, \qquad (3)$$

Înlocuind în (1) și ținînd seamă de datele problemei se obține:

$$\frac{Ml^2}{6}(11\omega''_1 + 5\omega''_2) = \mathfrak{P}x. \qquad (4)$$

O a doua ecuație se poate obține izolînd bara AB și aplicînd teorema momentului cinetic față de punctul A (fig. 31.20,*b*):

$$K'_{Az} = 0 \qquad K''_{Az} = M_2 v'' \frac{l}{2} + J_C\omega''_2 = \frac{Ml^2}{6}(3\omega''_1 + 2\omega''_2).$$

Pentru $x < l$ percuția $\bar{\mathfrak{P}}$ nu acționează asupra barei AB, deci:

$$\frac{Ml^2}{6}(3\omega_1'' + 2\omega_2'') = 0 \tag{5}$$

și din (4) și (5):

$$\omega_1'' = \frac{12\mathfrak{P}x}{7Ml^2} \qquad \omega_2'' = -\frac{18\mathfrak{P}x}{7Ml^2} \qquad x \leqslant l. \tag{6}$$

Pentru $x > l$ teorema momentului cinetic devine:

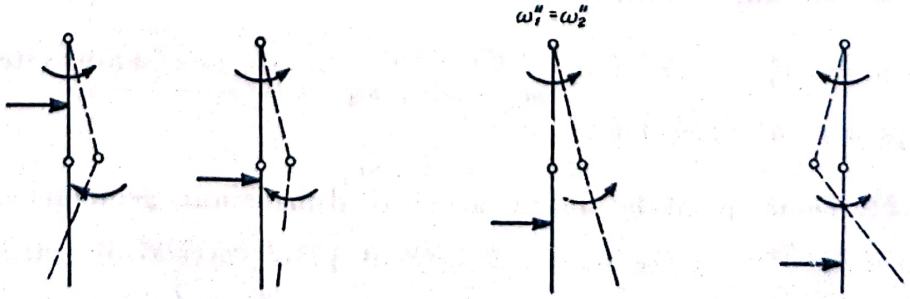
$$\frac{Ml^2}{6}(3\omega_1'' + 2\omega_2'') = \mathfrak{P}(x - l) \tag{5'}$$

și din (4) și (5'):

$$\omega_1'' = \frac{6\mathfrak{P}(5l - 3x)}{7Ml^2} \qquad \omega_2'' = \frac{6\mathfrak{P}(8x - 11l)}{7Ml^2} \qquad x > l. \tag{6'}$$

În tabela următoare sînt date valorile vitezelor unghiulare ω_1'' și ω_2'', figurile din tabelă indicînd sensul de mișcare al barelor imediat după ciocnire. Valoarea $\omega_1'' = 0$ pentru $x = \frac{5l}{3} = l + \frac{2l}{3}$ era de așteptat, deoarece în acest caz bara AB era ciocnită în centrul său de percuție, $\bar{\mathfrak{P}}_A = 0$ și barei OA nu i se imprima nici o viteză unghiulară inițială.

x	0		l		$\frac{11l}{8}$		$\frac{16l}{11}$		$\frac{5l}{3}$		$2l$
ω_1''	0	$+$	$\frac{12\mathfrak{P}}{7Ml}$	$+$	$\frac{3\mathfrak{P}}{4Ml}$	$+$	$\frac{6\mathfrak{P}}{11Ml}$	$+$	0	$-$	$\frac{-6\mathfrak{P}}{7Ml}$
ω_2''	0	$-$	$\frac{-18\mathfrak{P}}{7Ml}$	$-$	0	$+$	$\frac{6\mathfrak{P}}{11Ml}$	$+$	$\frac{2\mathfrak{P}}{Ml}$	$+$	$\frac{30\mathfrak{P}}{7Ml}$
						$\omega_1'' = \omega_2''$					



C. PROBLEME NEREZOLVATE

31.21. Două vagonete avînd greutățile $G_1 = 400$ kgf și $G_2 = 600$ kgf se îndreaptă unul spre celălalt cu vitezele $v_1' = 4$ m/s și $v_2' = 2$ m/s. Cunoscînd coeficientul de restituire $k = \frac{3}{4}$ să se determine vitezele vagonetelor după ciocnire v_1'' și v_2'' și pierderea de energie cinetică ΔE în urma ciocnirii.

Răspuns: $v_1'' = \dfrac{(G_1 - kG_2)\, v_1' + G_2 (1 + k)\, v_2'}{G_1 + G_2} = -2{,}3$ m/s,

$$v_2'' = \frac{G_1(1 + k)\, v_1' + (G_2 - kG_1)\, v_2'}{G_1 + G_2} = 2{,}2 \text{ m/s}$$

(sensul vitezei v_1' fiind sensul pozitiv al vitezelor);

$$\Delta E = \frac{G_1 G_2}{2 (G_1 + G_2)\, g} (v_1' - v_2')^2 (1 - k^2) = 1\,890 \ J$$

și cum energia cinetică inițială $E' = \dfrac{G_1 v_1'^2 + G_2 v_2'^2}{2g} = 4\,400$ J, pierderea relativă de energie cinetică este $\dfrac{\Delta E}{E'} \approx 43\%$.

31.22. O minge cade pe sol de la înălțimea h_0 și în urma ciocnirii se ridică la înălțimea h_1. Să se determine coeficientul de restituire k dintre minge și sol. La ce înălțime h_n se ridică mingea după ce s-a ciocnit de n ori cu solul?

Răspuns: $k = \sqrt{\dfrac{h_1}{h_0}}$, $h_n = k^{2n} h_0 = \left(\dfrac{h_1}{h_0}\right)^n h_0$.

31.23. Sferele *1* și *3* de mase $m_1 = 120$ g și $m_3 = 100$ g ciocnesc cu vitezele $v_1' = 2{,}5$ m/s și $v_3' = -1$ m/s sfera 2 de masă $m_2 = 180$ g care stătea în repaus ($v_2' = 0$). Știind că ciocnirea este plastică, să se determine viteza sferelor după ciocnire.

Răspuns: $v_1'' = v_2'' = v_3'' = \dfrac{m_1 v_1' + m_3 v_3'}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}5$ m/s (sensul vitezei v_1' fiind sensul pozitiv al vitezelor).

31.24. Două pendule avînd aceleași dimensiuni geometrice, dar densități diferite $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = \lambda$, se pot roti într-un plan vertical în jurul articulațiilor O_1 și O_2 (fig. 31.24). Pendulul *1* se depărtează față de verticală cu un-

ghiul α' şi i se dă drumul. Cunoscînd masa M_1, lungimea $l = O_1C_1$ şi momentul de inerţie J_1 faţă de O_1 al pendulului *1*, să se determine viteza lui unghiulară ω_1' în momentul în care ciocneşte pendulul *2* care stătea în repaus. Să se determine apoi vitezele unghiulare ale pendulelor ω_1'', ω_2'' după ciocnire, precum şi unghiurile maxime α'' şi β'' formate de cele două pendule cu verticala, coeficientul de restituire k şi distanţa a fiind date. Aplicaţie numerică:

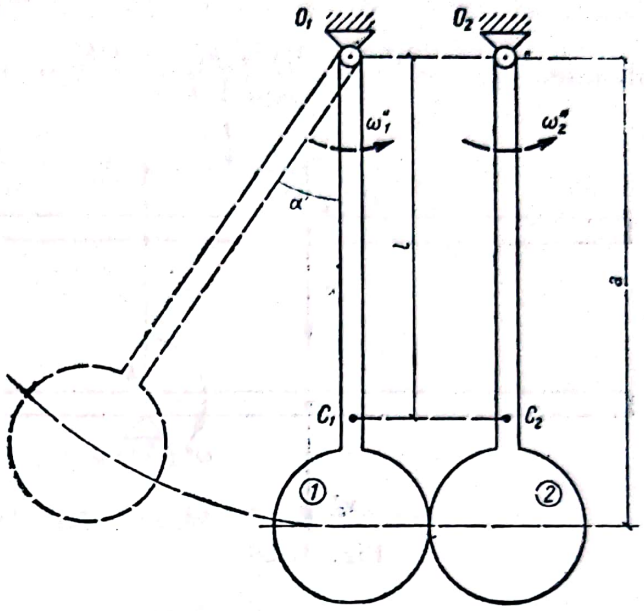


Fig. 31.24

$$\alpha = 120°,\ \lambda = \sqrt{3},\qquad k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Răspuns: $\omega_1' = 2\sqrt{\frac{M_1 g l}{J_1}}\sin\frac{\alpha}{2}$,

$$\omega_1'' = \frac{J_1 - kJ_2}{J_1 + J_2}\omega_1' = \frac{1 - k\lambda}{1 + \lambda} = \omega_1',$$

$$\omega_2'' = \frac{J_1(1 + k)}{J_1 + J_2}\omega_1' = \frac{1 + k}{1 + \lambda}\omega_1',$$

căci $\frac{M_2}{M_1} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \lambda$,

$$\sin\frac{\alpha''}{2} = \frac{J_1 - kJ_2}{J_1 + J_2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - k\lambda}{1 + \lambda}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\beta''}{2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\,\frac{\sqrt{J_1 J_2}}{J_1 + J_2}(1 + k)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + k}{1 + \lambda}\sin\frac{\alpha}{2}.$$ În cazul aplicaţiei numerice, $\omega_1'' = 0$, $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 60°$.

31.25. În ce punct O trebuie apucată coada unui baros pentru ca să nu apară percuţii în mîna noastră dacă masa cozii este m, masa barosului M,

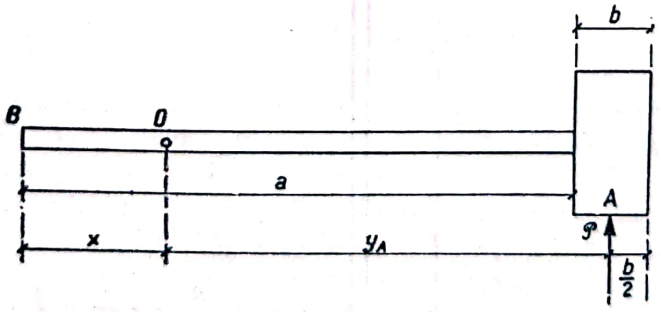


Fig. 31.25

şi dimensiunile lor sînt cele din figura 31.25. Aplicaţie numerică:

$$m = 0{,}5\ \text{kg},\ M = 3\ \text{kg},\ a = 45\ \text{cm},\ b = 5\ \text{cm}.$$

Răspuns: $y_A = \dfrac{J_0}{(M+m)\eta} = \dfrac{\dfrac{ma^2}{12} + m\left(y_A - \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{Mb^2}{12} + My_A^2}{m\left(y_A - \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}\right) + My_A}$,

de unde: $y_A = \dfrac{m[a^2 + 3(a+b)^2] + Mb^2}{6m(a+b)} = 32{,}25$ cm. Barosul trebuie apucat la distanța: $x = a + \dfrac{b}{2} - y_A =$ $= 15{,}25$ cm de capătul B.

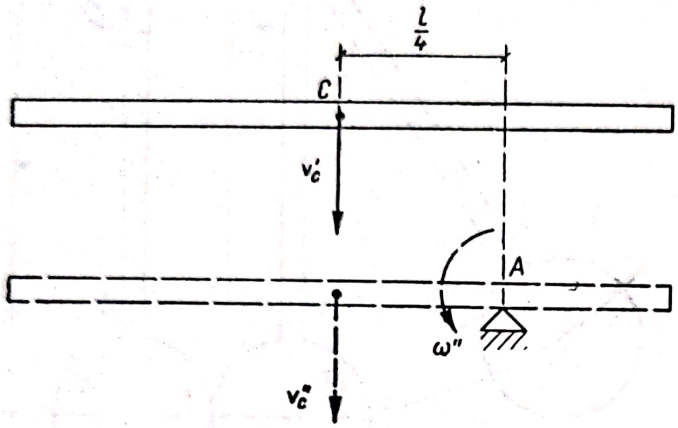


Fig. 31.26

31.26. O bară omogenă de masă M și lungime l are o mișcare de translație cu viteza v'_c. La un moment dat se fixează punctul A al barei, unde $AC = \dfrac{l}{4}$ (fig. 31.26). Cunoscîndu-se momentul de inerție $J_C = \dfrac{Ml^2}{12}$ al barei, să se determine viteza unghiulară ω'' și viteza centrului maselor v''_c după fixarea punctului A.

Răspuns: $\omega'' = \dfrac{12v'_c}{7l}$ $\qquad v'' = \dfrac{3}{7}v'_c$.

31.27. O bară omogenă și grea *1* de masă M și lungime l se poate roti într-un plan vertical în jurul articulației O. Bara se ridică în poziție orizontală (fig. 31.27) și este lăsată să cadă liber. În clipa cînd ajunge în

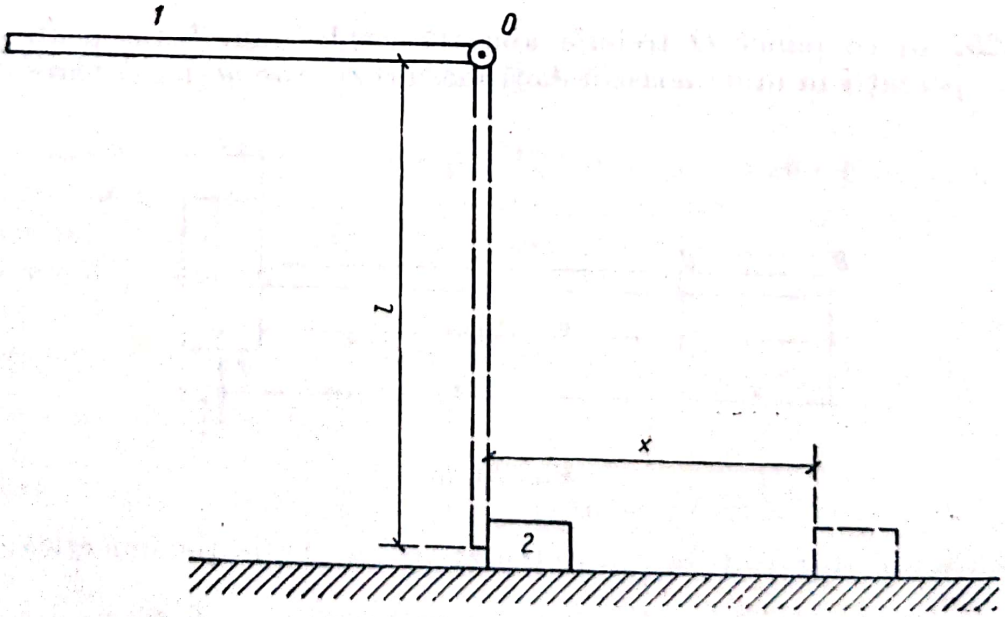


Fig. 31.27

poziția verticală, bara ciocnește corpul *2* de masă m situat pe un plan orizontal. Cunoscîndu-se momentul de inerție al barei $J_0 = \frac{1}{3}Ml^2$, coeficientul de restituire k și coeficientul de frecare μ dintre corpul *2* și planul orizontal, să se determine vitezele unghiulare ale barei înainte și după ciocnire ω_1' și ω_1'', viteza v_2'' a corpului *2* după ciocnire și drumul x parcurs de corpul *2* pînă la oprire.

Răspuns: $\omega_1' = \sqrt{\frac{3g}{l}}$, $\omega_1'' = \frac{M - 3km}{M + 3m}\omega_1'$, $v_2'' = \frac{M(1+k)}{M+3m}\omega' l$

$$x = \frac{3l}{2\mu}\left[\frac{M(1+k)}{M+3m}\right]^2.$$

Capitolul XXXII

PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1) Cu ajutorul acestui principiu se pot rezolva atît probleme de statică (echilibru, mașini simple, grinzi cu zăbrele etc.), cît și de dinamică (echilibrul dinamic, studiul mișcării sistemelor etc.), pornind de la considerația lucrului mecanic. Principiul lucrului mecanic virtual permite eliminarea în calcule a reacțiunilor normale de contact. El se aplică cu ușurință în cazul legăturilor ideale (fără frecări). Se poate aplica și în cazul legăturilor cu frecare, însă problemele se rezolvă mult mai greu, deoarece calculele duc de cele mai multe ori la inegalități.

2) Prin *deplasare reală* a sistemului se înțelege deplasarea pe care o suferă sistemul sub acțiunea forțelor efectiv aplicate lui, deplasare care respectă legăturile impuse:

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}.$$

Prin *deplasare posibilă* se înțelege o deplasare a sistemului care poate avea loc sub acțiunea unui alt sistem de forțe anume ales, cu respectarea legăturilor impuse (compatibilă cu legăturile).

Se numește *deplasare virtuală* $\delta\bar{r}$ o deplasare posibilă, infinit mică, dată sistemului, compatibilă cu legăturile. Dacă deplasarea reală nu depinde de timp, adică are un caracter geometric independent de timp, ea este una dintre deplasările virtuale:

$$\delta r = \delta x\bar{i} + \delta y\bar{j} + \delta z\bar{k}.$$

3) În timpul unei deplasări elementare reale, forțele care lucrează asupra sistemului pot produce un lucru mecanic elementar real dL; lucrul mecanic,

Scanned with OKEN Scanner

corespunzător unei deplasări virtuale, produs de forțele aplicate sistemului, se numește *lucru mecanic virtual* și se notează cu δL, pentru a-l deosebi de cel real.

4) Cînd se dă sistemului o deplasare virtuală, forța $\bar{F}(X, Y, Z)$ aplicată sistemului în punctul $A(x, y, z)$ efectuează un lucru mecanic virtual egal cu

$$\delta L = \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z, \tag{32.1}$$

unde $\delta\bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ este deplasarea virtuală efectuată de punctul de aplicație A al forței.

Cînd asupra sistemului lucrează un număr oarecare de forțe, lucrul mecanic virtual efectuat de ele va fi:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i). \tag{32.2}$$

5) Cînd deplasarea virtuală a sistemului este o rotație a lui în jurul unei axe care trece prin origine, atunci lucrul mecanic virtual este:

$$L = \sum_{i}^{n} \bar{M}_i \delta\bar{\theta}_i = \sum_{i}^{n} (M_{ix}\delta\theta_x + M_{iy} \cdot \delta\theta_{iy} + M_{iz}\delta\theta_{iz}), \tag{32.3}$$

unde $\bar{M}_i$ $(\bar{M}_{ix}, M_{iy}, M_{iz})$ este momentul uneia dintre forțele aplicate sistemului față de originea axelor și $\delta\bar{\theta}_i$ $(\delta\theta_{ix}, \delta\theta_{iy}, \delta\theta_{iz})$ este rotația virtuală a sistemului.

6) Într-o deplasare virtuală generală dată sistemului, formată dintr-o translație și o rotație, lucrul mecanic virtual este:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i \delta r_i + \bar{M}_i \delta\bar{\theta}_i)$$

$$\delta L = \sum_{1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i + M_{ix}\delta\theta_{ix} + M_{iy} \cdot \delta\theta_{iy} + M_{iz} \cdot \delta\theta_{iz}) = 0. \tag{32.4}$$

7) În cazul unui sistem de legături ideale (fără frecare), lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este totdeauna nul.

Într-adevăr, pentru orice deplasare compatibilă cu legăturile, forțele de legătură sînt normale pe direcția deplasării virtuale.

8) *Enunțarea principiului:* un sistem de puncte materiale, supus la legături fără frecare și la o serie de forțe date, este în echilibru dacă lucrul mecanic virtual al forțelor date și forțelor interioare este nul, adică

$$\delta L = \sum_{1}^{n} \bar{F}_{i\,\text{ext}} \delta r_i + \sum_{1}^{n} \bar{F}_{i\,\text{int}} \cdot \delta\bar{r}_i = 0. \tag{32.5}$$

9) În cazul cînd sistemul de puncte materiale este alcătuit din corpuri rigide sprijinite, articulate, legate cu fire flexibile și inextensibile etc., atunci

Scanned with OKEN Scanner

condiția ca sistemul să fie în echilibru, dacă legăturile lui sînt fără frecare, este ca numai lucrul mecanic virtual al forțelor date să fie nul:

$$\delta L = \sum_1^n \bar{F}_{i\,ext}\delta\bar{r}_i = 0, \tag{32.6}$$

deoarece, în acest caz, lucrul mecanic virtual al forțelor interioare este totdeauna nul.

10) În cazul echilibrului unui sistem supus la o serie de forțe, principiul lucrului mecanic virtual dă:

$$\delta L = \sum_1^n (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i + M_{ix}\delta\theta_{ix} + M_{iy}\delta\theta_{iy} + M_{iz}\delta\theta_{iz}) = 0. \tag{32.7}$$

Pentru ca această condiție să fie satisfăcută pentru orice deplasare virtuală $\delta\bar{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ și $\delta\bar{\theta}(\delta\theta_x, \delta\theta_y, \delta\theta_z)$ este necesar și suficient ca:

$$\sum_1^n X_i = 0; \quad \sum_1^n Y_i = 0; \quad \sum_1^n Z_i = 0; \quad \sum_1^n M_{ix} = 0;$$

$$\sum_1^n M_{iy} = 0; \quad \sum_1^n M_{iz} = 0,$$

ceea ce duce tocmai la condițiile generale de echilibru ale staticii

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M} = 0.$$

11) Practic, problemele de echilibru fără frecare, care depind de un singur parametru, se soluționează cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual, în modul următor:

— se alege un sistem de axe fix;

— se scriu proiecțiile pe aceste axe ale tuturor forțelor aplicate sistemului, cu excepția celor de legătură;

— se scriu coordonatele tuturor punctelor de aplicație A, B, C.... ale forțelor menționate;

— se calculează diferențialele coordonatelor punctelor de aplicație, în funcție de parametru;

— se înlocuiesc datele calculate în expresiile analitice (34—5), (34—6) sau (34—7), după caz;

— se determină mărimea parametrului la echilibru.

12) Dacă poziția de echilibru a sistemului depinde de un număr de p parametri independenți, care sînt $q_1, q_2, q_3 \ldots q_p$, astfel încît poziția oricărui punct al sistemului este o funcție de acești parametri

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2 \ldots q_p), \\ y &= y(q_1, q_2 \ldots q_p), \\ z &= z(q_1, q_2 \ldots q_p), \end{aligned} \tag{32.8}$$

problemele de echilibru rezolvate cu principiul lucrului mecanic virtual se calculează mai ușor prin „metoda multiplicatorilor lui Lagrange".

Scanned with OKEN Scanner

Diferențialele deplasărilor virtuale calculate în acest caz devin:

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots \frac{\partial x}{\partial q_p}\cdot\delta q_p \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots \frac{\partial y}{\partial q_p}\delta q_p \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots \frac{\partial z}{\partial q_p}\delta q_p\end{aligned}\right\} \quad (32.9)$$

care înlocuite în ecuația (32.6), în care se dă factor comun δq_1, $\delta q_2 \ldots \delta q_p$, se obține:

$$\delta L = \delta q_1 \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) + \delta q_1 \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}\right) + \\ + \ldots \delta q_p \left(X\frac{\partial x}{\partial q_p} + Y\frac{\partial y}{\partial q_p} + Z\frac{\partial z}{\partial q_p}\right) = 0. \quad (32.10)$$

La echilibru ecuația (32.10) trebuind să fie satisfăcută pentru orice variație a parametrilor independenți, urmează că trebuie satisfăcute următoarele p condiții:

$$\begin{aligned}&\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = 0 \\ &\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}\right) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_p} + Y\frac{\partial y}{\partial q_p} + Z\frac{\partial z}{\partial q_p}\right) = 0\end{aligned} \quad (32.11)$$

rezultînd p ecuații pentru determinarea parametrilor independenți q care definesc poziția de echilibru.

13) Dacă sistemul este acționat numai de forțe de gravitație și este supus la legături fără frecare, și dacă se notează cu z ordonata centrului de greutate al sistemului, atunci ecuația (32.6) dă următoarea condiție de echilibru:

$$z = 0, \quad (32.12)$$

ceea ce duce la concluzia că, la echilibru, z trebuie să fie sau maxim, sau minim. Această observație este expusă de *principiul lui Toricelli:* „dacă un sistem material este supus la forțe rezultînd numai din greutăți și la legături fără frecare, poziția de echilibru a lui este atunci cînd ordonata centrului de greutate a sistemului este maximă (pentru echilibru nestabil) și minimă (pentru echilibru stabil).

14) Principiul lucrului mecanic virtual se poate aplica și pentru determinarea mărimilor reacțiunilor. Se înlocuiește legătura în care se urmărește determinarea reacțiunii prin forța de legătură respectivă, se dă o deplasare virtuală sistemului, compatibilă cu legăturile rămase, și din ecuația lucrului mecanic virtual se determină mărimea reacțiunii.

15) Acest principiu permite, de asemenea, determinarea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele. Pentru a determina efortul într-o bară, se scoate acea bară, se introduce în locul ei efortul $\bar{T}$ care lucrează în ea și se dă o

deplasare virtuală sistemului, compatibilă cu legăturile rămase; se scrie ecuaţia lucrului mecanic virtual, după ce în prealabil s-au determinat reacţiunile grinzii, dacă este cazul, şi din ea se determină mărimea efortului T.

16) În cazul cînd sistemul este supus la forţe de legătură cu frecări, principiul lucrului mecanic virtual se poate aplica dacă în ecuaţia lucrului mecanic virtual se introduce şi lucrul mecanic al forţelor de frecare.

Problemele din această categorie dau complicaţii la calcul, deoarece apariţia inegalităţilor duce la nedeterminări fie pentru poziţia sistemului, fie pentru sistemul forţelor care lucrează asupra lui.

17) Principiul lucrului virtual poate fi folosit sub o formă transformată a vitezelor virtuale. (În cazul legăturilor scleronome.)

Expresia puterii virtuale este:

$$W = \frac{\delta L}{\delta t} = \sum_1^u \bar{F}_i \frac{\delta r_i}{\delta_t} = \sum_1^u \bar{F}_i \bar{v}_i.$$

În cazul echilibrului se poate scrie:

$$W = \sum_1^u \bar{F}_i \bar{v}_i = 0 = \sum (X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz} + \\ + M_{ix}\omega_{ix} + M_{iy}\omega_{iy} + M_{iz}\omega_{iz}) = 0.$$

Pentru a studia echilibrul unui sistem oarecare de corpuri se imprimă sistemului o mişcare virtuală compatibilă cu legăturile şi se pune condiţia ca puterea virtuală a sistemului să fie nulă.

B. PROBLEME REZOLVATE

32.1. Un corp de greutate Q reazemă pe un plan luciu înclinat cu unghiul α faţă de orizontală. Corpul este legat de capătul unui fir avînd direcţia paralelă cu planul înclinat şi trecînd peste un scripete de masă neglijabilă A. La celălalt capăt al firului este legată o greutate P (fig. 32.1).

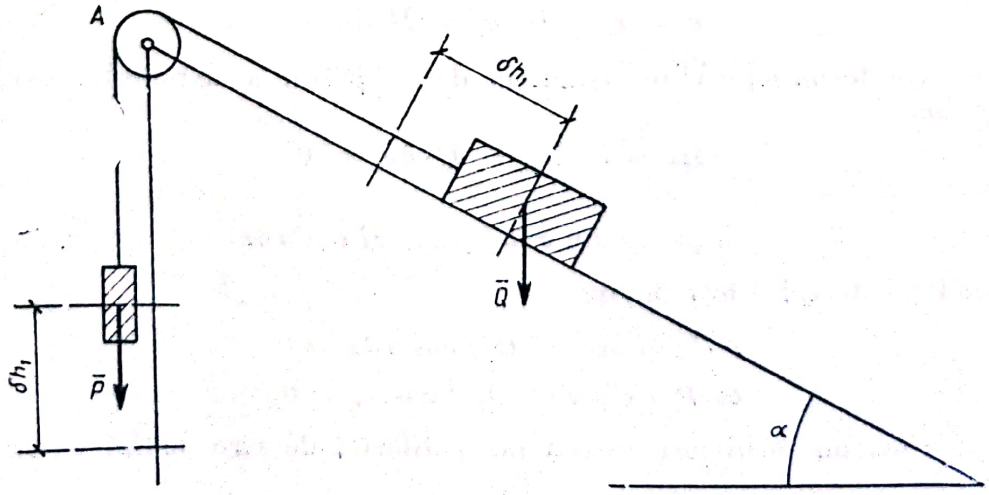


Fig. 32.1

Să se stabilească relaţia dintre P şi Q la echilibru.

Rezolvare. Se dă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile sistemului. Să se presupună că greutatea P se deplasează cu δh. Expresia lucrului virtual este:

$$L = P \cdot \delta h - Q \sin \alpha \, \delta h = 0;$$

rezultă:

$$P - Q \sin \alpha = 0,$$

$$P = Q \sin \alpha.$$

32.2. Asupra articulaţiei din mijlocul B al unui dispozitiv de presare ABC, acţionează o forţă orizontală P. Ce mărime are forţa $\bar{Q}$ aplicată în punctul C şi orientată de-a lungul dreptei CA, care echilibrează forţa $\bar{P}$ (fig.32.2)?

Se ia $AB = BC = l$,

$\sphericalangle ABC = 2\alpha$.

Rezolvare. Dispozitivul de presare formează un sistem de corpuri rigide. Deoarece legăturile interioare şi exterioare ale corpurilor sistemului sînt ideale (fără frecări), pentru rezolvarea problemei este necesar şi suficient să se ia în consideraţie numai lucrul mecanic al forţelor efectiv aplicate (date) P şi Q.

Se aleg axele xAy, ca în figura 32.2, prezentînd avantajul că cele două forţe sînt paralele cu cîte una dintre axe, ceea ce va duce la simplificarea calculelor.

Proiecţiile acestor forţe pe axele alese vor fi:

$$\bar{P}(P; 0); \qquad \bar{Q}(0; -Q).$$

Coordonatele punctelor lor de aplicaţie vor fi:

$$B(x_B = -l \cos \alpha; \; y_B = l \sin \alpha);$$

$$c = x_c = 0; \; y_c = 2l \sin \alpha$$

Conform formulei (32.6), condiţia de echilibru a sistemului este dată de expresia:

$$\delta L = P \cdot \delta x_B - Q \cdot \delta y_c = 0,$$

unde:

$$\delta x_B = l \sin \alpha \delta \alpha; \; y_c = 2l \cos \alpha \delta \alpha.$$

Condiţia de echilibru devine:

$$P l \sin \alpha \delta \alpha - Q 2l \cos \alpha \delta \alpha = 0$$

$$\delta \alpha (P \cdot l \sin \alpha - Q 2 \, l \cos \alpha) = 0,$$

$\delta \alpha$ fiind o mărime arbitrară infinit mică diferită de zero, astfel că se poate scrie:

$$P \, l \sin \alpha - Q . 2l \sin \alpha = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

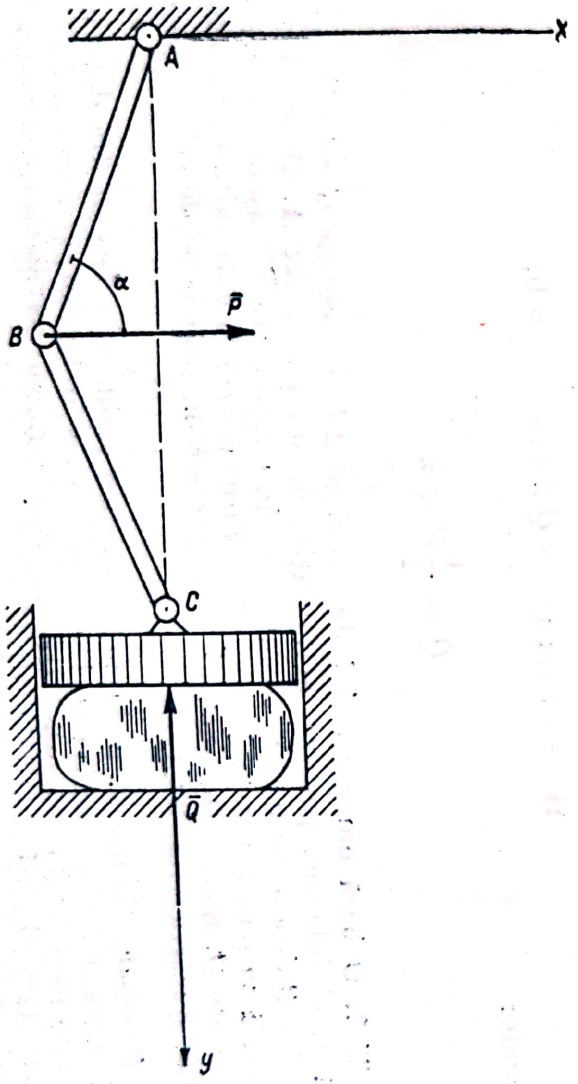


Fig. 32.2, *a*

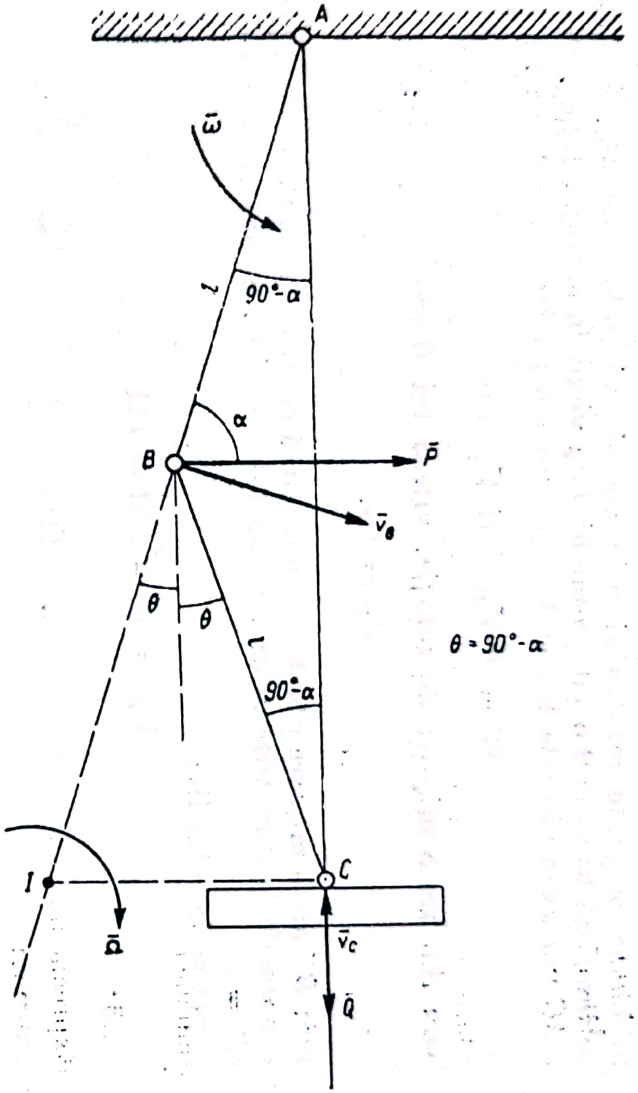


Fig. 32.2, *b*

de unde

$$Q = \frac{1}{2} P \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Problema se poate rezolva și prin metoda vitezelor virtuale. În acest scop se imprimă barei AB o viteză unghiulară virtuală ω (fig. 32.2,*a*). Punctele BAC vor avea vitezele V_B și V_C, și expresia puterii virtuale va fi:

$$W = \bar{P} \cdot \bar{V}_B + \bar{Q} \cdot \bar{V}_C = 0.$$

Bara AB are o mișcare de rotație, viteza lui B având expresia:

$$V_B = l\omega.$$

Bara BC are o mișcare plană. Se determină centrul instantaneu de rotație ducînd normale la direcțiile vitezelor punctelor B și C. Se observă că: $BC = NIB = l$.

Se pot scrie relațiile:

$$V_B = l\omega = IBl = l\Omega$$

și rezultă:

$$\omega = \Omega;$$

de asemenea:

$$V_C = IC\,\Omega = 2\,l \cos \alpha\omega.$$

Expresia puterii virtuale devine:

$$W = Pl \sin \alpha\omega - Q\,2\,l \cos \alpha\omega = 0,$$

de unde:

$$Q = \frac{1}{2} P \operatorname{tg} \alpha.$$

32.3. O bară omogenă AB de lungime $2\,l$ și greutate G este fixată la capătul ei inferior, printr-o articulație, de un punct fix A. De capătul ei superior B este prins un fir, trecut peste un scripete mic C, așezat pe aceeași verticală cu punctul A la distanța $2\,l$. Firul poartă la extremitatea lui liberă o greutate Q. Să se afle unghiul $\alpha = \sphericalangle CAB$ în poziția sa de echilibru, neglijînd frecările (fig. 32.3, *a*).

Rezolvare. Soluția 1. Sistemul de corpuri rigide este format din două corpuri: bara AB și greutatea Q, legate printr-un fir flexibil și inextensibil, de greutate neglijabilă. Neavînd frecări, este suficient să ne ocupăm numai de forțele date $\bar{P}$ și $\bar{Q}$.

Fie D și E punctele lor de aplicație și L lungimea firului BCE.

Se alege sistemul de axe xAy cu axa Ay paralelă cu forțele date.

Proiecțiile forțelor pe axe vor fi:

$$\bar{G}(0; -G);\ \bar{Q}(0; -Q).$$

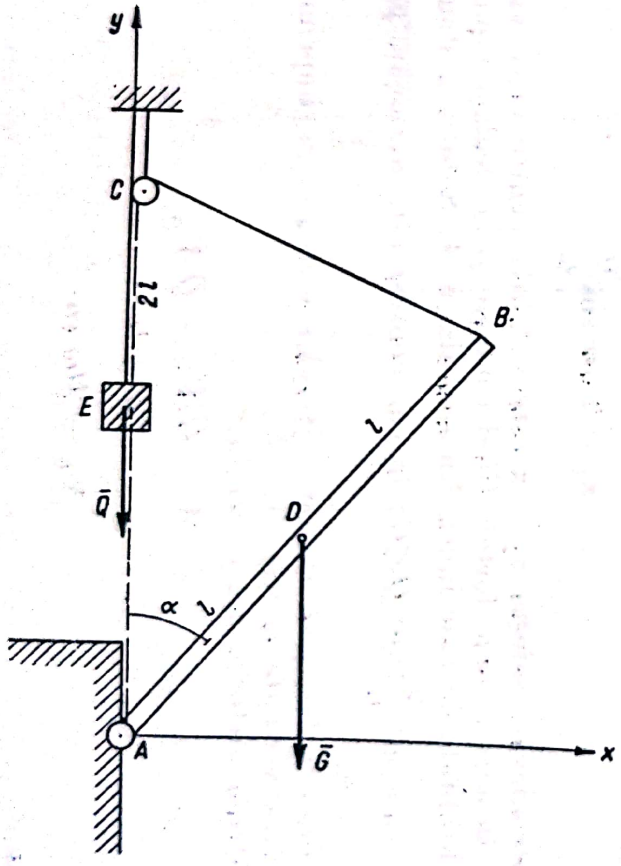


Fig. 32.3, *a*

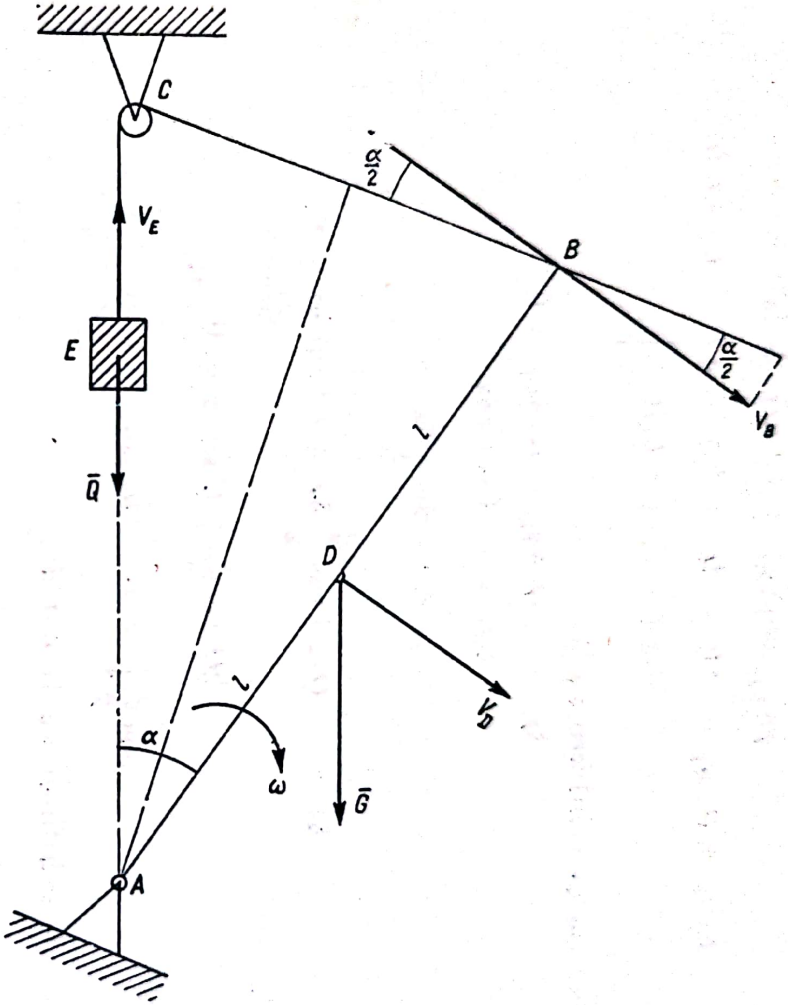


Fig. 32.33, *b*

Coordonatele punctelor lor de aplicație sînt:

$$D(x_D = l \sin \alpha;\ y_D = l \cos \alpha)$$

$$E[x_E = 0;\ y_E = AE = AC - EX = 2l - (L - CB) =$$
$$= 2l - L + 4l \sin \frac{\alpha}{2}]$$

Condiția de echilibru va fi:

$$\delta L = -Q \cdot \delta y_D - G \cdot \delta y_E = 0$$

$$\delta y_D = -l \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\delta y_l = 2l \cos \frac{\alpha}{2} \delta \alpha.$$

Deci:

$$\delta L = -Q \cdot 2\,l \cos \frac{\alpha}{2} \delta \alpha + Gl \sin \delta \alpha = 0.$$

de unde:

$$-2Q \cos \frac{\alpha}{2} + G \sin \alpha = 0$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left(-2Q + 2G \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

unghiul α la echilibru va fi dat de:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \qquad \alpha_1 = \pi$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{G}$$

$$\alpha_2 = 2 \arcsin \frac{Q}{G}.$$

Într-adevăr, soluția $\alpha_1 = \pi$ este valabilă pentru orice valori ale lui $\bar{Q}$ sau $\bar{G}$, în acea poziție forțele fiind contrare și pe același suport sînt totdeauna echilibrate de reacțiunea din articulația A. Soluția a doua este valabilă atîta vreme cît $\frac{Q}{G}$; sau $Q \leqslant G$; în caz contrar este o singură poziție de echilibru $\alpha_1 = \pi$.

Soluția a 2-a, prin metoda vitezelor virtuale. Se imprimă barei viteza unghiulară virtuală ω (fig. 32.3,*b*).

Puterea virtuală are expresia:

$$W = \bar{G} \cdot \bar{V}_D + \bar{Q} \cdot \bar{V}_E$$

$$V_D = l\omega$$

$$V_E = 2l\omega \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Rezultă:

$$W = G \cdot l\omega \sin \alpha - Q2\, l\omega \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

sau

$$G2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2Q \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Rezultă:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \qquad \alpha_1 = \pi$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{G}$$

$$\alpha_2 = 2 \arcsin \frac{Q}{G}.$$

32.4. Cu datele din problema 32.3 să se determine un profil fix S pe care trebuie să alunece fără frecare greutatea Q, astfel încît echilibrul barei AB să fie posibil pentru orice valoare a unghiului α (fig. 32.4, *a*).

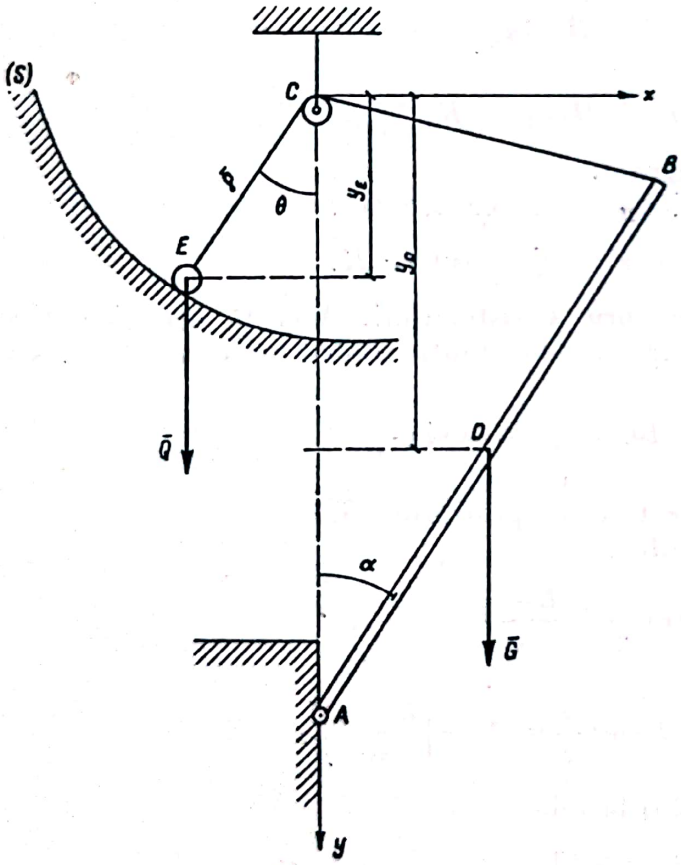


Fig. 32.4, *a*

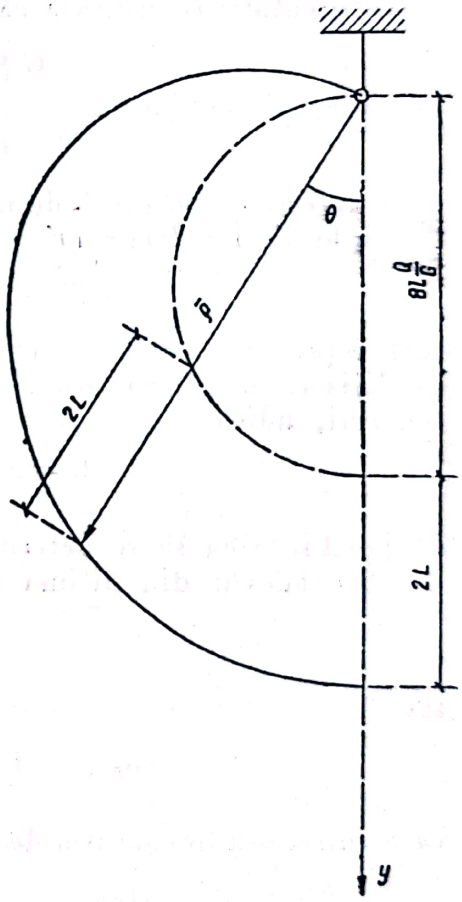


Fig. 32.4, *b*

Rezolvare. Cu notațiile:

$$AB = AC = 2l$$

și lungimea firului $ACE = L$ se aleg axele xcy, axa cy fiind chiar direcția CA. Nefiind frecări, singurele forțe care vor fi luate în considerație vor fi $\bar{G}$ și $\bar{Q}$.

Notînd cu ρ vectorul de poziție al greutății Q și cu θ — unghiul vectorului cu axa Oy, va rezulta, pentru proiecțiile forțelor: $\bar{G}(0; G)$; $\bar{Q}(0; Q)$; pentru coordonatele punctelor lor de aplicație:

$$D \left| \begin{array}{l} x_D = l \sin\alpha \\ y_D = AC - AD\cos\alpha = 2l - l\cos\alpha \end{array} \right.$$

$$E \left| \begin{array}{l} x_E = \rho \sin\theta \\ y_E = \rho\cos\theta \end{array} \right.$$

Ecuația lucrului mecanic virtual pentru o deplasare compatibilă cu legăturile va fi:

$$G\delta y_D + Q\delta y_E = 0.$$

Cum însă lucrul mecanic virtual al greutății G este de semn contrar cu cel al greutății Q urmează că ecuația precedentă mai poate fi scrisă:

$$G\,|\,\delta y_D\,| - Q\,|\,\delta y_E\,| = 0$$

sau integrala devine:

$$G\cdot y_D - Q\cdot y_E = K,$$

unde K este o constantă de integrare.

Înlocuind valorile lui y_D și y_E se obține ecuația:

$$G(2l - l\cos\alpha) - Q\cdot\rho\cos\theta = K,$$

care reprezintă condiția de echilibru a sistemului. Această ecuație cît și condiția ca lungimea firului să rămînă constantă pentru orice poziție a sistemului, adică

$$L = \rho + BC = \rho + 4l\sin\frac{\alpha}{2},$$

dă posibilitatea să se determine ecuația profilului S.

Într-adevăr din ultima rezultă:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{L-\rho}{4l}$$

sau

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \left(\frac{L-\rho}{8l^2}\right)^2,$$

care introdusă în condiția de echilibru dă:

$$G\left[2l - l + \left(\frac{L-\rho}{8l}\right)^2\right] - Q\cdot\rho\cos\theta = K$$

sau

$$G\left[l + \left(\frac{L-\rho}{8l}\right)^2\right] - Q\cdot\rho\cos\theta = K.$$

Această ecuație $\rho = f(\theta, C)$ este expresia în coordonate polare a profilului S, căutat. Constanta K se determină prin condiția de limită; adică

ecuația trebuie să rămînă valabilă și pentru cazul cînd $\rho = 0$, cînd α este maxim; deci:

$$K = G\left[l + \frac{L^2}{8l}\right].$$

Ecuația profilului S devine:

$$G\left(l + \frac{L^2}{8l} + \frac{\rho^2}{8l} + \frac{2L\rho}{8l}\right) - Q \cdot \rho \cos\theta = G\left(l + \frac{L^2}{8l}\right)$$

sau

$$\frac{G}{8l}(\rho^2 - 2L\rho) - Q \cdot \rho \cos\theta = 0,$$

de unde:

$$\rho = 0,$$

soluție care nu satisface și

$$\frac{G}{8l}(\rho - 2L) - Q\cos\theta = 0$$

$$\rho = 2L + 8l\frac{Q}{G}\cos\theta$$

se recunoaște în curba reprezentată în figura 32.4,*b*, curba cunoscută sub denumirea *melcul lui Pascal*.

32.5. La o transmisie cu curele, raza roții conducătoare este egală cu ρ. Pe axa roții conduse de rază r este fixată solidar o roată de rază R. Pe roata

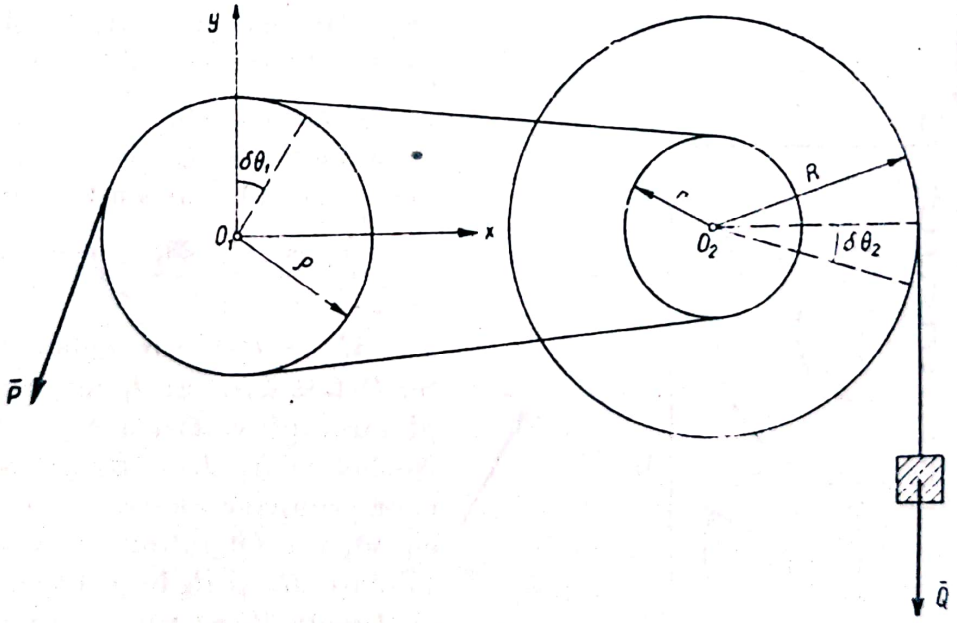


Fig. 32.5

conducătoare acționează o forță tangențială $\bar{P}$ și într-un punct M de pe circumferința roții de rază R este atîrnată o greutate Q. Să se afle relația între P și Q în poziția de echilibru (fig. 32.5).

Rezolvare. Neglijînd frecările în ax, și dînd o deplasare virtuală sistemului, o rotație infinit mică $\delta\theta_1$ a roții de rază ρ în jurul axului său O_1,

ceea ce atrage o rotaţie tot infinit mică $\delta\theta_2$ a roţilor solidare în jurul axului 0_2, ecuaţia lucrului mecanic virtual devine:

$$\delta L = \overline{M}_p \cdot \delta\overline{\theta}_1 + \overline{M}_Q \cdot \delta\overline{\theta}_2 = 0$$

sau pentru sistemul de axe *abc*:

$$M_p \cdot \delta\theta_1 - M_q \cdot \delta\theta_2 = 0,$$

unde $M_p = P \cdot \rho$ este momentul forţei P faţă de axul 0_1;
$M_q = Q \cdot R$ este momentul forţei Q faţă de axul 0_2.

Presupunînd că nu există alunecare între curea şi roţi, atunci:

$$\rho\delta\theta_1 = r\delta\theta_2.$$

Cu aceste date, ecuaţia de echilibru devine:

$$P \cdot \rho\delta\theta_1 - QR\frac{\rho}{r}\delta\theta_1 = 0$$

$$\left(P - Q\frac{R}{r}\right)\rho\delta\theta_1 = 0;$$

deci:

$$P = Q\frac{R}{r}.$$

32.6. Ce greutate Q poate ridica un cric cu angrenaje cînd pe manivelă se apasă cu forţa P, neglijînd frecările, şi ştiind că braţul manivelei este l, că roţile dinţate au z_1, z_2 şi z_3 numărul respectiv de dinţi şi că pasul cremalierei este b (fig. 32.6).

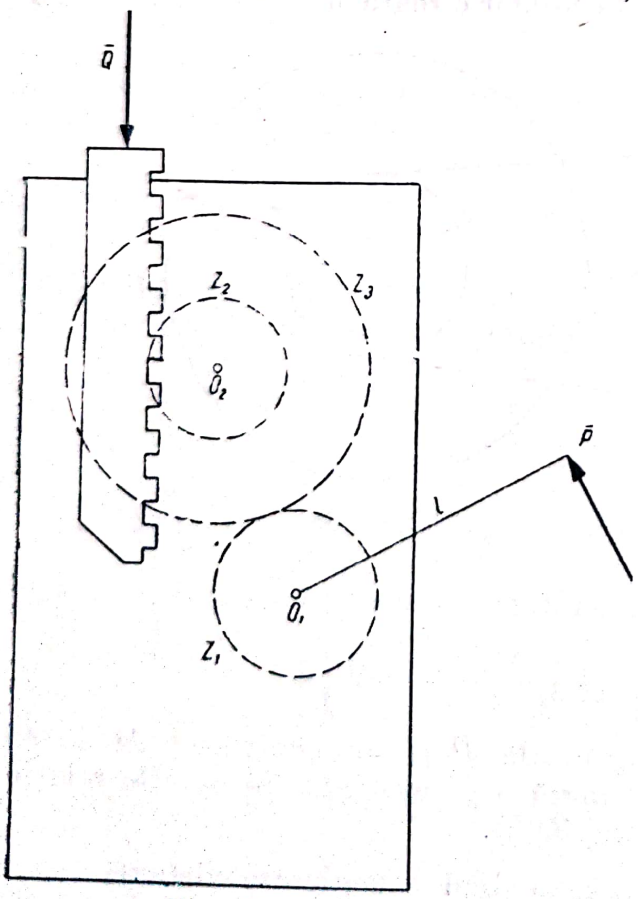


Fig. 32.6

Rezolvare. Dînd o rotaţie infinit mică manivelei l, forţa Q se va deplasa în sus. Ecuaţia de echilibru dă:

$$\delta L = M_p \cdot \delta\theta_1 - Q\delta z = 0,$$

unde:

$M_p = P \cdot l$ este momentul forţei P faţă de axul O_1 iar δz este deplasarea pe verticală a greutăţii Q. Notînd cu R_1, R_2 şi R_3 razele cercurilor primitive ale roţilor dinţate şi cu $\delta\theta_2$ rotaţia infinit mică a roţilor solidare R_2 şi R_3 în jurul axului O_2, cînd roata R_1 se roteşte cu $\delta\theta_1$, rezultă următoarele relaţii impuse de considerentul că roţile nu pot aluneca relativ:

$$\delta R_1\delta\theta_1 = R_2\delta\theta_2$$

$$R_3\delta\theta_2 = \delta z;$$

deci

$$\delta z = R_3 \frac{R_1}{R_2} \delta\theta_1,$$

dar la roțile dințate razele cercurilor primitive sînt proporționale cu numărul dinților; deci:

$$\delta z = R_3 \frac{z_1}{z_2} \delta\theta_1.$$

Ecuația de echilibru devine:

$$\left(Pl - QR_3 \frac{z_1}{z_2}\right) \delta\theta_1 = 0,$$

adică

$$Q = \frac{z_2}{z_1} \frac{l}{R_3} P.$$

Dacă b este pasul cremalierei, adică și pasul dinților roții R_3, atunci rezultă:

$$2\pi R_3 = b \cdot z_3.$$

Deci:

$$Q = 2\pi \frac{z_2}{z_1 \cdot z_3} \frac{l}{b} P.$$

32.7. O bară omogenă OA, de greutate $\bar{P}_1$, se poate roti într-un plan vertical în jurul articulației fixe O. Capătul A al barei este legat printr-o articulație cu altă bară omogenă, AB, de greutate $\bar{P}_2$. La capătul barei a doua este aplicată forța orizontală $\bar{F}$. Să se afle unghiurile α și β formate de bare cu orizontala în poziția de echilibru (fig. 32.7).

Rezolvare. Neglijînd frecările se vor lua în considerație numai forțele $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ și $\bar{F}$ ca formînd forțe date.

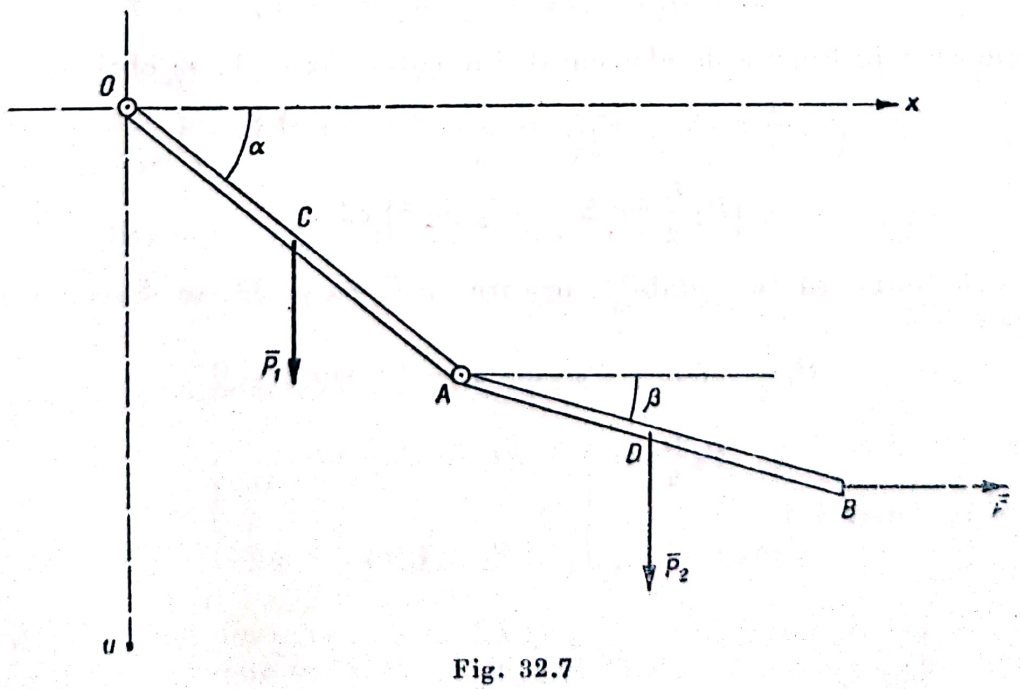


Fig. 32.7

Notînd cu l_1 și l_2 lungimile celor două bare, cu C și D punctele de aplicație ale forțelor P_1 și P_2 situate la jumătatea barelor respective și observînd că poziția sistemului depinde de doi parametri independenți $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$, se va trata problema prin metoda multiplicatorilor.

Se alege sistemul de axe xOy, axa Oy paralelă cu forțele P_1 și P_2.

Proiecțiile forțelor pe axe vor fi:

$$\bar{P}_1\,(0;\,P_1);\quad \bar{P}_2\,(0;\,P_2);\quad \bar{F}\,(F;\,0).$$

Coordonatele punctelor lor de aplicație care interesează sînt:

$$y_C = \frac{l_1}{2}\sin\alpha;\quad y_D = l_1\sin\alpha + \frac{l_2}{2}\sin\beta;$$

$$x_B = l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta$$

Ecuația lucrului mecanic virtual devine:

$$\delta L = P_1\delta y_C + P_2\delta y_D + F\delta x_B = 0,$$

unde:

$$\delta y_C = \frac{l_1}{2}\cos\alpha\delta\alpha;$$

$$\delta y_D = l_1\cos\alpha\delta\alpha + \frac{l_2}{2}\cos\beta\delta\beta$$

$$\delta x_B = -\,l_1\sin\alpha\delta\alpha - l_2\sin\beta\delta\beta.$$

Ecuația travaliului virtual devine:

$$\delta L = P_1\cdot\frac{l_1}{2}\cos\alpha\delta\alpha + P_2\left(l_1\cos\alpha\delta\alpha + \frac{l_2}{2}\cos\beta\delta\beta\right) -$$

$$- F\,(l_1\sin\alpha\delta\alpha + l_2\sin\beta\delta\beta) = 0.$$

Ordonînd în funcție de elementul diferențial $\delta\alpha$ și $\delta\beta$ se obține:

$$\left(P_1\frac{l_1}{2}\cos\alpha + P_2 l_1\cos\alpha - Fl_1\sin\alpha\right)\delta\alpha +$$

$$+\left(P_2\frac{l_2}{2}\cos\beta - Fl_2\sin\beta\right)\delta\beta = 0.$$

Ecuația trebuind să fie valabilă, oricare ar fi $\delta\alpha$ și $\delta\beta$, se descompune în două ecuații:

$$P_1\frac{l_1}{2}\cos\alpha + P_2 l_1\cos\alpha - Fl_1\sin\alpha = 0$$

$$P_2\frac{l_2}{2}\cos\beta - Fl_2\sin\beta = 0,$$

de unde se determină:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1 + 2P_2}{2F};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_2}{2F}.$$

Scanned with OKEN Scanner

32.8. Un hexagon $ABCDEF$ format din bare articulate de lungime a, de greutate neglijabilă, are bara AB fixată și se găsește în echilibru într-un plan vertical sub acțiunea forței Q, verticală, care acționează la jumătatea laturii DE și a eforturilor dezvoltate de resortul care leagă articulațiile CF. În poziția liberă resortul are lungimea cît latura hexagonului și are constanta elastică K.

Cunoscînd intensitatea forței $\bar{Q}$ se cere să se determine unghiul α la echilibru și forța $\bar{P}$ care se dezvoltă în resort.

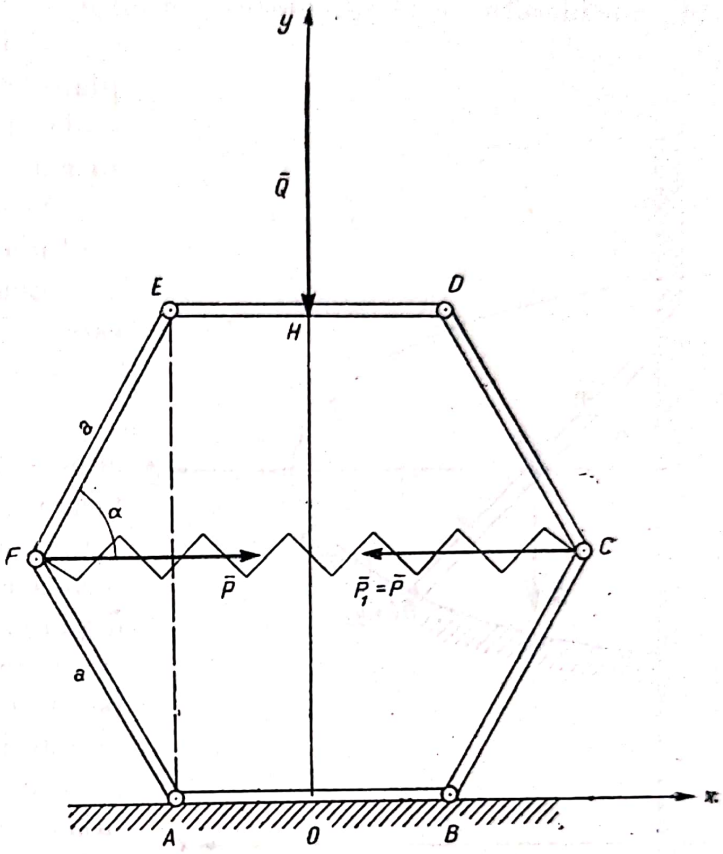


Fig. 32.8

Rezolvare. Sistemul este format din șase bare rigide, articulate (laturile hexagonului), și un resort (un corp deformabil).

Conform celor arătate în formula (32.5), pentru expresia lucrului mecanic virtual trebuie considerate — pe lîngă forțele date $(\bar{Q})$ — și forțele interioare $(\bar{P})$ datorite resortului, deoarece lucrul mecanic al acestora nu mai este nul, corpul (resortul) fiind deformabil.

Se alege sistemul de axe xOy cu originea în mijlocul laturii AB și cu axa Oy trecînd prin centrul hexagonului. Se consideră o deplasare virtuală care coboară pe verticală punctul de aplicație al forței Q și depărtează punctele F și C.

Proiecțiile forțelor pe sistemul de axe alese vor fi:

$$\bar{Q}\ (0;\ Q);\quad \bar{P}\ (P;\ 0);\quad \bar{P}'\ (-P;\ 0).$$

Coordonatele punctelor lor de aplicație:

$$H\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2a\sin\alpha \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_C = \dfrac{a}{2} + a\cos\alpha \\ y_C = a\sin\alpha \end{cases}$$

32.9. O bară omogenă AB de lungime $2a$, de greutate G, se sprijină cu un capăt pe un perete vertical neted și cu celălalt capăt pe un profil neted

32.8. Un hexagon $ABCDEF$ format din bare articulate de lungime a, de greutate neglijabilă, are bara AB fixată și se găsește în echilibru într-un plan vertical sub acțiunea forței Q, verticală, care acționează la jumătatea laturii DE și a eforturilor dezvoltate de resortul care leagă articulațiile CF. În poziția liberă resortul are lungimea cît latura hexagonului și are constanta elastică K.

Cunoscînd intensitatea forței $\bar{Q}$ se cere să se determine unghiul α la echilibru și forța $\bar{P}$ care se dezvoltă în resort.

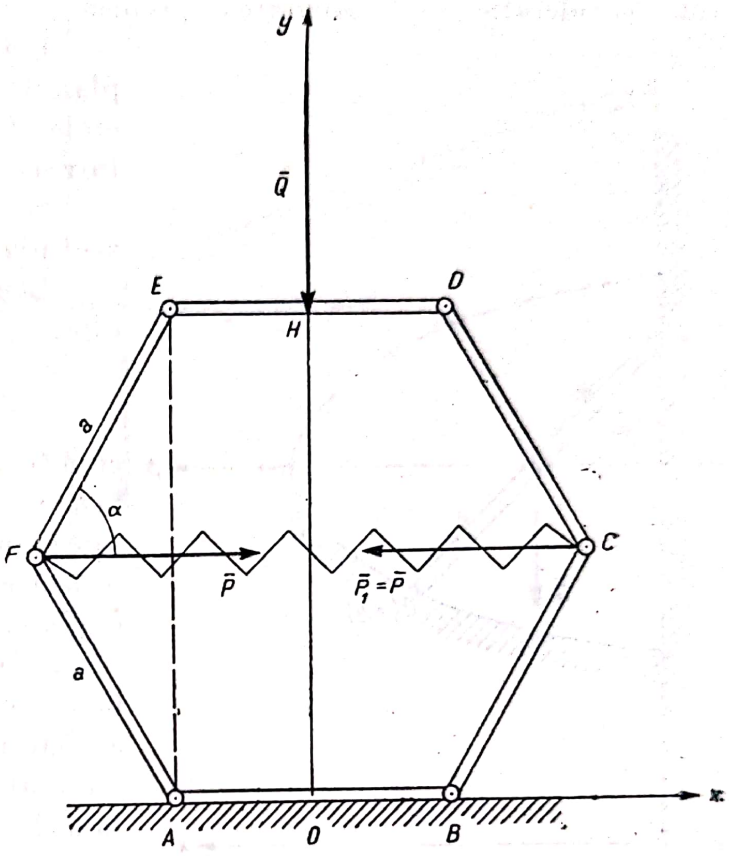


Fig. 32.8

Rezolvare. Sistemul este format din șase bare rigide, articulate (laturile hexagonului), și un resort (un corp deformabil).

Conform celor arătate în formula (32.5), pentru expresia lucrului mecanic virtual trebuie considerate — pe lîngă forțele date $(\bar{Q})$ — și forțele interioare $(\bar{P})$ datorite resortului, deoarece lucrul mecanic al acestora nu mai este nul, corpul (resortul) fiind deformabil.

Se alege sistemul de axe xOy cu originea în mijlocul laturii AB și cu axa Oy trecînd prin centrul hexagonului. Se consideră o deplasare virtuală care coboară pe verticală punctul de aplicație al forței Q și depărtează punctele F și C.

Proiecțiile forțelor pe sistemul de axe alese vor fi:

$$\bar{Q}\ (0;\ Q);\quad \bar{P}\ (P;\ 0);\quad \bar{P}'\ (-P;\ 0).$$

Coordonatele punctelor lor de aplicație:

$$H\begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2a\sin\alpha \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_C = \dfrac{a}{2} + a\cos\alpha \\ y_C = a\sin\alpha \end{cases}$$

32.9. O bară omogenă AB de lungime $2a$, de greutate G, se sprijină cu un capăt pe un perete vertical neted și cu celălalt capăt pe un profil neted

Scanned with OKEN Scanner

fix (fig. 32.9); cum trebuie să fie acest profil pentru ca bara să rămînă în echilibru în orice poziție?

Rezolvare. Nefiind frecări, singura forță care urmează să fie luată în considerație este greutatea proprie a barei.

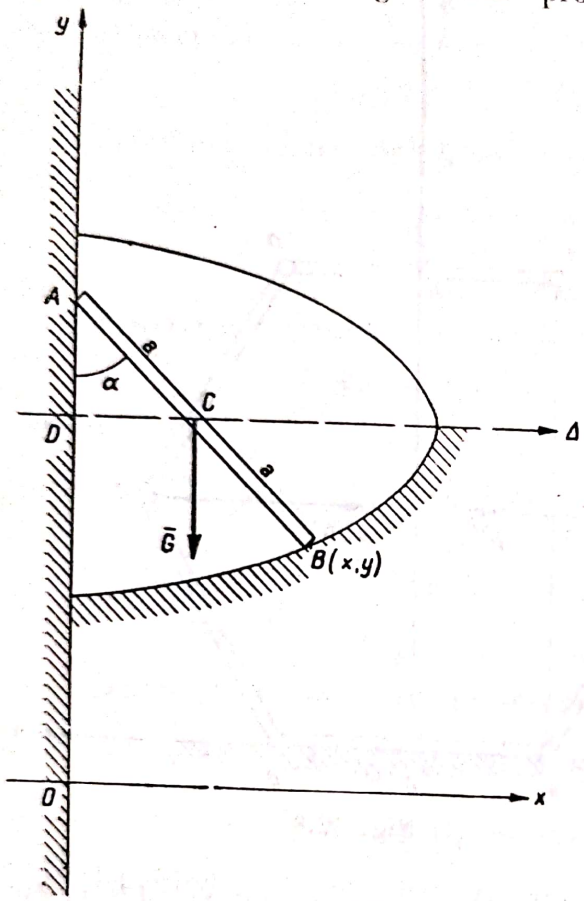


Fig. 32.9

Echilibrul este posibil numai în planul vertical care trece prin punctele A și B, adică bara să se miște într-un plan vertical.

Se alege sistemul de axe xOy în acel plan, axa Oy fiind conturul zidului.

Ecuația lucrului mecanic virtual este:

$$\delta L = -G \cdot \delta y_c = 0;$$

cum $G \neq 0$, urmează că pentru echilibru trebuie satisfăcută condiția $\delta y_c = 0$ sau ceea ce înseamnă $y_c = \text{const}$. Urmează că profilul pe care trebuie să se deplaseze capătul B al barei trebuie să fie astfel, încît, în tot timpul mișcării barei, ordonata centrului de greutate al barei să rămînă constantă; adică punctul C să se deplaseze pe orizontala Δ care trece la un moment dat prin centrul de greutate C.

Pentru aflarea ecuației profilului căutat se vor scrie expresiile parametrice ale coordonatei punctului B al barei la un moment dat și se va elimina parametrul; fie α unghiul făcut de bară cu zidul vertical; atunci:

$$B \begin{cases} x_B = 2a \sin\alpha \\ y_B = y_c - a \cos\alpha \end{cases}$$

Expresiile precedente sînt de altfel ecuațiile parametrice ale profilului căutat.

Ecuația carteziană va fi:

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_c}{a}\right)^2 = 1$$

Se recunoaște o elipsă cu centrul în $D(0, y_c)$ de semiaxa $2a$ și a, avînd ca axe Oy și Δ, și aceasta numai dacă $\cos\alpha_1 \leqslant 1$, ceea ce duce la $a \leqslant 2r$.

32.10. O bară omogenă AB de lungime $2l$ și greutate P se reazemă fără frecare într-un vas de lărgime a, ca în figura 32.10. Să se găsească poziția de echilibru dată de unghiul α.

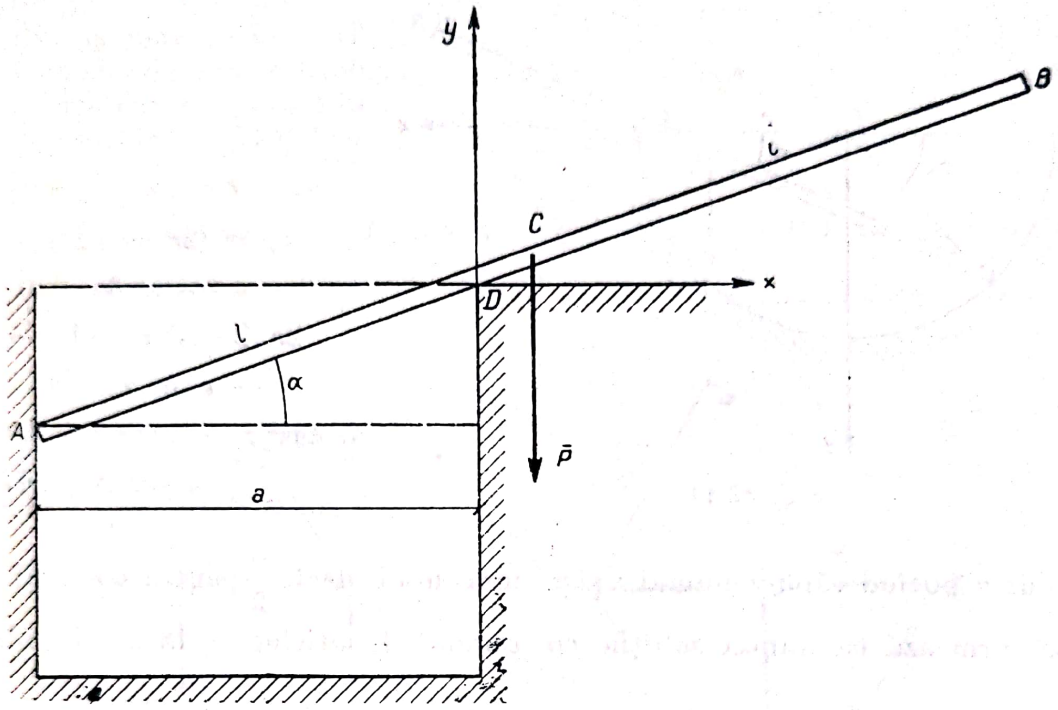


Fig. 32.10

Rezolvare. Alegînd originea axelor în punctul D și axa Dy paralelă cu forța P, corpul fiind acționat numai de greutatea sa proprie, condiția de echilibru conform formulei (34.12) dă:

$$\delta y_c = 0,$$

unde

$$y_c = l \sin \alpha - a \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\delta y_c = \left(l \cos \alpha - \frac{a}{\cos^2 \alpha} \right) \delta \alpha = 0,$$

de unde:

$$\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

32.11. Într-un vas emisferic neted, de rază $OC = r$, este așezată o bară AB de lungime $2a$ și greutate P. Să se determine unghiul α la echilibru și condiția posibilității echilibrului.

Rezolvare. Alegînd sistemul de axe cu originea în centrul semisferei și axa Oy paralelă cu forța $\bar{P}$, corpul fiind acționat de forțe date numai de greutatea proprie, condiția de echilibru (34.12) dă:

$\delta y_c = 0$ (principiul lui Torricelli), unde y_c este ordonata centrului de greutate al barei. Din triunghiul isoscel OAD se obține:

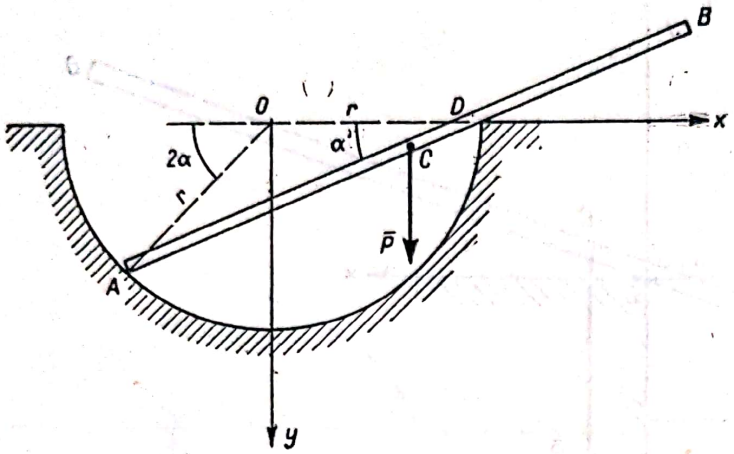


Fig. 32.11

$$y_c = r \sin \alpha - a \sin \alpha$$

$$\delta y_c = (2r \cdot \cos 2\alpha - a \cos \alpha)\, \delta\alpha = 0$$

$$2r\,(2\cos^2 \alpha - 1) - a \cos \alpha = 0$$

$$4r \cos^2 \alpha - a \cos \alpha - 2r = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32r}}{8r},$$

unghiul α putînd căpăta numai valori mai mici decît $\frac{\pi}{2}$ pentru condiții posibile, urmează că numai soluția cu semnul $+$ satisface echilibrul, adică:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 32r}}{8r}.$$

32.12. Se dă grinda cu zăbrele din figura 32.12, *a*, în plan vertical, formată din cinci bare omogene, fiecare de lungime l, de greutate proprie egală G. În nodul A, grinda este suspendată de un suport fix, în nodul C fiind atîrnată greutatea $\bar{Q}$.

Să se determine efortul în bara BD.

Rezolvare. Pentru determinarea efortului la punctul *15* în bara BD, se consideră toate forțele date (Q și greutățile G ale barelor), se elimină bara BD introducînd în locul ei efortul $\bar{T}$ din ea și se dă sistemului rămas o deplasare virtuală, de exemplu coborîrea articulației C pe verticală.

În calcule, pentru simplificare, se va considera rezultanta greutăților celor cinci bare, aplicată în punctul E, mijlocul barei BD, de intensitate $5G$.

Cu sistemul de axe din figură (32.12,*b*) și presupunînd că în bara BD este tensiune, ecuația lucrului mecanic virtual va fi:

$$\delta L = Q \cdot \delta y_c + 5G \cdot \delta y_E + T\,\delta x_D - T \cdot \delta x_B = 0,$$

unde:

$$y_C = 2l\cos\alpha; \qquad \delta y_C = -2l\sin\alpha\delta\alpha$$
$$y_E = l\cos\alpha; \qquad \delta y_E = -l\sin\alpha\delta\alpha$$
$$x_D = -l\sin\alpha; \qquad \delta x_D = -l\cos\alpha\delta\alpha$$
$$x_B = l\sin\alpha; \qquad \delta x_B = l\cos\alpha\delta\alpha$$

Ecuația de echilibru devine

$$-Q\,2l\sin\alpha\delta\alpha - 5Gl\sin\alpha\delta\alpha - T\cdot l\cos\alpha\delta\alpha - T\cdot l\cos\alpha\delta\alpha = 0,$$

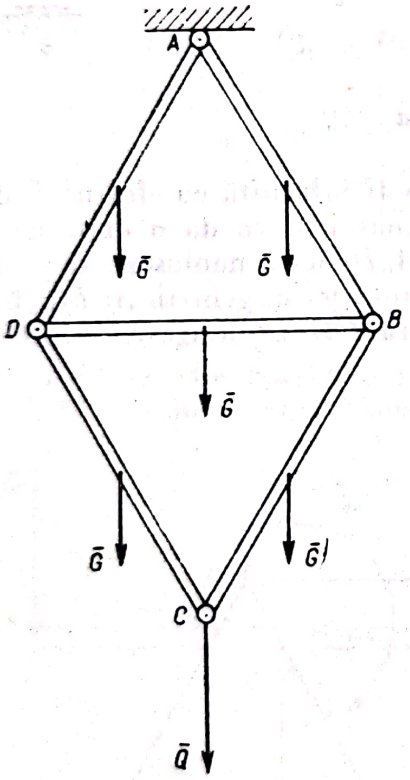


Fig. 32.12, *a*

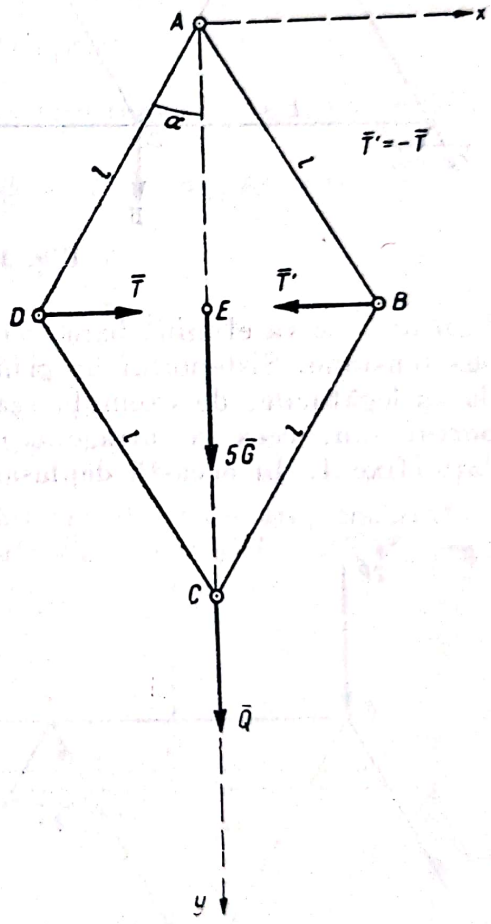


Fig. 32.12, *b*

din care:

$$T = -\left(Q + \frac{5G}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha = -\left(Q + \frac{5G}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ cu } \alpha = 30°.$$

În bara BD se dezvoltă deci o compresiune.

32.13. Se dă grinda cu zăbrele din figura 32.13, *a*, barele fiind de lungime egală *l*, și încărcate în nodurile *G* și *C* cu eforturile $2P$ și respectiv P.
Să se determine efortul în bara *CD*.

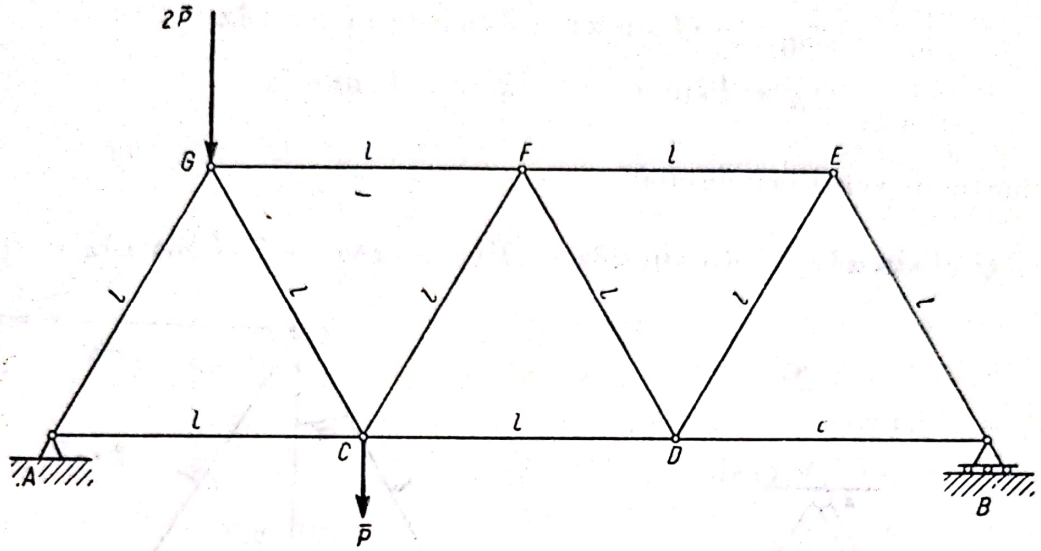


Fig. 32.13, *a*

Rezolvare. Se va elimina bara *CD* și va fi înlocuită cu efortul T din ea, presupus tensiune. Sistemului de grinzi rămas i se va da o deplasare compatibilă cu legăturile, de exemplu reazemul *B* să se deplaseze spre dreapta pe suportul său, ceea ce atrage o mică rotație a grinzii *ACFG* în jurul articulației fixe *A*. În această deplasare bara *CD* se lungește, eforturile $\bar{P}$

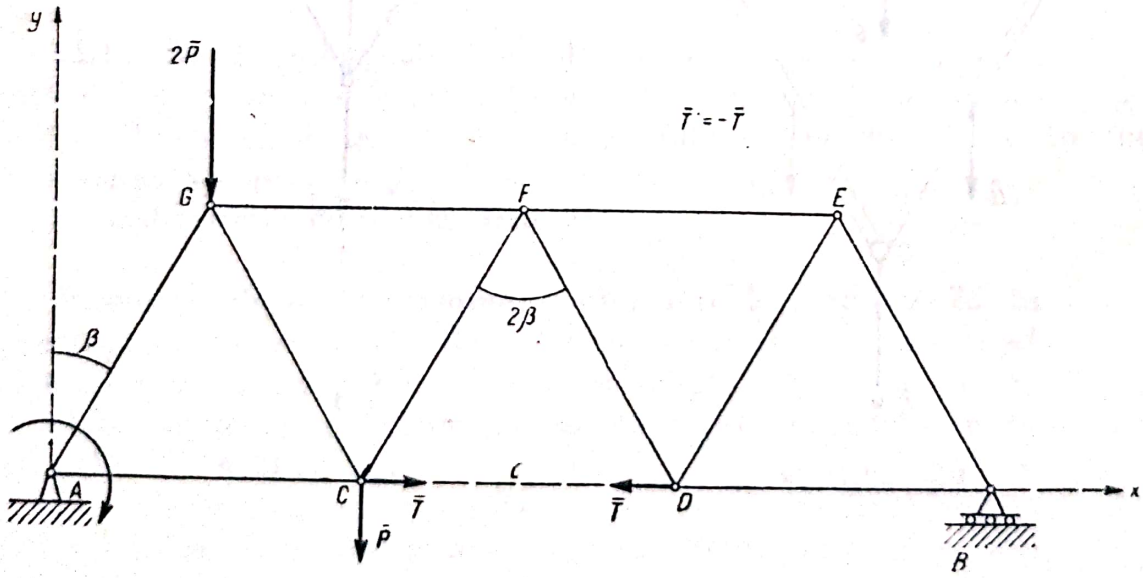


Fig. 32.13, *b*

și $2\bar{P}$ se rotesc față de *A*, producînd fiecare cîte un travaliu virtual. Alegînd sistemul de axe ca în figura 32.13,*b*, și notînd cu β unghiul făcut de axa *Oy* cu bara *AG*, ceea ce înseamnă că unghiurile

dintre bare vor fi 2β (triunghiuri echilaterale), ecuația lucrului mecanic virtual va fi:

$$\delta L = M_{2P} \cdot \delta\beta + M_P \cdot \delta\beta + T' \delta x_D = 0,$$

unde

$$M_{2P} = -2P \cdot \frac{l}{2} = -Pl$$

este momentul forței $2P$ față de originea axelor:

$$M_P = -P \cdot l, \text{ momentul forței } P$$

$$T' = -T$$

$$x_D = AC + CD = l + 2l \sin\beta$$

$$\delta x_D = 2P \cos\beta \delta\beta.$$

Presupunînd rotația în sensul acelor unui ceasornic, ecuația de echilibru devine:

$$-Pl(-\delta\beta) - Pl(-\delta\beta) - T \cdot 2l \cos\beta \delta\beta = 0$$

sau

$$2P - 2T\cos\beta = 0;$$

$$T = \frac{P}{\cos\beta} = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} P,$$

unde $\beta = 30°$, triunghiurile fiind echilaterale.

În bara CD se va naște deci o tensiune.

32.14. Să se afle reacțiunile grinzii simplu rezemate, încărcată ca în figura 32.14, cu două sarcini concentrate $F_1 = 4$ tf și $F_2 = 5$ tf, precum și

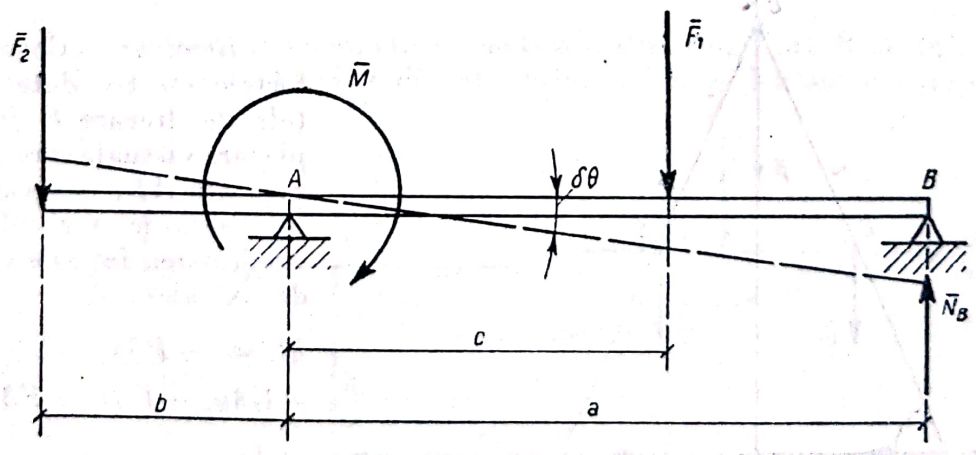


Fig. 32.14

momentul $M = 10$ tf · m. Deschiderile grinzii sînt $a = 3$ m, $b = 1$ m, iar $c = 2$ m.

Rezolvare. Conform celor arătate la punctul 14 din „Definiții și formule" la începutul acestui capitol, se va suprima reazemul B, înlocuindu-l prin

reacțiunea N_B și se va da o deplasare compatibilă cu legăturile rămase, de exemplu o rotație infinit mică $\delta\theta$ în jurul reazemului A al grinzii în sensul acelor unui ceasornic. Eforturile rămase vor produce un lucru mecanic virtual, a căror ecuație va fi:

$$L = M_{F_2}\,\delta\theta + M\delta\theta + M_{F_1}\,\delta\theta + M_{N_B}\,\delta\theta = 0$$

sau cum $\delta\theta \neq 0$, urmează că pentru echilibru va trebui ca ecuația de momente a sistemului față de punctul A să fie nulă, condiție cunoscută din statică.

Deci:

$$F_2 b - M + F_1 c - N_B \cdot a = 0$$

$$N_B = \frac{1}{a}(F_2 b - M + F_1 c) = \frac{1}{3}(5 \times 1 - 10 + 4 \times 2) = 1 \text{ tf.}$$

Procedînd la fel pentru reazemul din A, se va obține ecuația de momente a sistemului față de B:

$$F_2(a + b) - M - N_A \cdot a + F_1(a - c) = 0$$

$$N_a = \frac{1}{a}[F_2(a + b) - M + F_1(a - c)] =$$

$$= \frac{1}{3}(5 \times 4 - 10 + 4 \times 1) = \frac{14}{3} = 4{,}66 \text{ tf.}$$

32.15. O scară avînd laturile egale de lungime $2l$ și greutate G, suportă în vîrf o greutate P. Știind că între scară și podea coeficientul de frecare este f, se cere să se determine unghiul α — limită sub care scara mai poate sta în echilibru.

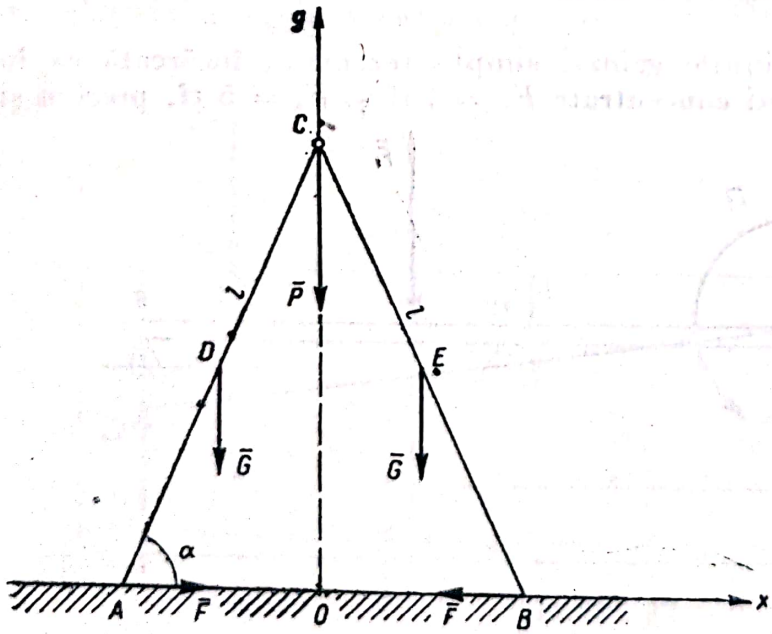


Fig. 32.15

Rezolvare. Considerînd forțele efectiv date și forțele de frecare F și o deplasare virtuală care mărește distanța AB, ecuația lucrului mecanic virtual va fi următoarea față de sistemul de axe ales:

$$\delta L = -P\delta y_C - G \cdot \delta y_D - G\delta y_E + F\delta x_A - F\delta x_B = 0,$$

unde:

$$y_C = l \sin\alpha; \quad \delta y_C = l\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$y_D = y_E = \frac{l}{2}\sin\alpha; \quad \delta y_D = \delta y_E = \frac{l}{2}\cos\alpha\,\delta\alpha$$

$$x_B = -x_A = l\cos\alpha; \quad \delta x_B = -\delta x_A = l\sin\alpha\,\delta\alpha$$

Ecuația de echilibru devine:

$$\left(-P \cdot l\cos\alpha - 2G\frac{l}{2}\cos\alpha + 2Fl\sin\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

$$-(PG)\cos\alpha + 2F\sin\alpha = 0$$

$$F = \frac{P+G}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Dar din legea lui Coulomb, la limită:

$$F + f \cdot N = f \cdot \frac{2G+P}{2},$$

urmează că α — limită va fi determinat de relația:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2G+P}{G+P}f.$$

32.16. Se dă sistemul de bare încărcate ca în figura 32.16,*a* și se cere să se determine reacțiunile din reazemele A,B,C,D.

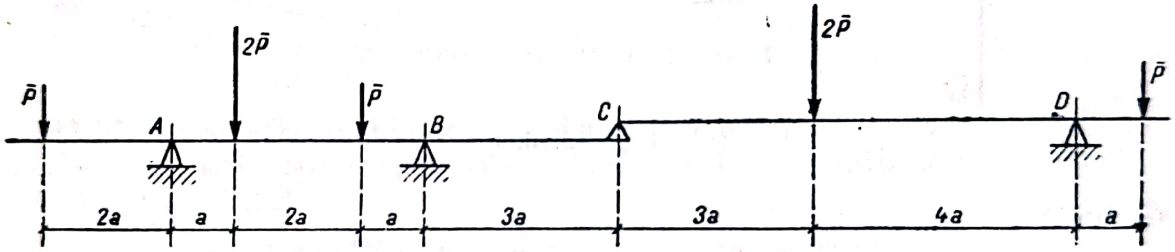


Fig. 32.16, *a*

Rezolvare. Pentru determinarea reacțiunii din reazemul B se înlocuiește reazemul cu reacțiunea N_B și se dă întregului sistem o deplasare compatibilă

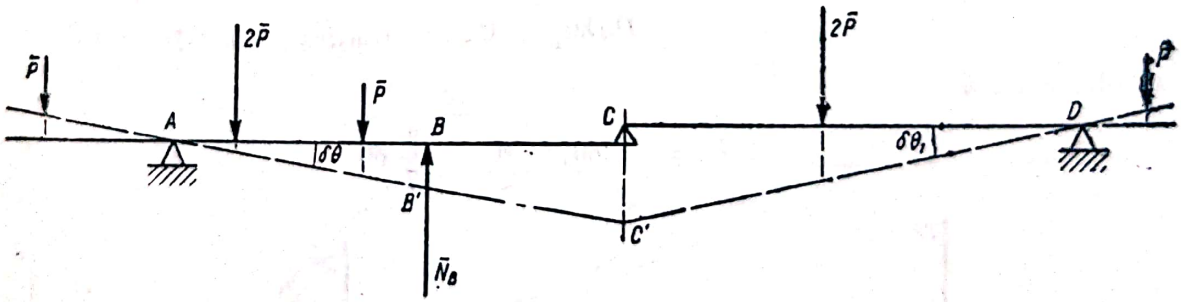


Fig. 32.16, *b*

cu legăturile, astfel că reazemul din B să primească deplasarea virtuală BB'. Bara AB se va roti în jurul lui A cu unghiul $\delta\theta$ și bara CD — în jurul lui D cu $\delta\theta_1$ (fig. 32.16, *b*).

Expresia lucrului virtual este:

$$\delta L = -P2a\delta\theta + 2Pa\delta\theta + P3a\delta\theta - N_B 4a\delta\theta + 2P4a\delta\theta_1 - Pa\delta\theta_1 = 0$$

sau

$$\delta L = 3Pa\delta\theta - 4N_B a\delta\theta + 7Pa\delta\theta_1 = 0,$$

observînd că:

$$cc' = 7a\delta\theta = 7a\delta\theta_1$$

se obține:

$$\delta\theta_1 = \frac{7}{7}\delta\theta = \delta\theta,$$

de unde:

$$3Pa\delta\theta - 4N_B a\delta\theta + 7Pa\delta\theta = 0,$$

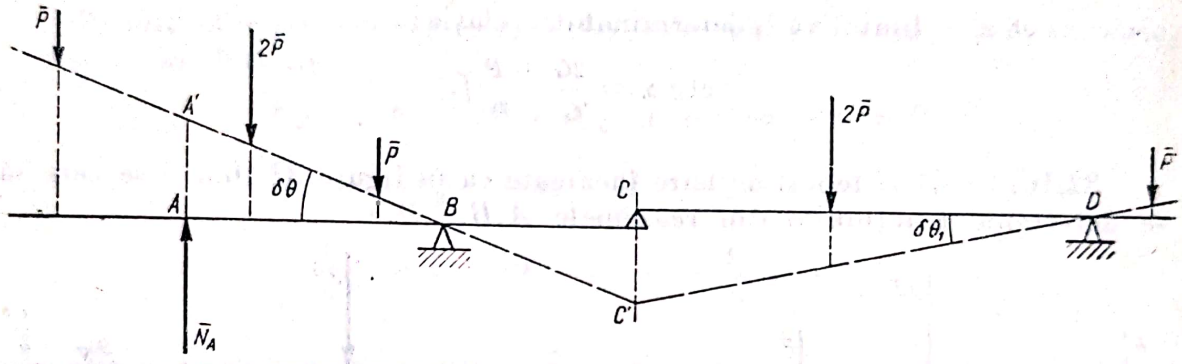


Fig. 32.16, *c*

de unde:

$$N_B = \frac{5P}{2}.$$

Se procedează în mod analog pentru reazemul din A (fig. 32.16, *c*):

$$\delta L = -P\,6a\delta\theta + N_A\,4a\delta\theta - 2P3a\delta\theta - Pa\delta\theta + 2P4a\delta\theta_1 - Pa\delta\theta_1 = 0;$$

se observă că:

$$3a\delta\theta = 7a\delta\theta_1; \quad \theta_1 = \frac{3}{7}\delta\theta;$$

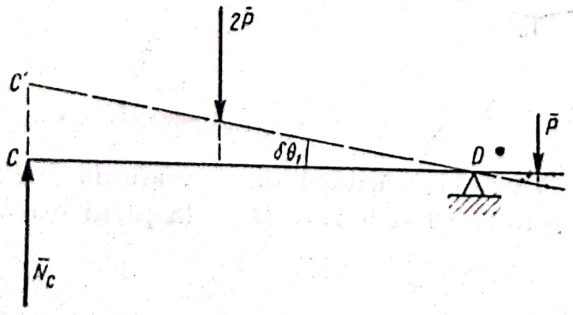


Fig. 32.16, *d*

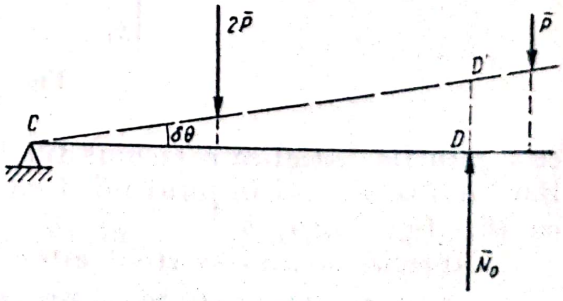


Fig. 32.16, *e*

deci:

$$\delta L = -6Pa\delta\theta + 4N_A a\delta\theta - 6Pa\delta\theta - Pa\delta\theta + \\ + \frac{24}{7}Pa\delta\theta - \frac{3}{7}Pa\delta\theta = 0.$$

Rezultă:

$$N_A = \frac{10P}{4} = \frac{5P}{2}.$$

Pentru a determina reacțiunea din C este necesar să se folosească numai bara CD (fig. 32.16, *d*):

$$\delta L = N_c \cdot 7a\delta\theta - 2P \cdot 4a\delta\theta + P \cdot a\delta\theta = 0;$$

rezultă (v. fig. 32.16, *e*):

$$N_c = P$$

$$\delta L = -2P \cdot 3a\delta\theta + N_D 7a\delta\theta - P \cdot 8a\delta\theta = 0;$$

rezultă:

$$N_D = \frac{10P}{7}.$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

32.17. Să se afle unghiul φ care determină poziția de echilibru a sistemului de bare articulate și sprijinite ca în figura 32.17, neglijîndu-se frecările. Se dă (v. fig. 32.17):

$$OA = OB = a;\ AC = 2a;$$ greutatea barei

AD este P și a barei AC este $2P$.

Răspuns:

$$\cos\varphi = 0{,}1 \pm \sqrt{51}.$$

Cîte soluții are problema?

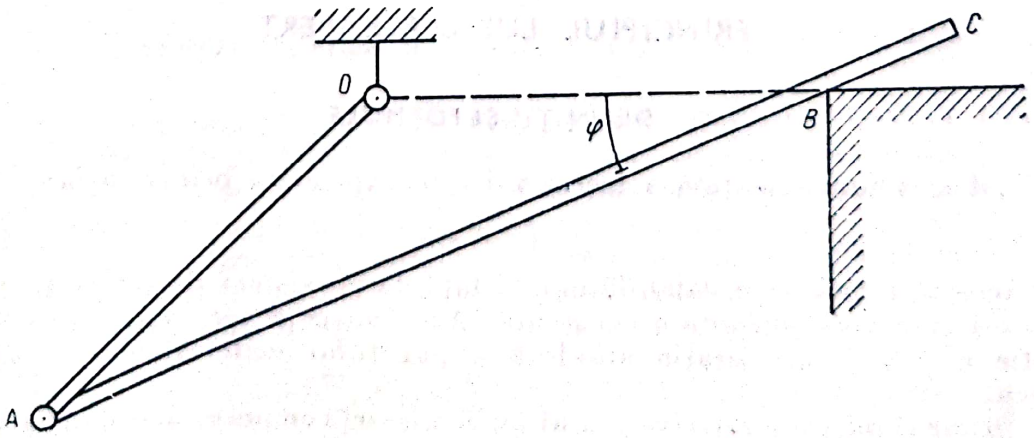


Fig. 32.17

32.18. Un mecanism plan cu articulații are construcția ca în figura 32.18. Barele OA, OB, AD, NC etc. sînt fără greutate și formează o serie de romburi. Să se afle efortul T care apare în resortul OK, dacă se atîrnă de articulația M o greutate Q.

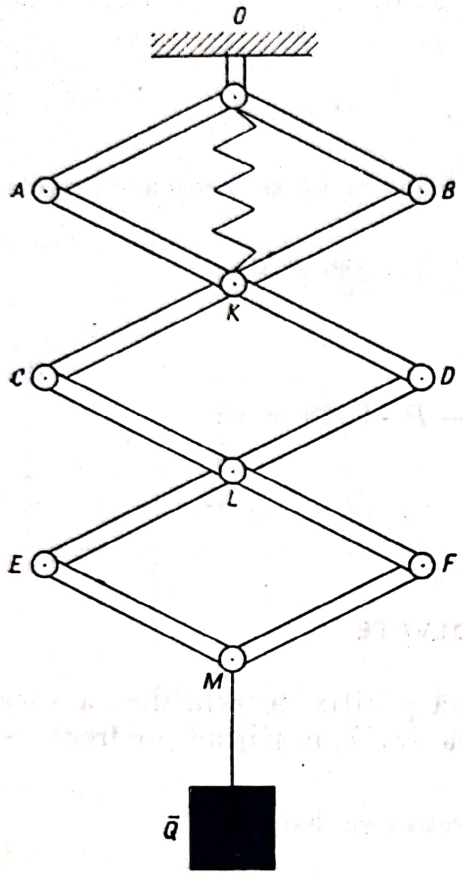


Fig. 32.18

Răspuns:

$$T = MQ,$$

unde M este numărul romburilor în cazul din figură $n = 3$.

32.19. Să se afle eforturile în toate barele grinzii cu zăbrele din figura 32.19. Se va lua:

$$l = 1 \text{ m}; \; P = 2 \text{ tf}.$$

Răspuns:

$$T_1 = T_3 = T_5 = +2 \text{ tf}$$

$$T_2 = T_4 = \sqrt{5} \text{ tf}.$$

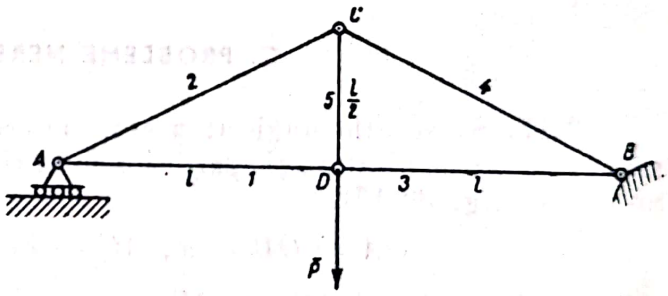


Fig. 32.19

Capitolul XXXIII

PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

A. DEFINIȚII ȘI FORMULE

1. Legea fundamentală a mecanicii este exprimată prin relația:

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \tag{33.1}$$

Această relație este valabilă numai față de un sistem de referință fix și în cazul cînd masa nu este o constantă. Accelerația $\bar{a}$ care apare în această relație este deci accelerația absolută a punctului material pentru care se aplică.

În cazul mișcării relative sau al unor mișcări compuse, accelerația absolută este sumă vectorială a mai multor accelerații.

Deci va trebui să se scrie relația (33.1) sub forma:

$$\sum \bar{F} = \sum m\bar{a}.$$

Dar $\sum \bar{F}$ conține toate forțele de legătură și active care acționează asupra punctului material sau corpului material. Se grupează separat forțele active și forțele de legătură, astfel că se va putea scrie:

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_c = \sum m\bar{a},$$

sau sub altă formă:

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_e - \sum m\bar{a} = 0$$

Dacă se înseamnă $\sum m\bar{a} = \sum F_i$, relația devine:

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_e + \sum \bar{F}_i = 0. \qquad (33.2)$$

Se observă că această relație fiind egală cu zero, fiind scrisă vectorial, este asemănătoare condiției de echilibru din statică $\bar{R} = \sum \bar{F}_n = 0$ rezultanta nulă. Se menționează că nu este vorba despre un echilibru real, ci despre unul fictiv, care are numai o exprimare matematică asemănătoare cu aceea a echilibrului real, în realitate corpul este în mișcare.

În cazul punctului material, această condiție este necesară și suficientă, și se poate scrie analitic dacă se proiectează forțele sub forma:

$$\sum X_a + \sum X_e + \sum X_i = 0$$
$$\sum Y_a + \sum Y_e + \sum Y_i = 0.$$

În cazul corpului supus la legături, aceste două ecuații sînt necesare, dar nu sînt suficiente. Este necesar să introducem și ecuația de momente (numai în cazul în care corpul este supus și la o mișcare de rotație).

În acest caz, se poate scrie:

$$\sum \bar{M}_a + \sum \bar{M}_e + \sum \bar{C}_i = 0,$$

unde $\sum \bar{M}_a$ reprezintă suma momentelor forțelor active față de un punct oarecare.

$\sum M_e$ reprezintă suma momentelor forțelor de legătură față de același punct.

$\sum C_i$ reprezintă cuplul de inerție față de mișcarea absolută, adunat cu suma momentelor forțelor de inerție în raport cu mișcarea absolută.

$C_i = J \cdot \bar{\varepsilon}$, unde J este momentul de inerție în raport cu axa de rotație, și ε accelerația unghiulară absolută.

În cazul sistemelor de corpuri se aplică metoda izolării corpurilor, aplicîndu-se apoi ca și în statică ecuațiile de echilibru.

Pentru un corp în spațiu vor rezulta deci relațiile:

$$\sum \bar{F}_a + \sum \bar{F}_e + \sum \bar{F}_i = 0,$$
$$\sum \bar{M}_a + \sum \bar{M}_e + \sum \bar{C}_i = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau analitic:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_a + \sum X_e + \sum X_i = 0\\
&\sum Y_a + \sum Y_e + \sum Y_i = 0\\
&\sum Z_a + \sum Z_e + \sum Z_i = 0\\
&\sum M_{xa} + \sum M_{xl} + \sum C_{ix} = 0\\
&\sum M_{ya} = \sum M_{yl} + \sum C_{iy} = 0\\
&\sum M_{za} + \sum M_{zl} + \sum C_{iz} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{33.3}$$

în cazul forțelor plane vor rezulta trei ecuații:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_a + \sum X_l + \sum X_i = 0\\
&\sum Y_a + \sum Y_l + \sum Y_i = 0\\
&\sum M_a + \sum M_l + \sum C_i = 0
\end{aligned}\right| \tag{33.4}$$

Cazurile în care principiul lui d'Alembert este avantajos în aplicații:

a) Studiul mișcărilor sistemelor de corpuri cu un singur grad de libertate (determinarea vitezelor și accelerațiilor).

b) Calculul forțelor de legătură în cazul corpurilor în mișcare.

c) Studiul echilibrului relativ și probleme de echilibrare.

Principiul lui d'Alembert poate fi aplicat combinat cu principiul deplasărilor virtuale.

Ecuația lucrului mecanic virtual devine în acest caz:

$$\delta L = \sum (\bar{F} - m\bar{a})\ \delta\bar{r} = 0. \tag{33.5}$$

Expresia analitică corespunzătoare este

$$\sum [(X - m\ddot{x})\ \delta x + (Y - m\ddot{y})\ \delta y + (Z - m\ddot{z})\delta z] = 0. \tag{33.6}$$

Dacă corpurile au o mișcare de rotație se poate scrie relația:

$$\delta L = \sum (M - C_i)\delta\theta = 0 \tag{33.7}$$

sau

$$\sum [(M_x - C_{ix})\ \delta\theta_x + (M_y - C_{iy})\ \delta\theta_y + (M_r - C_{iz})\ \delta\theta_z] = 0. \tag{33.8}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

33.1. Un corp de greutate G reazemă pe un plan luciu înclinat cu unghiul α față de orizontală. Corpul este legat la capătul unui fir având direcția paralelă cu planul înclinat și trecînd peste un scripete de masă neglijabilă A. La

celălalt capăt al firului este legată o greutate P care se poate mișca pe verticală ($P > G \sin \alpha$) (v. fig. 33.1, *a*).

La început sistemul este în echilibru. Să se afle accelerația cu care se vor mișca cele două corpuri și tensiunea din fir. Se neglijează frecările și rezistența aerului.

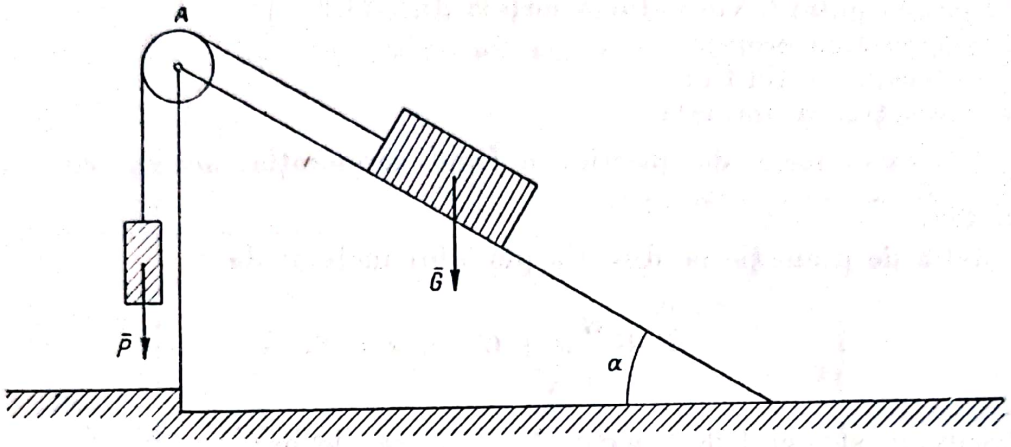


Fig. 33.1, *a*

Rezolvare.

Se izolează cele două corpuri. Asupra corpului P vor acționa forțele (fig. 33.1,*b*):

P — greutatea proprie;

T — tensiunea din fir;

$F_{i_1} = \frac{P}{g} a$, a fiind accelerația.

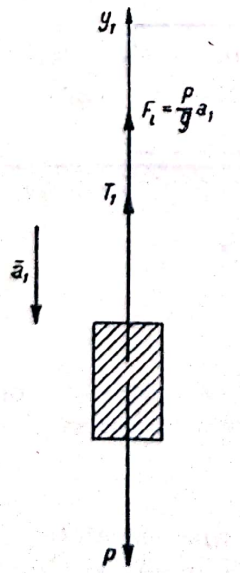


Fig. 33.1, *b*

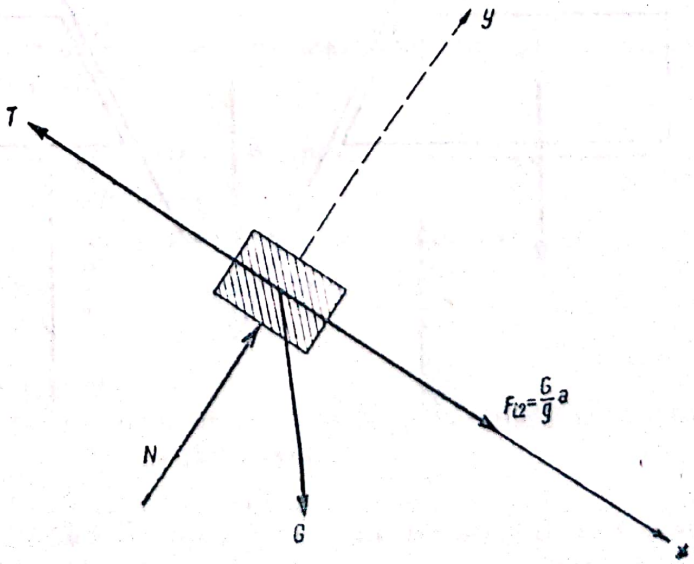


Fig. 33.1, *c*

Ecuația de proiecție pe verticală dă:

$$F = \frac{P}{g} a - P = 0. \qquad (1)$$

Asupra corpului G vor acționa forțele (fig. 33.1, c):
G — greutatea proprie;
T — tensiunea din fir;
N — reacțiunea normală;
$F_{i_2} = \frac{G}{g} a$ — forța de inerție, a fiind accelerația, aceeași cu cea din primul caz.

Ecuația de proiecție pe direcția planului înclinat dă:

$$-T + \frac{G}{g} a + G \sin \alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1) și (2) se obține:

$$a = \frac{P - G \sin \alpha}{P + G} g \qquad T = \frac{PG\,(1 - \sin \alpha)}{P + G}.$$

Mișcarea sistemului este uniform accelerată.

33.2. O pană a cărei secțiune este un triunghi isoscel, fețele laterale perfect netede fiind înclinate fiecare cu unghiul α față de verticală, are greutatea G și se sprijină pe două prisme identice, de greutate P fiecare, care

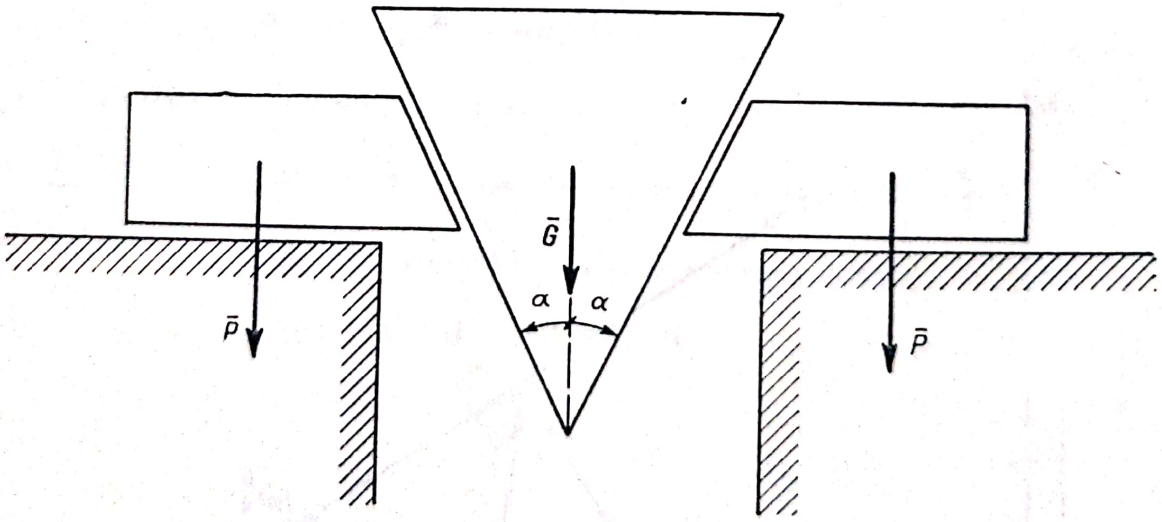


Fig. 33.2, a

pot aluneca fără frecare pe un plan orizontal. Să se determine accelerațiile prismei și a penelor, precum și reacțiunile dintre prisme și pană, și dintre prisme și planul orizontal.

Rezolvare. Se izolează pana din mijloc, se desenează separat și se introduc forțele; acestea sînt (fig. 33.2,*b*):

greutatea penei G;

reacțiunile normale N_1 și N_1' dintre cele două prisme;

forța de inerție $F_i = \frac{G}{g} a_1$,

unde a_1 este accelerația penei care cade pe verticală.

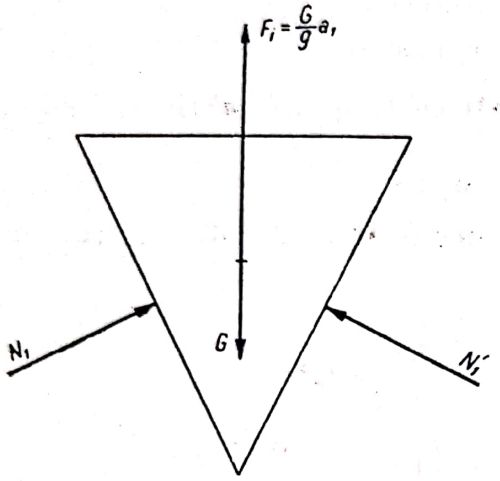


Fig. 33.2, *b*

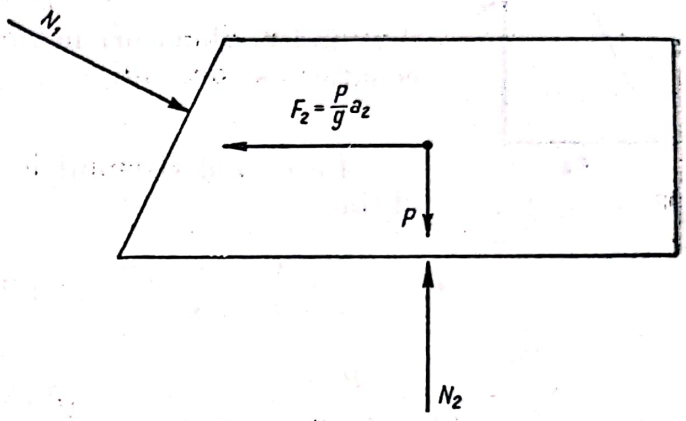


Fig. 33.2, *c*

Scriind ecuațiile de proiecții pe orizontală și pe verticală se obține:

$$N_1 \cos \alpha = N_1' \cos \alpha = 0, \tag{1}$$

$$\frac{G}{g} a_1 - G + N_1 \sin \alpha + N_1' \sin \alpha = 0. \tag{2}$$

Se izolează una dintre prisme, se desenează separat și se introduc forțele (fig. 33.2,*c*); acestea sînt:

G — greutatea prismei;
N_1' — reacțiunea penei;
N_2 — reacțiunea planului orizontal;
$F_i = \frac{P}{g} a_2$ — forța de inerție,

unde a_2 este accelerația prismei.

Scriind ecuațiile de proiecții pe orizontală și pe verticală se obține:

$$\frac{P}{g} a_2 - N_1' \cos \alpha = 0, \tag{3}$$

$$N_2 = N_1' \sin \alpha - P = 0. \tag{4}$$

Se observă din prima ecuație că: $N_1 = N_1'$, astfel că se deduce ușor că pentru a doua prismă se obțin aceleași ecuații, dar cu semn schimbat (datorită simetriei).

A rezultat un sistem de patru ecuații cu cinci necunoscute: N_1, N_1', N_2, a_1 și a_2. Pentru rezolvarea sistemului este necesară încă o ecuație, care se obține scriind relația cinematică (geometrică) dintre mișcarea penei și a prismelor. Notînd cu x_1 o deplasare oarecare pe verticală a penei și cu x_2 — deplasarea corespunzătoare a prismei pe orizontală, se poate scrie (fig. 33.2,*d*):

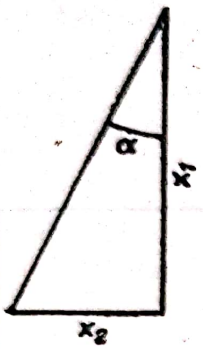


Fig. 33.2, *d*

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg} \alpha \ ;$$

derivînd de două ori în raport cu timpul se obține a cincea ecuație a sistemului:

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (1), (2), (3), (4), (5), se obține:

$$a_1 = \frac{G}{G + 2P \operatorname{tg} \alpha} g; \qquad a_2 = \frac{G}{2P + G \operatorname{cotg}^2 \alpha} g;$$

$$N_1 = \frac{P \cdot G}{(2P + G \operatorname{cotg}^2 \alpha) \cos \alpha}; \qquad N_2 = P \left[1 + \frac{G \operatorname{tg} \alpha}{2P + G \operatorname{cotg}^2 \alpha}\right].$$

33.3. Trei greutăți G_1, P_1 și Q sînt legate între ele ca în figura 33.3,*a*. P este așezat pe un plan orizontal aspru, și Q — pe un plan aspru înclinat cu

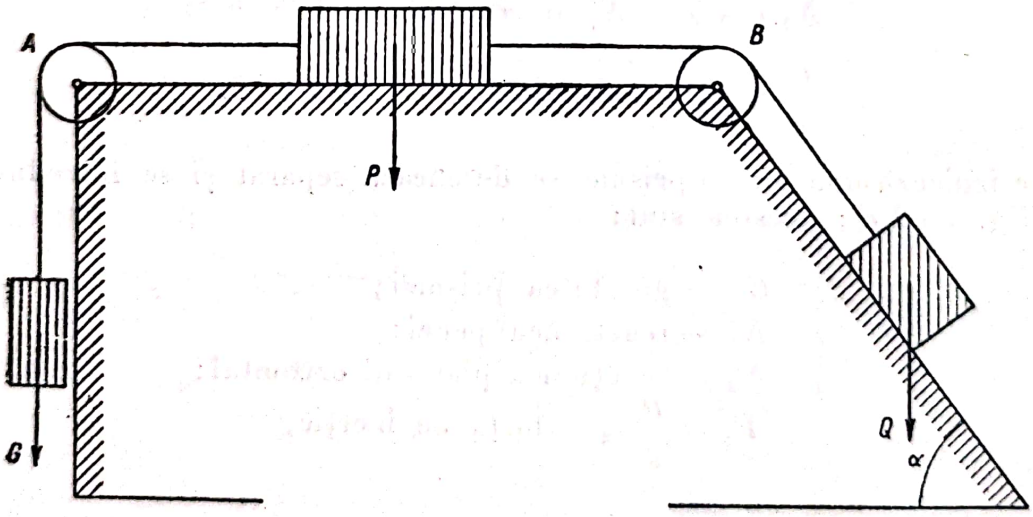


Fig. 33.3, *a*

unghiul α față de orizontală. Corpurile Q și G sînt legate de corpul P prin fire care trec peste scripeți indicați, de masă neglijabilă (v. fig. 33.3,*a*). Să se studieze mișcarea corpurilor și să se determine reacțiunile din fire.

Rezolvare. Se izolează fiecare corp în parte și se introduc forțele. Asupra corpului G lucrează forțele (fig. 33.3,*b*):

G — greutatea;

T — tensiunea din fir;

$F_i = \frac{G}{g} a$ — forța de inerție, unde a este accelerația care s-a presupus fiind dirijată în jos. Dacă după rezolvarea sistemului va rezulta că este negativă, sensul ei real va fi invers.

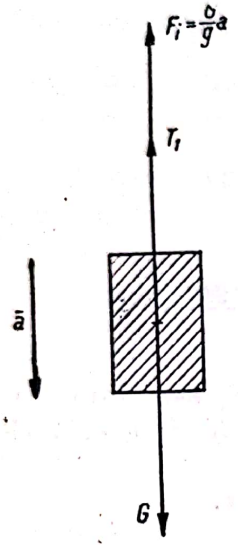


Fig. 33.3, *b*

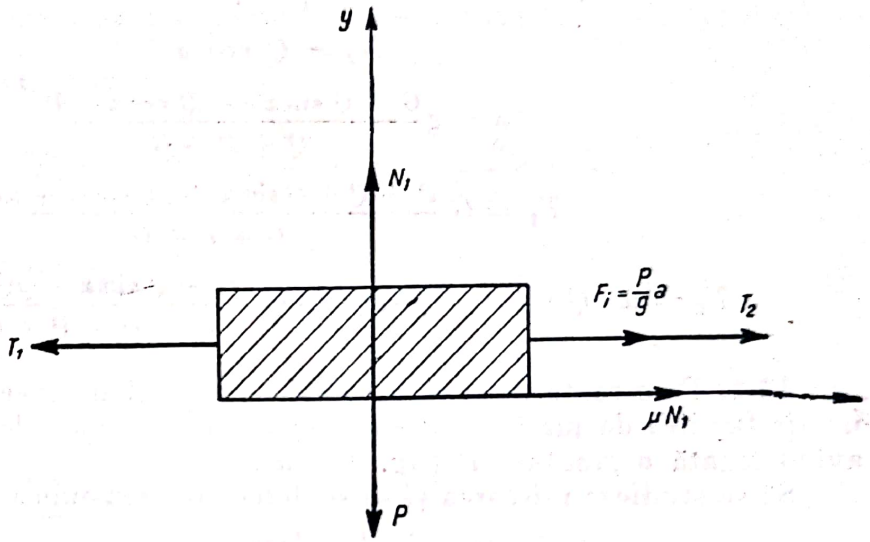


Fig. 33.3, *c*

Din ecuația de proiecție rezultă:

$$\frac{G}{g} a + T_1 - G = 0. \qquad (1)$$

Asupra corpului P lucrează forțele indicate în figura 33.3,*c*.

Tensiunea T_1 din fir este egală și de sens contrar cu cea aplicată corpului G, deoarece scripetele s-a presupus fără masă și nu schimbă tensiunea din fir.

Ecuațiile de proiecții dau relațiile:

$$T_2 = \frac{P}{g} a + \mu N_1 - T_1 = 0, \qquad (2)$$

$$N_1 - P = 0. \qquad (3)$$

Asupra corpului Q lucrează forțele indicate în figura 33.3,*d*.

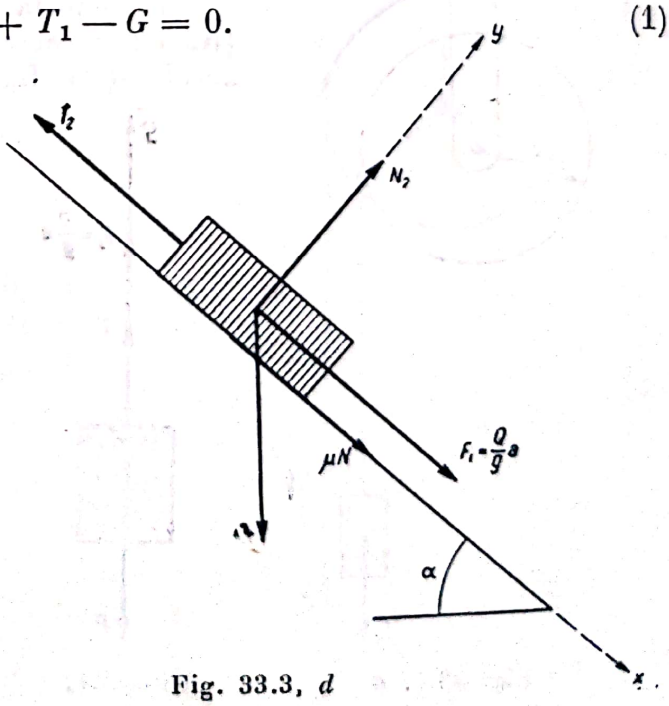


Fig. 33.3, *d*

Ecuațiile de proiecții sînt:

$$\frac{Q}{g}a + \mu N_2 + Q \sin\alpha - T_2 = 0, \tag{4}$$

$$N_2 - Q\cos\alpha = 0. \tag{5}$$

Se obțin în acest fel ecuații cu cinci necunoscute: a_1, T_1, T_2, N_1 și N_2. Rezolvînd sistemul se obține:

$$N_1 = P;$$

$$N_2 = Q\cos\alpha;$$

$$a = g\frac{G + Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha - P}{Q + P + G}$$

$$T_1 = G\frac{P + Q + Q\sin\alpha + \mu Q\cos\alpha + \mu P}{Q + P + G}$$

$$T_2 = \mu \cdot Q\cos\alpha + Q\sin\alpha + Q\frac{G - Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha\mu P}{Q + P + G}.$$

33.4. Pe o roată de rază R avînd momentul de inerție J_0 este înfășurat un fir flexibil de masă neglijabilă prins cu un capăt de roată și la celălalt avînd legată o greutate P (fig. 33.4,*a*).

Să se studieze mișcarea și să se determine tensiunea în fir.

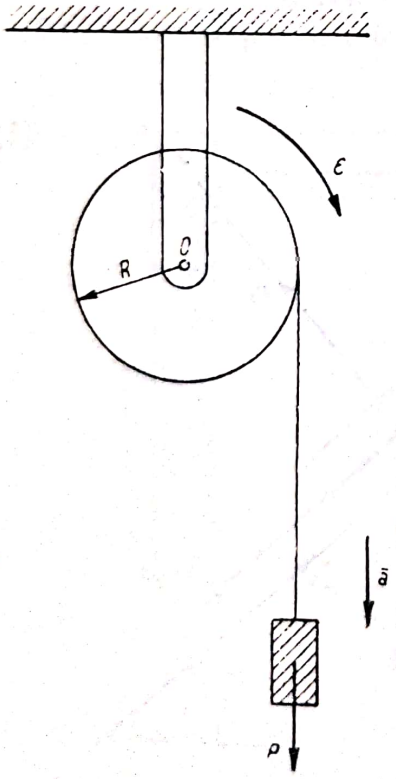


Fig. 33.4, *a*

Rezolvare.

1) Se izolează corpul P, introducînd forțele:

P — forța dată;

T — tensiunea în fir (forță de legătură);

F_i — forța de inerție egală cu masa înmulțită cu accelerația și avînd sensul direct opus accelerației (fig. 33.4,*b*).

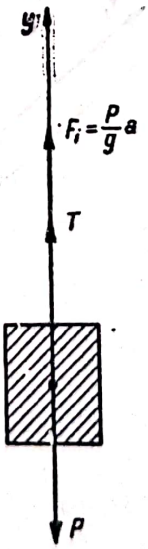


Fig. 33.4, *b*

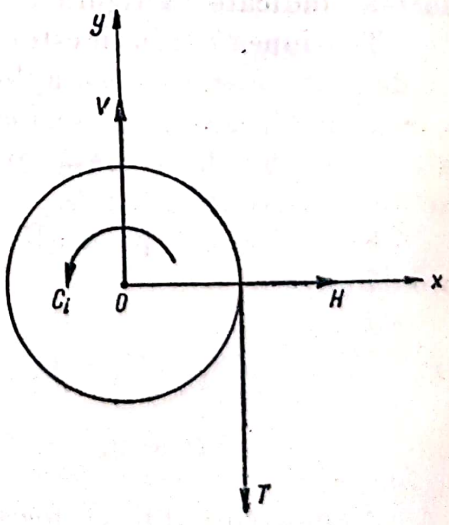


Fig. 33.4, *c*

Izolînd roata, se introduc forţele (fig. 33.4,*c*):

T — tensiunea în fir;

H şi V — componentele forţei necunoscute din articulaţia O (forţa de legătură);

C_i — cuplul forţelor de inerţie din mişcarea de rotaţie a roţii O egal cu $C_i = J_0 \cdot \varepsilon$.

Acest cuplu este întotdeauna de sens invers acceleraţiei unghiulare $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

2) Se pot scrie ecuaţiile:

Pentru corpul P $\sum y_1 = 0$ $\quad -P + T + \frac{P}{g} a = 0$ (1)

Pentru scripete: $\sum M_0 = 0$ $\quad -TR + J\varepsilon = 0$ (2)

$\sum X_2 = 0$ $\quad H = 0$ (3)

$\sum Y_2 = 0$ $\quad V - T = 0$ (4)

Rezolvînd acest sistem se obţine

$$a = \frac{PR^2}{PR^2 + Jg} g$$

$$V = T \qquad H = 0$$

$$T = \frac{P}{1 + \frac{PR^2}{J \cdot g}}$$

33.5. Peste un scripete O de rază R şi moment de inerţie polar J_0 este trecut un fir flexibil de masă neglijabilă, la capetele căruia sînt legate două greutăţi Q şi R (fig. 33.5,*a*).

Presupunînd $P > Q$ şi neglijînd frecările să se studieze mişcarea şi să se afle tensiunile în fir.

Rezolvare. P fiind mai mare decît Q, acceleraţiile vor fi în sensurile indicate de săgeată.

Se izolează corpurile introducînd şi forţele (respectiv cuplurile) de inerţie, se scriu condiţiile

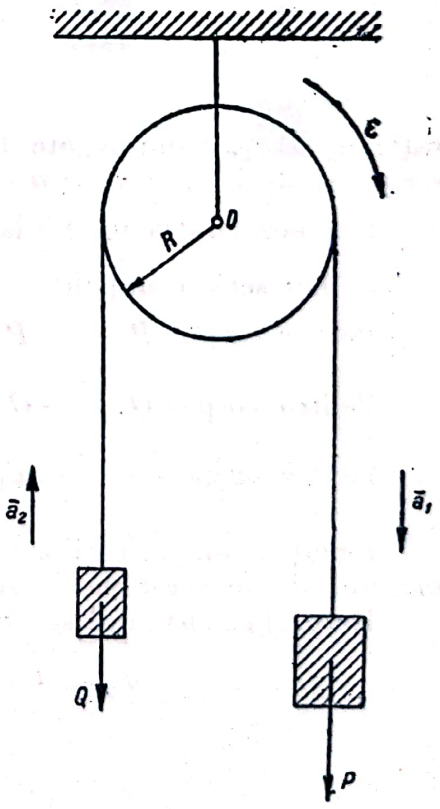


Fig. 33.5, *a*

de echilibru și, rezolvînd sistemul de ecuații format, se determină necunoscutele (fig. 33.5,*b*).

Dacă: $P>Q$, accelerațiile vor avea sensurile arătate de săgeți. Presupunînd că greutatea P are accelerația a_1, greutatea Q va avea aceeași acce-

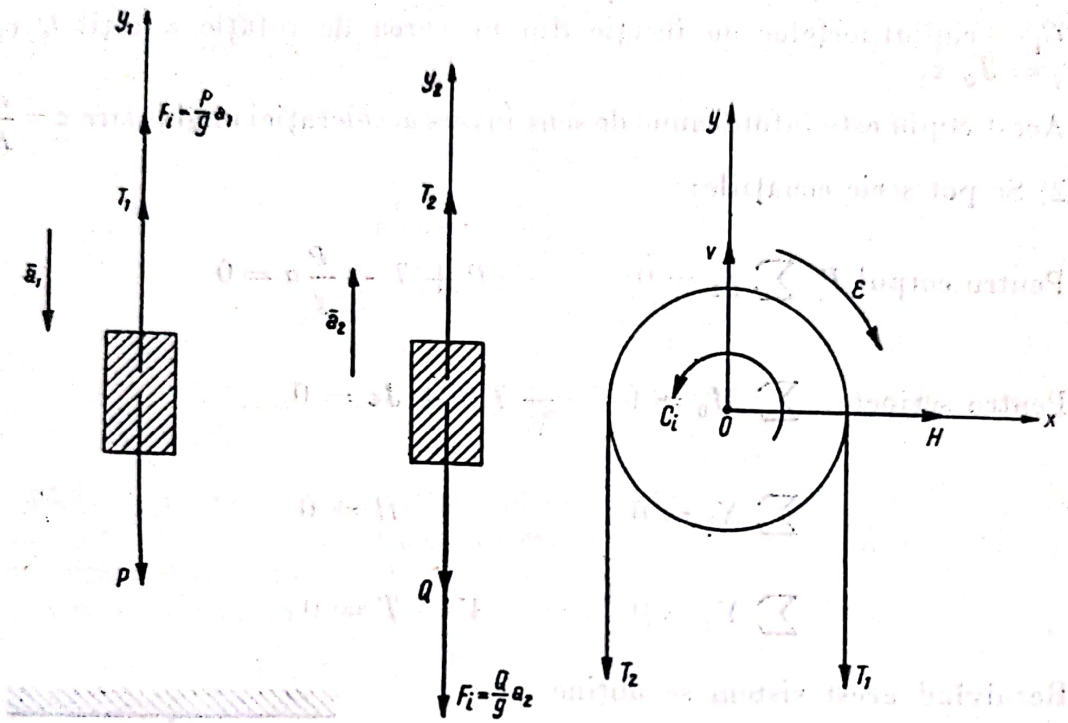


Fig. 33.5, *b*

rație $a_2 = a_1$, fiind legate la capetele aceluiași fir trecut peste un singur scripete; deci $a_2 = a_1 = a =$ accelerația firului.

ε — accelerația unghiulară a scripetelui este $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Se pot scrie ecuațiile:

Pentru corpul P: $\quad -P + T_1 + \frac{P}{g}a = 0.$

Pentru corpul Q: $\quad -Q + T_2 - \frac{Q}{g} = 0.$

Pentru scripete: $\quad -T_1R + T_2R + J \cdot \frac{a}{R} = 0.$

Ecuațiile de proiecții conțin necunoscutele H și V, care nu trebuie determinate, și din acest motiv se renunță la ele.

Rezolvînd sistemul se obține:

$$T_1 = P - \frac{P}{g}a \qquad T_2 = Q + \frac{Q}{g}a$$

$$a = \frac{P - Q}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{J}{R^2}}.$$

Observații. 1. Se observă că, datorită forțelor de inerție care apar cînd scripetele are masă, tensiunile în fir, T_1 și T_2 și sînt diferite.

2. Accelerația a este constantă — toate cantitățile din expresia care o determină fiind constante —, deci mișcarea este uniform accelerată.

33.6. Pe un scripete cilindric cu două trepte de raze respective R și r și cu momentul de inerție polar J_0 dat, sînt înfășurate în sens opus două fire flexibile, de masă neglijabilă, încărcate cu masele m_1 și m_2 (fig. 33.6,*a*).

Neglijînd frecările, se cere să se afle tensiunile în fire și accelerațiile sistemului.

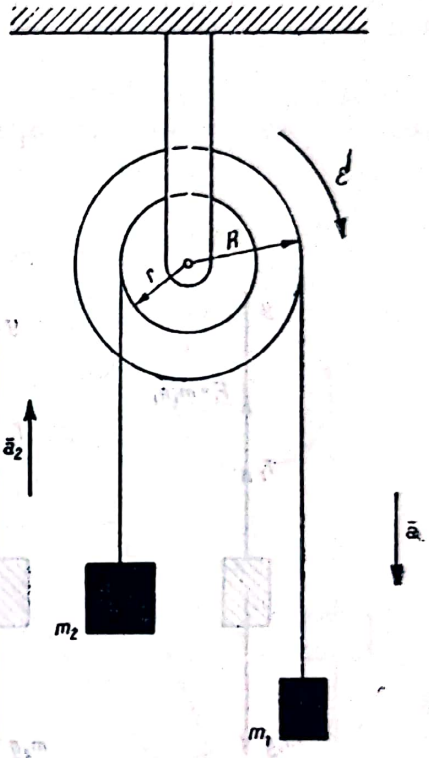


Fig. 33.6, *a*

Rezolvare. Dacă se presupune că M_1 coboară, accelerațiile fiecăruia dintre corpurile sistemului vor avea sensurile indicate în figura 33.6,*a*.

Dacă m_1, deplasîndu-se în jos, a parcurs un spațiu oarecare h_1, scripetele s-a rotit cu un unghi θ și m_2 s-a deplasat în sus cu h_2. Se poate scrie:

$$h_1 = R\theta$$
$$h_2 = r\theta,$$

θ fiind același pentru ambele trepte ale scripetelui.

Din aceste relații se obține, prin derivare în raport cu timpul:

$$\theta = \frac{h_1}{R} \qquad \omega = \frac{V_1}{R} \qquad \varepsilon = \frac{a_1}{r}.$$

De asemenea,

$$h_2 = \frac{r}{R} \cdot h_1$$

și derivînd ca și anterior se obține:

$$V_2 = \frac{r}{R} V_1 \qquad a_2 = \frac{r}{R} a_1.$$

1) Se izolează corpurile (fig. 33.6,*b*).

2) Se pot scrie ecuațiile:

$$T_1 + m_1 a_1 - m_1 g = 0,$$

$$T_2 - m_2 \frac{r}{R} a_1 - m_2 g = 0.$$

Necunoscute sînt: a_1, T_1 și T_2.

Ecuațiile de proiecții nu se mai scriu, deoarece în ele apar două necunoscute H_1 și V care nu sînt cerute.

3) Se obține:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_1 \tag{1}$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 \frac{r}{R} a_1 \tag{2}$$

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_2 g \cdot \frac{r}{R}}{m_1 + m_2 \frac{r^2}{R^2} + \frac{I}{R^2}} \tag{3}$$

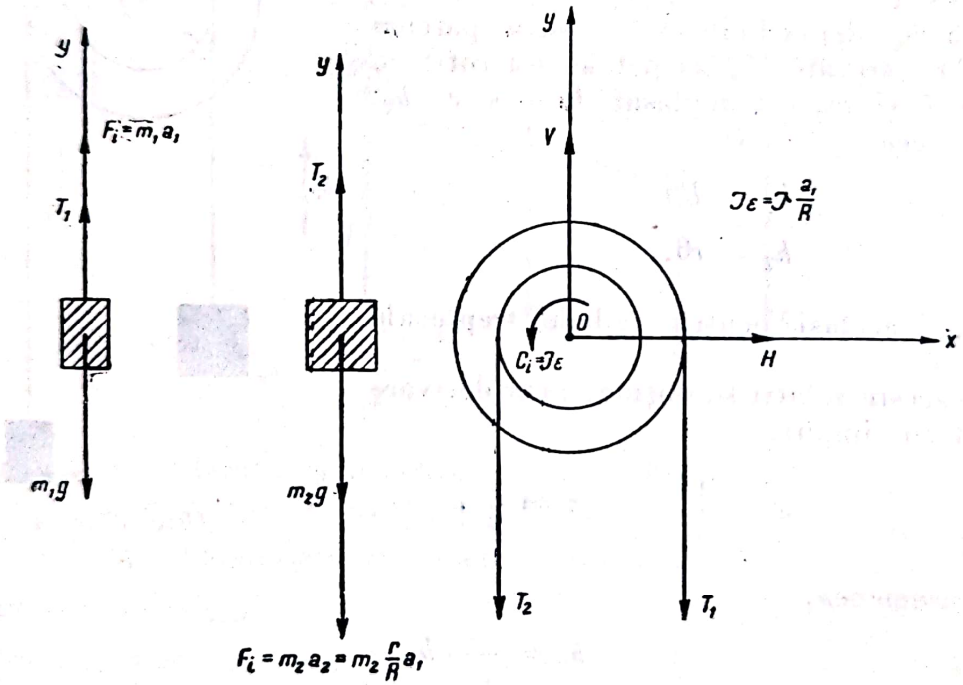


Fig. 33.6, *b*

Observații. Accelerațiile sistemului sînt constante: mișcarea este uniform accelerată, dacă $m_1 g - m_2 g \frac{r}{R} > 0$

sau

$$P_1 > P_2 \frac{r}{R} \text{ (în care } P_1 = m_1 g;\ P_2 = m_2 g);$$

dacă $P_1 = P_2 \frac{r}{R}$, sistemul se echilibrează; dacă $P_1 < P_2 \frac{r}{R}$, sistemul se mișcă în sensul invers celui presupus în problemă.

Accelerația este cu atît mai mare, cu cît diferența de la numărător este mai mare. Ea crește cu cît momentul de inerție J este mai mic, deci cu cît scripetele este mai ușor. De aici se poate deduce că, pentru a obține accelerații cît mai mari, trebuie utilizate piese cu moment de inerție mic, deci practic cît mai ușoare.

33.7. Pe o masă aspră sînt așezate două greutăți P_1 și P_2 și un tăvălug de greutate G.

Aceste greutăți sînt legate între ele cu cîte un fir. De greutatea P_1 este legat un fir care trece peste un scripete de masă neglijabilă și are la celălalt capăt legată o greutate Q (fig. 33.7,*a*).

Ținînd seamă de frecările de alunecare dintre corpurile P_1 și P_2 și masă (coeficientul de frecare de alunecare fiind μ), precum și de frecarea de rostogolire dintre cilindru și masă (coeficientul fiind s) și neglijînd celelalte frecări ale sistemului, să se determine accelerațiile cu care se mișcă corpurile și tensiunile în fire, presupunînd că tăvălugul se rostogolește fără să alunece.

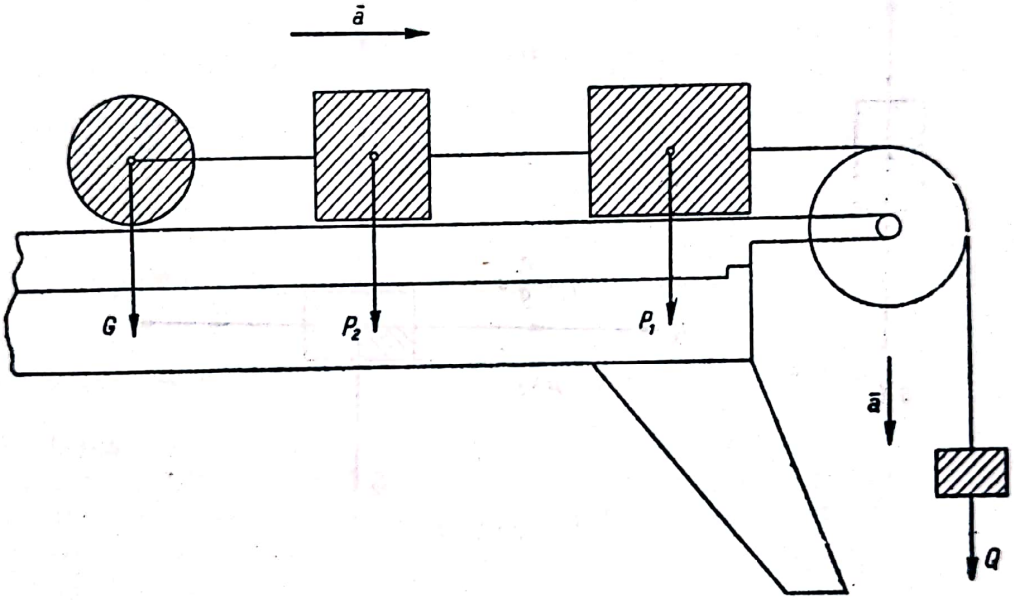


Fig. 33.7, *a*

Rezolvare. Greutatea Q, corpurile P_1 și P_2, cum și centrul tăvălugului au aceeași accelerație a, indicată în figura 33,7,*b*. *Izolînd corpurile*, se observă că greutatea Q și corpurile P_1 și P_2 au mișcări de translație și că tăvălugul are o mișcare plană (fig. 33.7,*b*).

Scripetele avînd masă neglijabilă, cuplul de inerție este nul: $C_0 = 0$.

La introducerea forțelor de inerție, în cazul tăvălugului, se va considera mișcarea plană ca rezultantă a două mișcări: o translație cu accelerația centrului de greutate și o rotație în jurul acestui centru cu accelerația ε. Pe baza acestui considerent se introduce forța de inerție datorită mișcării de translație aplicată în centrul tăvălugului și cuplul de inerție $C_1 = I\varepsilon$ în jurul centrului (fig. 33.7,*c*).

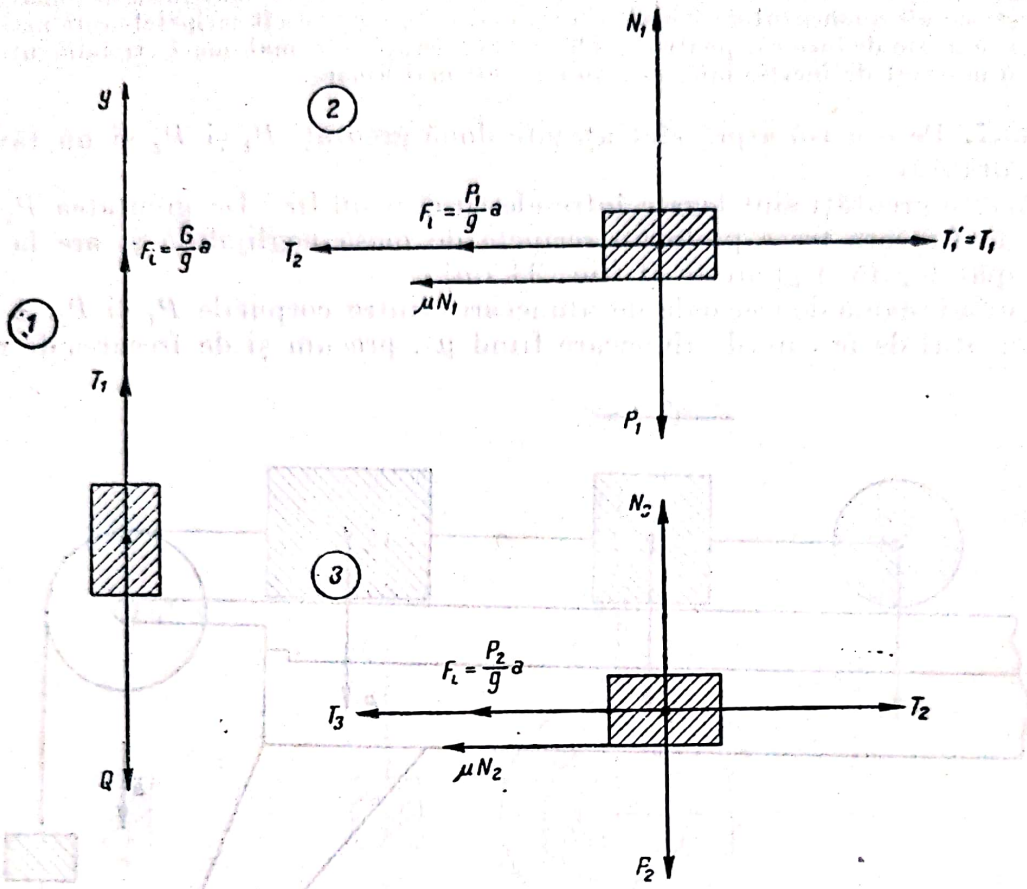


Fig. 33.7, *b*

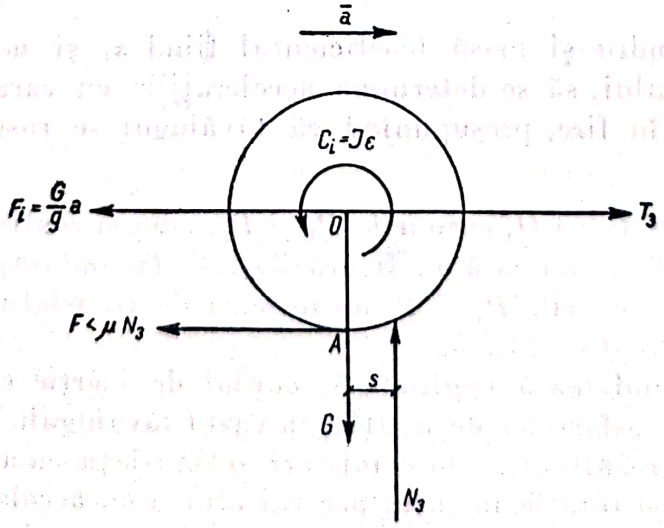


Fig. 33.7, *c*

Se obţin ecuaţiile:

$$\sum y : -Q + T_1 + \frac{Q}{g} a = 0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum x : T_1 - \mu N_1 - T_2 - \frac{P_1}{g} a = 0 \\ &\sum y : -P_1 + N_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum x : T_2 - T_3 - \frac{P_2}{g} a - \mu N_2 = 0 \\ &\sum y - P_2 + N_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum x : T_3 - \frac{G}{g} a - F = 0. \\ &\sum y : N_3 - G = 0 \\ &\sum M_a : -T_3 \cdot r + N_3 \cdot s + I\varepsilon - \frac{G}{g} a \cdot r = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ţinînd seamă că $\varepsilon = \frac{a}{r}$, s-a obţinut un sistem de opt ecuaţii cu opt necunoscute.

Prin rezolvarea sistemului se obţin expresiile mărimilor cerute.

33.8. Două roţi de transmisie de raze R_1 şi R_2 şi greutăţi P_1 şi P_2 sînt unite printr-o curea fără sfîrşit şi se rotesc în jurul axelor paralele fixe O_1 şi O_2, care trec prin centrele roţilor şi sînt perpendiculare pe ele (fig. 33.8,*a*). Să se afle acceleraţia unghiulară a primei roţi, dacă asupra acestei roţi acţionează un moment de rotaţie M. Masele roţilor se consideră uniform distribuite pe coroanele lor; frecarea pe axe, alunecarea şi masa curelei se neglijează.

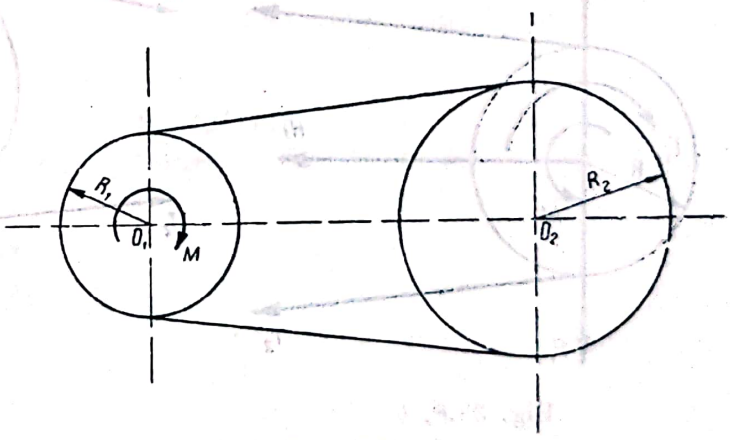


Fig. 33.8,*a*

Rezolvare. Se notează cu ε_1 acceleraţia unghiulară a roţii de rază R_1 şi cu ε_2 acceleraţia unghiulară a roţii de rază R_2. Acceleraţia liniară a curelei fiind egală cu acceleraţia tangenţială a fiecărei roţi şi avînd aceeaşi valoare pe toată întinderea curelei, rezultă:

$$R_1 \varepsilon_1 = R_2 \varepsilon_2,$$

de unde:

$$\varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2} \varepsilon_1.$$

Se izolează cele două roți. Asupra roții de rază R_1 vor acționa (fig. 33.8,*b*):

— greutatea proprie P_1;
— momentul de inerție M, dat;
— forțele de legătură;
— V_1 și H_1 componentele reacțiunii din axa de rotație;
— T_1 și T_2 tensiunile din curea;
— cuplul forțelor de inerție;

$C_{i1} = J_1\varepsilon_1 = \frac{P_1R_1^2}{g}\varepsilon_1$ $\left(J = \frac{P_1R_1^2}{g}\right.$, deoarece roata s-a considerat *coroană* și *nu disc*$\left.\right)$.

Se scrie ecuația de momente în raport cu punctul O_1, centrul roții:

$$M + T_1R_1 - T_2R_2 - \frac{P_1R_1^2}{g}\varepsilon_1 = 0$$

sau

$$M + (T_1 - T_2)R_1 - \frac{P_1R_1^2}{P}\varepsilon_1 = 0. \qquad (1)$$

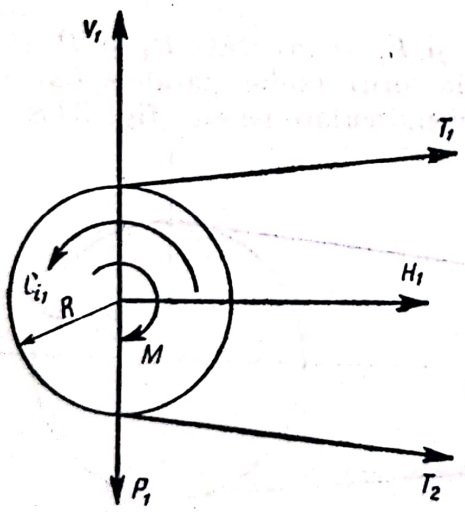


Fig. 33.8, *b*

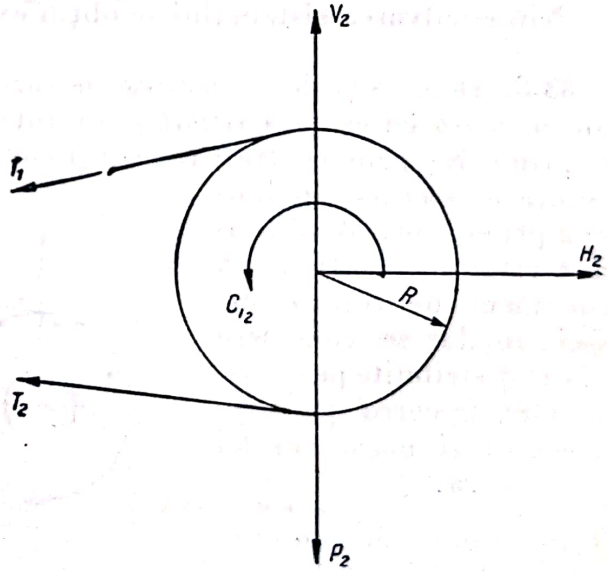


Fig. 33.8, *c*

Asupra roții de rază R_2 vor acționa următoarele forțe și momente (fig. 33.8,*c*):

V_2 și H_2 — componentele reacțiunii din axa de rotație
T_1 și T_2 — tensiunile din curea:

$C_{i2} = J_2\varepsilon_2 = \frac{P_2R_2^2}{g}\cdot\frac{R_1}{R}\varepsilon_1 = \frac{P_2R_1R_2}{g}\varepsilon_1$ cuplul forțelor de inerție.

Se scrie ecuația momentelor în raport cu punctul O_2, centrul roții:

$$C_{i2} + T_1R_2 - T_2R_2 = 0$$

sau

$$\frac{P_2R_1R_2}{g}\varepsilon_1 + (T_1 - T_2)R_2 = 0. \qquad (2)$$

Se elimină $(T_1 - T_2)$ între ecuațiile (1) și (2) și se obține ecuația care dă pe ε_1.

Din ecuația (2) se obține:

$$T_1 - T_2 = -\frac{P_2R_1}{g}\varepsilon_1;$$

substituind în ecuația (1) se obține:

$$M - \frac{P_2R_1^2}{g}\varepsilon_1 - \frac{P_1R_1^2}{g} = 0,$$

de unde:

$$\varepsilon_1 = \frac{Mg}{(P_1 + P_2)R_1^2}.$$

33.9. Axul unui cabestan cu raza r este pus în mișcare de momentul (de rotație) constant M, aplicat manetei AB(fig. 33.9,*a*).

Să se determine accelerația corpului C de greutate P, pus în mișcare cu ajutorul cabestanului, coeficientul de frecare dintre corpul C și planul orizontal fiind f. Celelalte frecări se neglijează. De asemenea se neglijează greutatea cabestanului.

Rezolvare. Se izolează corpurile de legătură:

Asupra corpului de greutate P acționează (fig. 33. 9,*b*):

— greutatea P,
— reacțiunea planului N,
— tensiunea din cablu T,
— forța de frecare fN,
— forța de inerție $\frac{P}{g}a$.

Asupra cabestanului acționează (fig. 33. 9,*c*):

T — momentul motor,
M — tensiunea din cablu,
H_1, H_2, V — reacțiunile pivotului,
H_1', H_2' — reacțiunile lagărului superior.

Deoarece cabestanul are masă neglijabilă, nu apare cuplul de inerție.

Scanned with OKEN Scanner

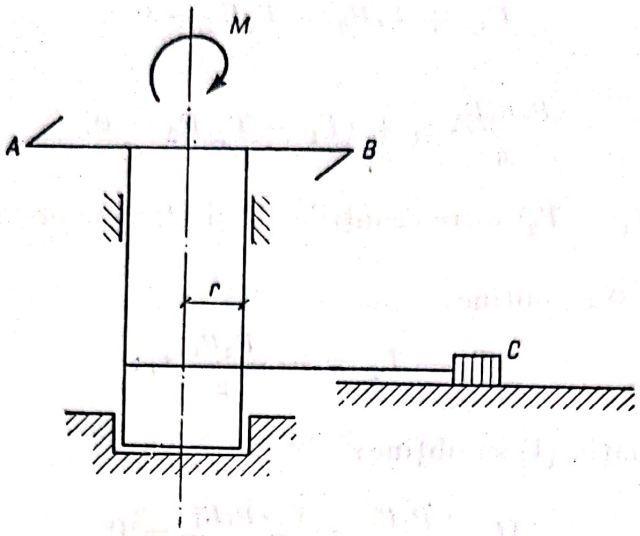


Fig. 33.9, *a*

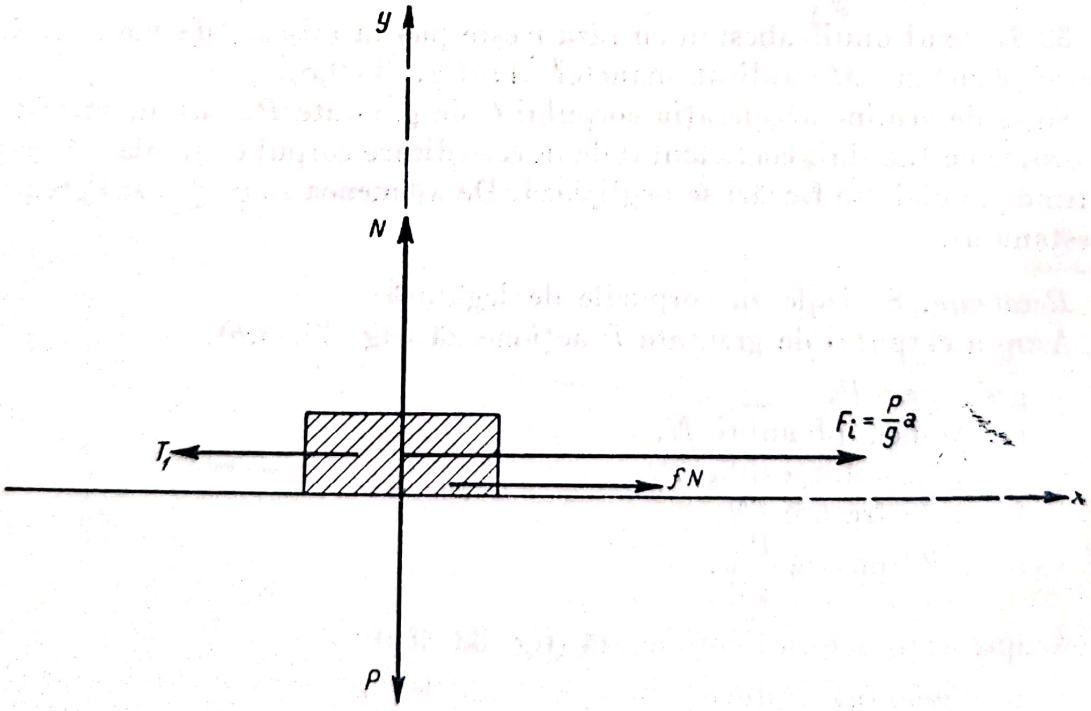


Fig. 33.9, *b*

Se pot scrie ecuațiile:

$$N - P = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{P}{g} a + fN - T = 0 \qquad (2)$$

$$H_1 + H_1' = 0 \qquad (3)$$

$$H_2 - H_2' - T = 0 \qquad (4)$$

$$V = 0 \qquad (5)$$

$$M_1 - T_r = 0 \qquad (6)$$

$$H_1 z_1 = 0 \qquad (7)$$

$$H_2' z_1 - Tc = 0. \qquad (8)$$

Deoarece interesează numai accelerația a, se reținecuațiile (1), (2), (6), și se obține:

$$a = \frac{M - f \cdot P.r}{P \cdot r} g.$$

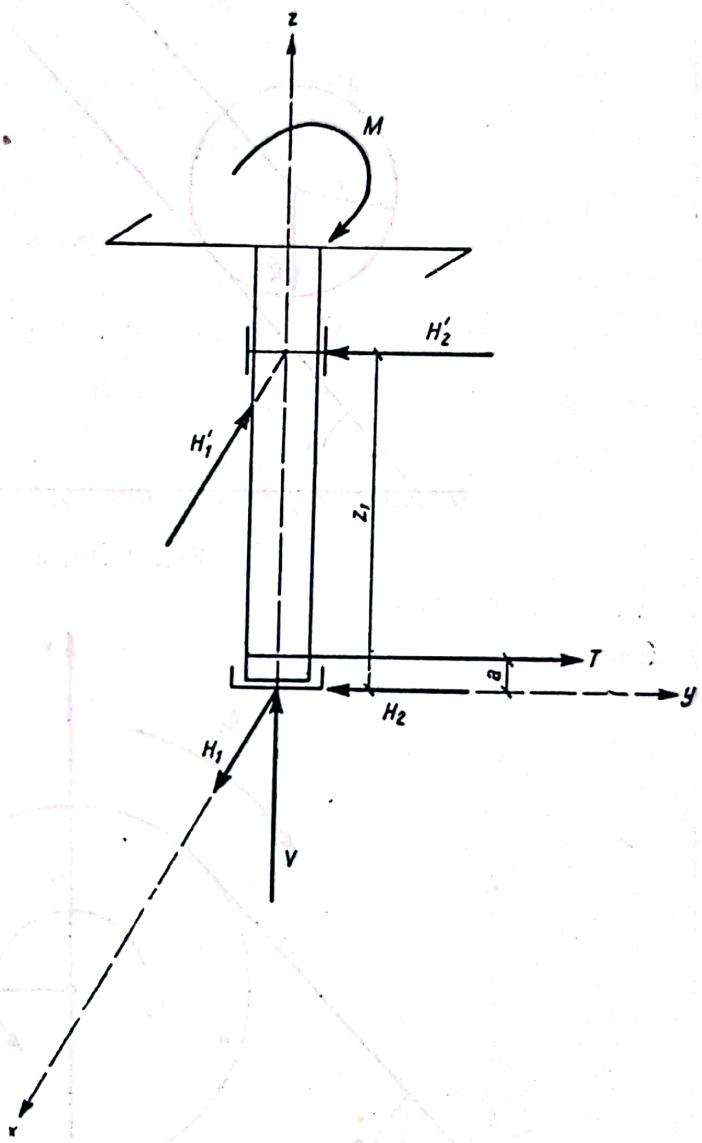


Fig. 33.9, *c*

33.10. Un tăvălug A, de greutate Q, rostogolindu-se fără alunecare în jos pe un plan înclinat, ridică, cu ajutorul unui fir inextensibil și de greutate neglijabilă — trecut peste un scripete B—, un corp C de greutate P(fig. 33.10,*a*).

Datorită acestui fapt, scripetele B se rotește în jurul unei axe fixe O, perpendiculară pe planul lui. Tăvălugul A și scripetele B sînt discuri rotunde, omogene, de aceeași greutate și cu aceeași rază. Planul înclinat formează cu orizontala unghiul α. Să se determine accelerația axei tăvălugului.

Nu se ține seamă de rezistența aerului și de frecări.

Rezolvare. Se notează cu a accelerația axei tăvălugului. Accelerația corpului C va fi tot a și a scripetelui, $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Se separă cele două discuri. Asupra discului B acționează următoarele forțe (fig. 33.10,*b*).

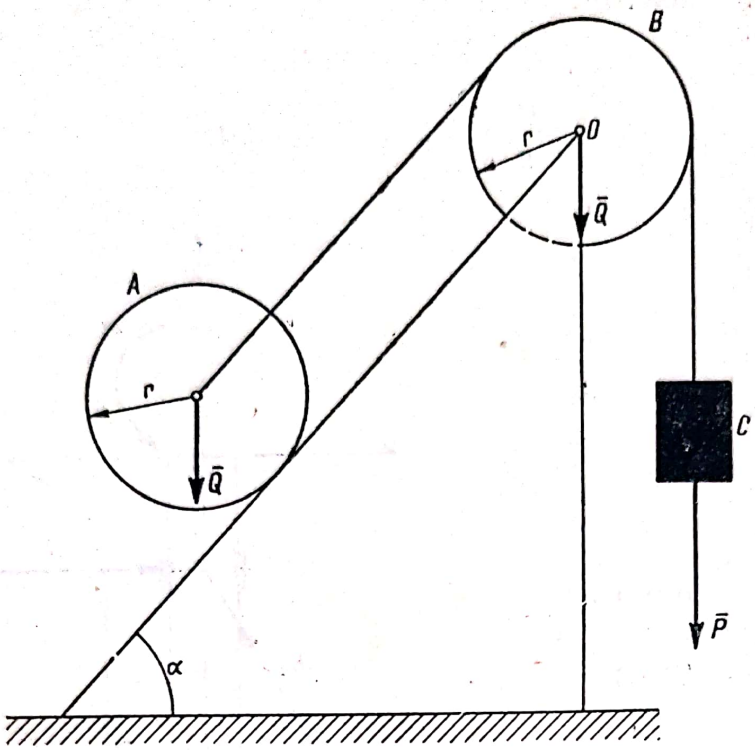


Fig. 33.10, *a*

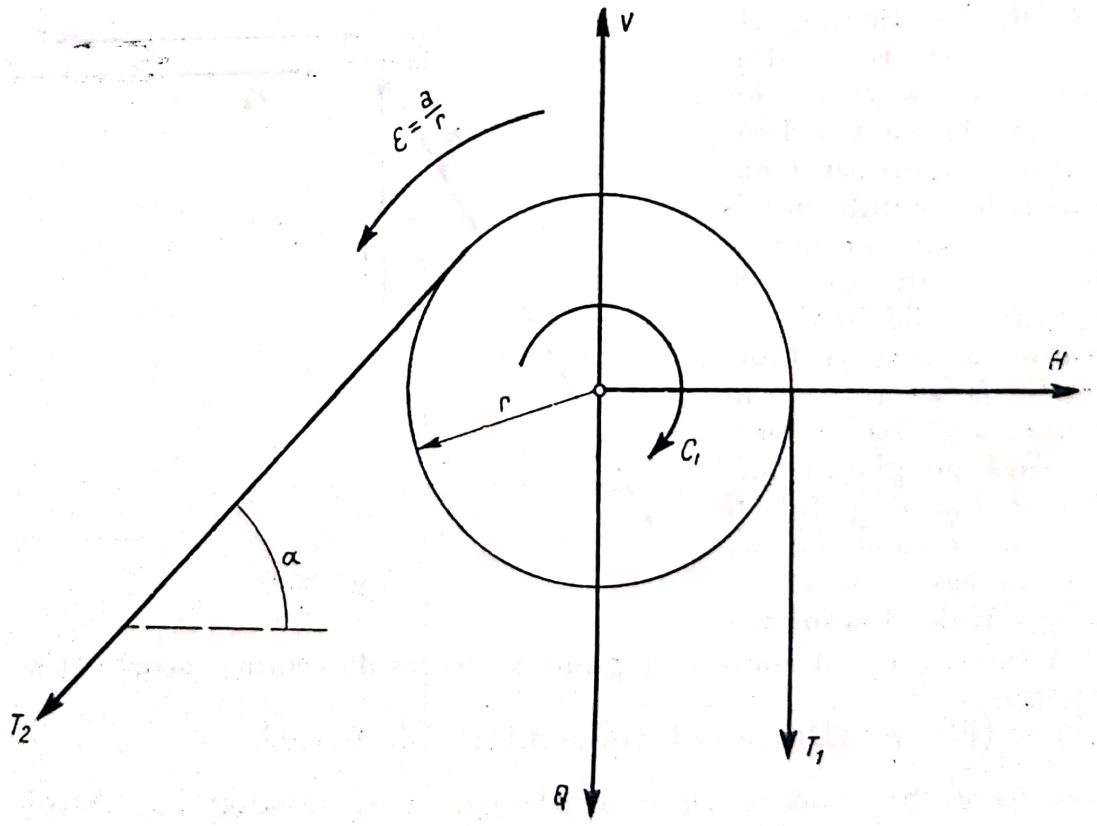


Fig. 33.10, *b*

Scanned with OKEN Scanner

Forţe date:

— greutatea proprie Q.

Forţe de legătură:

— componentele V şi H ale reacţiunii din articulaţie;

— tensiunile T_1 şi T_2 din fir;

— cuplul de inerţie $C_i = I\varepsilon = \frac{Qr^2}{2g} \cdot \frac{a}{r}$.

Asupra discului A acţionează (v. fig. 33.10,*c*):

— greutatea proprie Q;

— reacţiunea normală N a planului;

— tensiunea T_2 din fir;

— forţa de inerţie $F_{i2} = \frac{Q}{g} a$, datorită mişcării de translaţie;

— cuplul de inerţie $C_i = \frac{Qr^2}{2g} \cdot \frac{a}{r} = \frac{Qr}{2g} a$, datorit mişcării de rotaţie în jurul centrului de greutate. (Fiind vorba despre un solid rigid, momentul acestui cuplu se consideră drept vector liber.)

Asupra corpului C acţionează (v. fig. 33.10, *d*):

P — greutatea proprie;

T_1 — tensiunea din fir;

$F_{i1} = \frac{P}{g} a$.

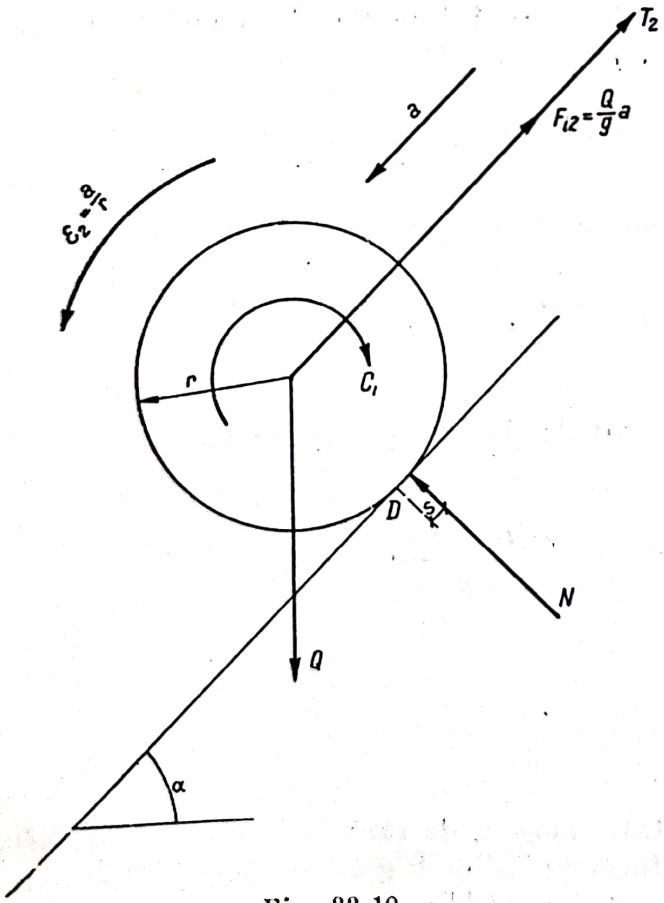


Fig. 33.10, *c*

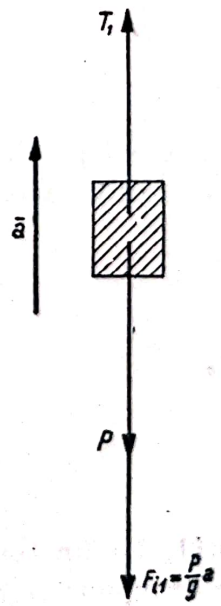


Fig. 33.10, *d*

Ecuația de echilibru fictiv a corpului C dă:

$$T_1 = P + \frac{P}{g} a. \tag{1}$$

Ecuația de echilibru fictiv a discului B (ecuația de moment în raport cu centrul discului) dă:

$$T_2 r - C_1 - T_1 r = 0$$

sau, înlocuind și C_1 cu valoarea sa:

$$T_2 r - \frac{Qr}{2g} a - T_1 r = 0$$

și simplificînd cu r:

$$T_2 - \frac{Q}{2g} a - T_1 = 0. \tag{2}$$

Ecuația de echilibru fictiv a discului A (ecuația de moment în raport cu punctul D, centrul instantaneu de rotație) dă:

$$Q r \sin \alpha - T_2 r - C_i - F_{i2} = 0$$

sau înlocuind pe C_r și F_{i2} cu valorile lor și simplificînd cu r:

$$Q \sin \alpha - T_2 - \frac{Q}{2g} a - \frac{Q}{g} a = 0. \tag{3}$$

Eliminînd pe T_1 și T_2 din ecuațiile (1), (2) și (3), se obține o ecuație din care rezultă accelerația:

$$Q \sin \alpha - P = \frac{P + 2Q}{g} a,$$

de unde:

$$a = \frac{Q \sin \alpha - P}{P + 2Q} g.$$

33.11. Pe un tambur orizontal, omogen, de rază R și greutate G, aflat în stare de repaus, se înfășoară un fir inextensibil de greutate neglijabilă, avînd legat la capăt un corp de greutate Q (fig. 33.11, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine accelerația unghiulară a axului, considerînd că frecarea din ax este proporțională cu viteza lui unghiulară și cu greutatea axului, factorul de proporționalitate fiind K. Se neglijează rezistența aerului.

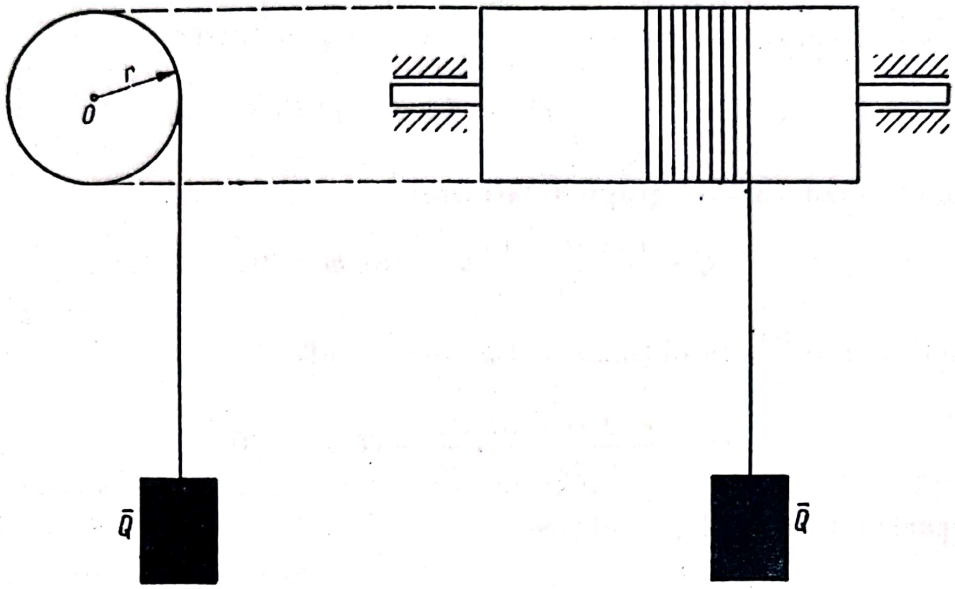


Fig. 33.11, *a*

Rezolvare. Pentru simplificare, în sensul reducerii numărului de ecuații, se poate folosi metoda solidificării părților. În cazul acesta se va lua tamburul împreună cu greutatea, și, în acest fel, reacțiunile interioare (tensiunea din fir) nu se mai introduc.

Forțele care acționează asupra sistemului sînt (fig. 33.11, *b*):

Forțele date: greutatea tamburului G și greutatea corpului Q.

Forțele de legătură: legăturile din articulațiile de la capetele axului tamburului se înlocuiesc cu două forțe de mărimi și direcții necunoscute. Pentru simplificare se va lua în considerație rezultanta acestor două forțe situată în același plan vertical cu greutatea Q. Această rezultantă se consideră descompusă în două componente perpendiculare H și V.

Frecarea din articulație se exprimă prin cuplul de frecare $C_f = fKG\omega r$.

Forțele de inerție:

Forța de inerție a greutății Q este:

$$F_i = \frac{Q}{g} a = \frac{Q}{g} r\varepsilon.$$

Cuplul de inerție al axului este:

$$C_i = I\varepsilon = \frac{Gr^2}{2g}\varepsilon,$$

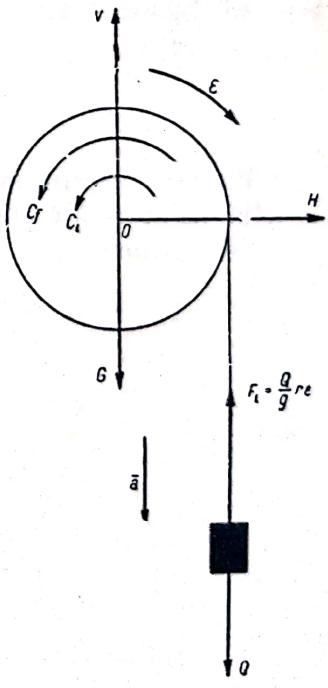


Fig. 33.11, *b*

unde:

$$I = \frac{Gr^2}{2g}.$$

Se scrie ecuația de momente în raport cu punctul O:

$$\varepsilon M_0 = Qr - \frac{Q}{g} r^2 \varepsilon - \frac{Gr^2}{2g} \varepsilon - fKG\omega r = 0.$$

Simplificînd cu r și grupînd termenii:

$$Q - \frac{r\,(2\,Q + G)}{2g} \varepsilon - fKG\omega = 0;$$

înlocuind pe $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, se obține ecuația diferențială:

$$Q - \frac{r\,(2\,Q + G)}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} - fKG\omega = 0.$$

Separînd variabilele, se obține:

$$\frac{r\,(2\,Q + G)}{2\,g\,(Q - fKG\omega)}\, d\omega = dt.$$

Integrînd se obține:

$$-\frac{r\,(2\,Q + G)}{2gfKG} \ln\,(Q - fKG\omega)C = t$$

sau sub formă exponențială:

$$C\,(Q - fKG\omega) = e^{-\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q + G)}}.$$

Pentru determinarea constantei C, scriem că în momentul inițial tamburul se află în stare de repaus ($t = 0$, $\omega = 0$).

Se obține:

$$CQ = 0$$

$$C = \frac{1}{Q}.$$

Deci:

$$\frac{1}{Q}\,(Q - fKG\omega) = e^{-\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q + G)}\,t}$$

sau:

$$1 - \frac{fKG}{Q}\,\omega = e^{-\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q + G)}\,t}$$

derivînd în raport cu timpul se obține accelerația:

$$-\frac{fKG}{Q}\varepsilon = -\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q+G)}\,e^{-\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q+G)}t},$$

de unde:

$$\varepsilon = \frac{2gQ}{r\,(2\,Q+G)}\,e^{-\frac{2gfKG}{r\,(2\,Q+G)}t}$$

sau:

$$\varepsilon = \frac{2Q}{r\,(2\,Q+G)}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2gfKG}{r(2Q+G)}t}}\,g.$$

Se observă ușor că, dacă $t \longrightarrow \infty$, atunci:

$$\varepsilon \to \frac{2Q}{r\,(2\,Q+G)}\,g = \text{const.},$$

ceea ce arată că după un timp îndelungat mișcarea tinde să devină uniform variată.

33.12. Să se afle accelerațiile cu care vor coborî două discuri identice, dintre care unul este suspendat de celălalt cu un fir ca în figură. Momentul de inerție polar pentru fiecare disc este I, masa m și raza R (fig. 33.12, *a*).

Axul pe care se înfășoară firul are raza r, condițiile de posibilitate ale problemei $L_1 > R$ și $L_2 > 2R$ fiind îndeplinite.

Rezolvare. Se rezolvă problema izolînd fiecare corp în parte. Pentru a putea introduce corect forțele (în speță forțele de inerție) este necesar să se studieze mișcarea fiecărui corp în parte.

Discul superior are o mișcare care se descompune într-o mișcare de translație identică cu mișcarea centrului de greutate O, cu accelerația necunoscută a, și o mișcare de rotație în jurul acestui centru cu accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{a}{r}$ (fig. 33.12, *b*).

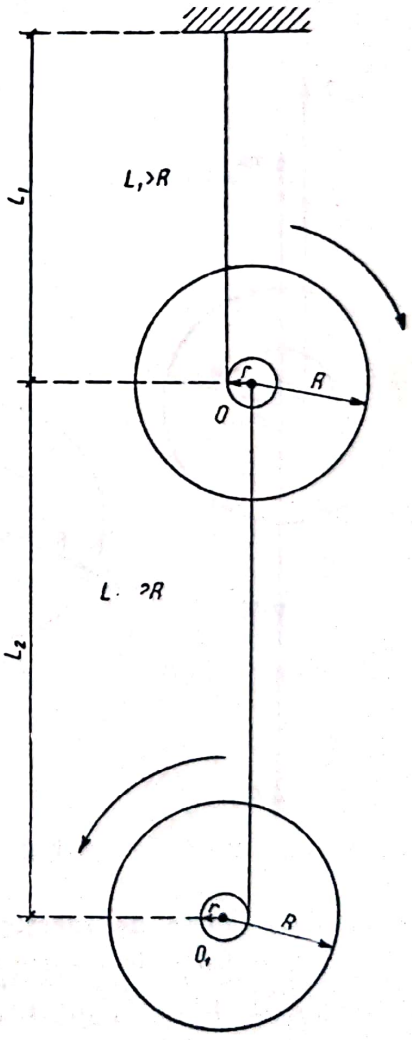


Fig. 33.12, *a*

Firul L_2 are o mișcare de translație cu accelerația a a centrului O. Discul inferior are o mișcare compusă dintr-o mișcare plan-paralelă, ca și cum firul ar fi în repaus (pe care se descompune într-o translație cu accelerația a_1 a centrului O_1 și o rotație în jurul lui O_1 cu accelerația unghiulară $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}$), la care se mai adaugă o mișcare de translație de transport, identică cu mișcarea firului cu accelerația a stabilită anterior.

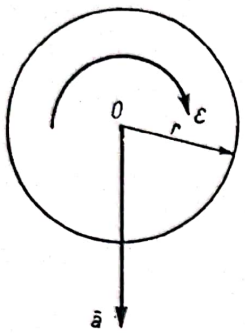


Fig. 33.12, *b*

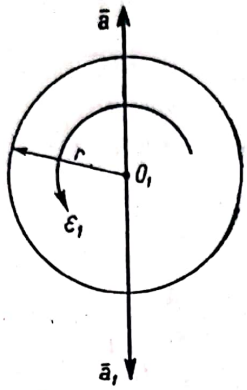


Fig. 33.12, *c*

Considerînd mișcarea plană ca o mișcare relativă față de fir și mișcarea firului ca mișcare de transport, se știe că:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c,$$

în care:

$\bar{a}_r$ reprezintă accelerațiile din mișcarea de rostogolire;

$\bar{a}_t = a$ — accelerația firului;

$\bar{a}_c = 2\,\omega_t \cdot \bar{V}_r = 0$, întrucît mișcarea de transport este o translație.

Acum se poate izola fiecare corp și se pot introduce toate forțele care apar în fiecare caz.

Trebuie avut în vedere că principiul lui d'Allembert trebuie aplicat în raport cu sistemul de referință fix.

Discul superior (fig. 33.12, *d*):

T_1 — tensiunea în firul superior;

T_2 — tensiunea în firul inferior;

mg — greutatea discului;

ma — forța de inerție din mișcarea de translație;

$J\varepsilon = J\frac{a}{r}$ — cuplul de inerție al forțelor tangențiale din mișcarea de rotație.

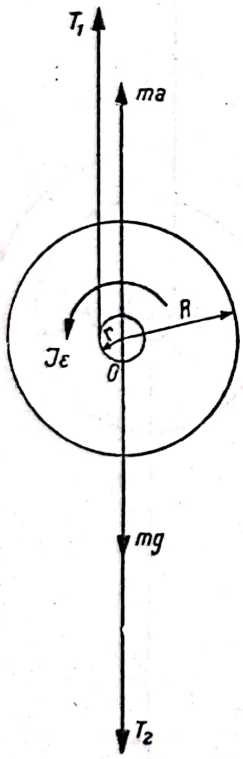


Fig. 33.12, *d*

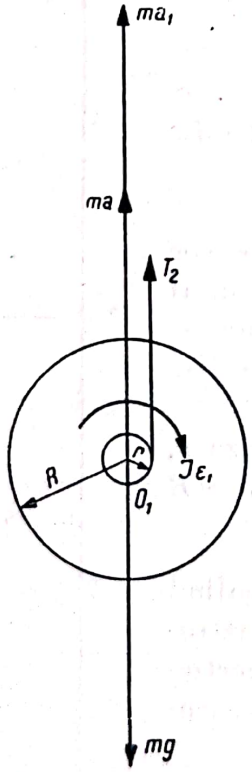


Fig. 33.12, *e*

Discul inferior (fig. 33.12, *e*):

T_2 — tensiunea în fir;

mg — greutatea discului;

ma_1 — forța de inerție din mișcarea relativă de translație;

ma — forțe de inerție din mișcarea de transport (a = accelerația firului);

$J\varepsilon_1 = J\frac{a_1}{r}$ — cuplul de inerție al forțelor tangențiale din mișcarea relativă de rotație.

Se pot scrie ecuațiile:

— pentru discul superior

$$T_1 + ma - mg - T_2 = 0 \tag{1}$$

$$-T_1 r + J\varepsilon = 0 \tag{2}$$

— pentru discul inferior

$$ma_1 + ma + T_2 - mg = 0 \tag{3}$$

$$T_2 r - J\varepsilon_1 = 0. \tag{4}$$

Ținînd seamă că $\varepsilon = \frac{a}{r}$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r} \tag{5}$$

și că: necunoscutele sînt $aa_1\ T_1T_2$; se rezolvă sistemul și se obține:

$$a = \frac{m + \frac{2J}{r^2}}{\left(m + \frac{J}{r^2}\right)^2 + m\frac{J}{r^2}} mg = \frac{1 + \frac{2J}{mr^2}}{1 + \frac{3J}{mr^2} + \frac{J^2}{m^2r^4}};$$

$$a_1 = \frac{\frac{J}{r^2}}{\left(m + \frac{J}{r^2}\right) + m\frac{J}{r^2}} \cdot mg = \frac{1 + \frac{3J}{mr^2}}{1 + \frac{3J}{mr^2} + \frac{J^2}{m^2r^4}}.$$

Pentru a afla accelerația absolută a discului inferior se adună accelerația relativă a_1 cu accelerația de transport a și se obține:

$$a_a = a_1 + a = \frac{1 + \frac{3J}{mr^2}}{1 + \frac{3J}{mr^2} + \frac{J^2}{m^2r^2}} g.$$

33.13. Un mosor cu axa orizontală este suspendat cu două fire AA_1 și BB_1 de aceeași lungime, care se înfășoară pe mosor. Alte două fire C_1C și D_1D tot înfășurate pe mosor, de asemenea de lungimi egale, susțin un corp de masă m (fig. 33.13, *a*).

Să se determine mișcarea mosorului și a corpului suspendat și să se determine tensiunile din fire dacă mosorul are masa M și momentul de inerție J în raport cu axa sa. Raza de înfășurare a firelor pe mosor este r. Se vor neglija frecările și rezistența aerului, cum și greutatea firelor.

Rezolvare. Se observă că între mișcarea mosorului de masă M și mișcarea greutății pe care o susține există o legătură strînsă. Mosorul are o mișcare plan-paralelă pe care se poate descompune într-o mișcare de translație o dată cu

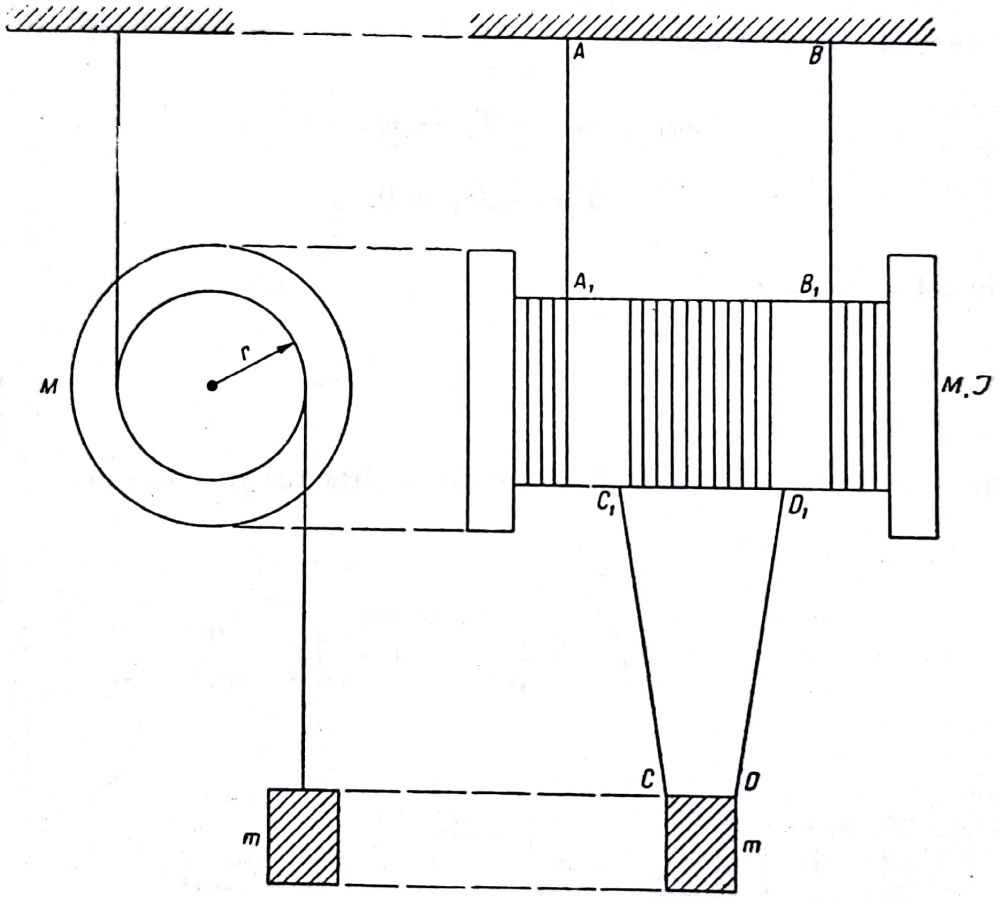


Fig. 33.13, *a*

axa sa și o mișcare de rotație în jurul acestei axe. Greutatea suspendată are o mișcare simplă de translație. Cele două perechi de fire, cele de susținere a mosorului și cele de susținere a greutății se desfășoară simultan, o dată cu rotirea mosorului în jurul axei sale. Rezultă că greutatea susținută de mosor are o mișcare independentă (relativă).

Pentru a determina legătura cinematică dintre mișcări, se observă că centrul instantaneu al mosorului este J, punctul de tangență cu firul care-l susține (fig. 33.13, *b*). Este evident că între accelerațiile centrului mosorului și a greutății susținute există relația:

$$a = \frac{a_1}{2}.$$

Acceleraţia unghiulară a mosorului este dată de relaţia:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{a_1}{2r}.$$

Pentru determinarea mişcării şi stabilirea tensiunilor se izolează fiecare corp în parte şi se introduc forţele.

Asupra corpului m vor acţiona forţele (fig. 33.13, c):

— greutatea proprie mg;

— forţa de legătură T_1 (tensiunea din firele CC_1 şi DD_1);

— forţa de inerţie $F_{i1} = ma_1$

Asupra corpului M vor acţiona (v. fig. 33.13, d):

— greutatea proprie mg;

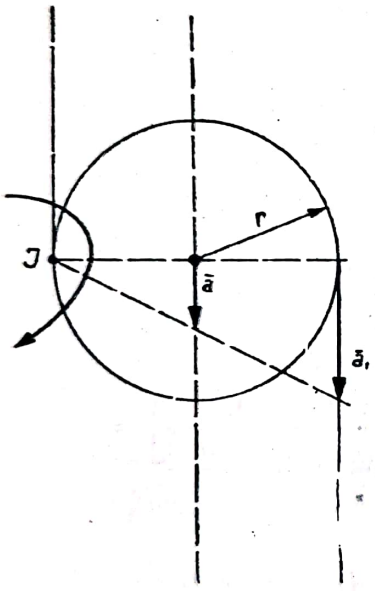


Fig. 33.13, b

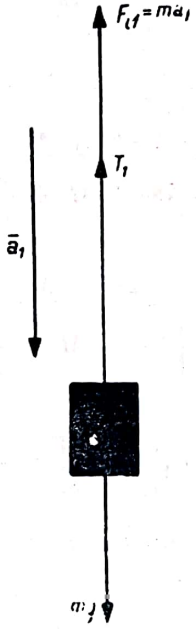


Fig. 33.13, c

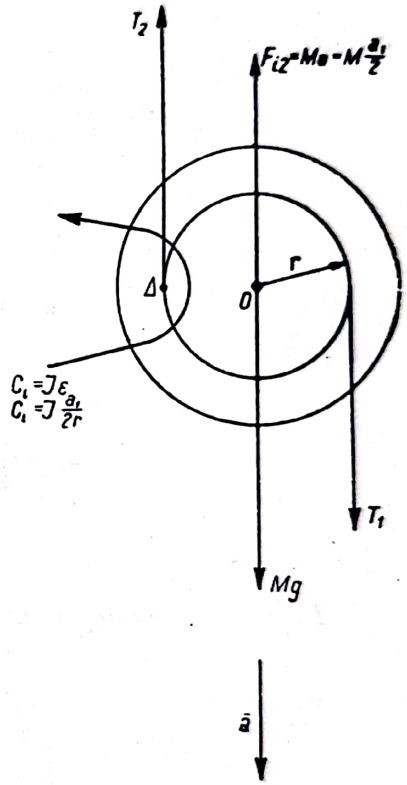


Fig. 33.13, d

— forţa T_1 (tensiunea din firele CC_1 şi DD_1);

— forţa T_2 (tensiunea din firele AA_1 şi BB_1);

— forţa de inerţie $F_{i2} = Ma = M\frac{a_1}{2}$ şi cuplul de inerţie $C_i = J\varepsilon = J\frac{a_1}{2r}$.

Se pot scrie ecuaţiile:

$$T_1 - ma_1 - mg = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 + T_2 + Mg - M\frac{a_1}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$2rT_1 + rMg - rM\frac{a_1}{2} - J\frac{a_1}{2r} = 0 \qquad (3)$$

(ecuaţia de momente în raport cu centrul instantaneu de rotaţie I).

Rezolvînd se obține:

$$T_1 = mg - ma_1$$

$$2r(mg - ma_1) + rMg - rM\frac{a_1}{2} - J\frac{a_1}{2r} = 0$$

$$4r^2mg - 4r^2ma_1 + 2r^2Mg - r^2Ma_1 - J$$

$$2r^2g\ (2m + M) = a_1\ (4r^2m + r^2M + J),$$

de unde:

$$a_1 = \frac{2r^2g\ (2m + M)}{4r^2m + r^2M + J} = \frac{2\ (2m + M)}{4m + M + \frac{J}{r^2}}\ g$$

și

$$a = \frac{a_1}{2} = \frac{2m + M}{4m + M + \frac{J}{r^2}};$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{2r} = \frac{2m + M}{r\left(4m + M + \frac{J}{r^2}\right)}\ g$$

$$T_1 = mg - ma_1 = m\ (g - a_1) = m\left[g - \frac{2(\ 2m + M)}{4m + M + \frac{J}{r^2}}\ g\right] =$$

$$= m\ \frac{\left(\frac{J}{r^2} - M\right)}{4m + M + \frac{J}{r^2}}\ g = \frac{m\ (J - Mr^2)}{4mr^2 + Mr^2 + J}\ g;$$

$$T_2 = T_1 - Mg + M\frac{a_1}{2} = \frac{m\ (J - Mr^2)\ g}{4mr^2 + Mr^2 + J} - Mg + M\ \frac{2m + M}{4m + M + \frac{J}{r^2}}\ g$$

$$T_2 = \frac{mJ - MJ - 3mMr^2}{4mr^2 + Mr^2 + J}\ g.$$

33.14. Un corp A de greutate P, coborîndu-se cu ajutorul unui fir imponderabil și inextensibil trecut peste scripetele D și înfășurat pe roata B de rază R, obligă pinionul C de rază r să se rostogolească fără alunecare pe o șină orizontală.

Roata B este legată rigid de pinionul C. Greutatea totală a roții și pinionului este Q, momentul lor total de inerție în raport cu o axă care trece prin O, perpendiculară pe planul figurii, fiind I (fig. 33.14, *a*).

Să se afle accelerația corpului A .

Rezolvare. Se izolează corpurile și se scrie că forțele date, forțele de legătură și forțele de inerție își fac echilibru.

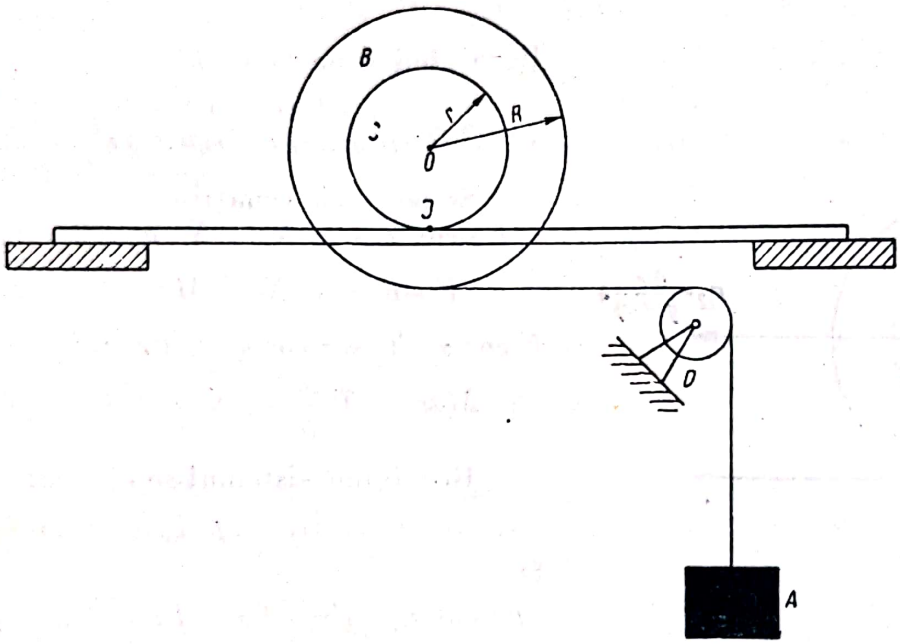


Fig. 33.14, *a*

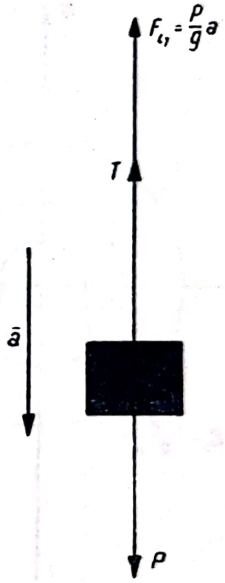


Fig. 33.14, *b*

Se notează cu a accelerația corpului A. Accelerația de rotație ε a roții și axului în jurul centrului instantaneu I va fi $\varepsilon = \dfrac{a}{R-r}$. Accelerația centrului roții și a pinionului va fi $a_1 = \dfrac{r}{R-r}a$.

Forțele sînt trecute pe figură la fiecare corp. Ecuația de echilibru a corpului A dă (fig. 33.14, *b*):

$$F_{i1} + T - P = 0,$$

de unde:

$$T = F_{i1} = P - \frac{P}{g}a.$$

Ecuația de echilibru a ansamblului roată-pinion (momentul în raport cu centrul instantaneu de rotație I) (fig. 33.14, *c*) este:

$$T(R-r) - F_{i2}r - C_i = 0$$

sau ținînd seamă că:

$$F_{i2} = \frac{Qr}{g\,(R-r)}\,a; \quad C_i = J\,\frac{a}{R-r} \text{ și } T = P - \frac{P}{g}\,a$$

se obține ecuația care dă pe a:

$$\left(P - \frac{P}{g}\,a\right)(R-r) - \frac{Qr^2}{g\,(R-r)}\,a - J\,\frac{a}{R-r} = 0.$$

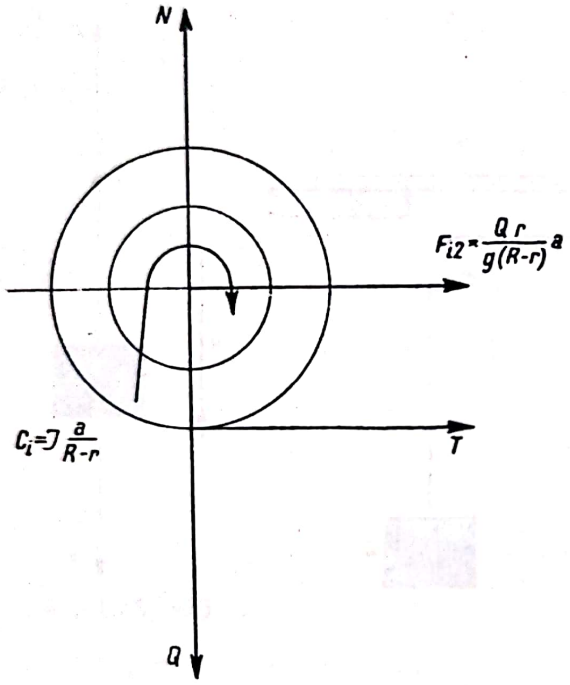


Fig. 33.14, *c*

Rezolvînd ecuația se află:

$$a = \frac{P\,(R-r)^2}{P\,(R-r)^2 + Qr^2 + gJ}\,g.$$

Se pot scrie ecuațiile:

$$F \cdot \cos\alpha + \mu N - N \cdot a = 0 \quad (1)$$

$$F \sin\alpha + N - Mg = 0 \quad (2)$$

$$F\cos\alpha\,(R - r\cos\alpha) - Fr\sin^2\alpha - Mar - T\,\frac{a}{R} + N \cdot s = 0. \quad (3)$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$N = Mg - F\sin\alpha$$

și

$$FR\cos\alpha - Fr\cos^2\alpha - Fr\sin^2\alpha - MaR - J\,\frac{a}{R} + Mgs - Fs\sin\alpha = 0.$$

Se obține:

$$a = \frac{F\,(R\cos\alpha - r + s\sin\alpha) - Mgs}{MR + \dfrac{J}{R}}.$$

Deoarece mărimile: M, R, J sînt totdeauna pozitive, pentru ca $a > 0$ trebuie ca numărătorul să fie pozitiv:

$$F \cdot R\cos\alpha - F \cdot r + F \cdot s\sin\alpha - Mg \cdot s > 0$$

sau

$$\left(\cos\alpha + \frac{s}{R}\sin\alpha\right) > \frac{Fr + Mgs}{F \cdot R}.$$

Ținînd seamă că valoarea coeficientului de frecare la rostogolire este foarte mic și termenii ce-i conțin ar putea fi neglijați se ajunge la relația aproximativă:

$$\cos\alpha > \frac{r}{R}.$$

În concluzie, dacă $\alpha > \arccos \frac{r}{R}$, mosorul se va mișca în sensul în care este tras, și în caz contrar se va mișca în sens invers.

Observație. În enunț s-a pus condiția mișcării de rostogolire fără alunecare. Problema a fost rezolvată în această ipoteză. Pentru ca relațiile găsite să fie valabile, este necesar ca:

$$\mu N \geqslant Ma - F \cos \alpha$$

sau:

$$\mu [Mg - F \sin \alpha] \geqslant Ma - F \cos \alpha,$$

de unde rezultă valoarea coeficientului de frecare pentru care este rostogolire fără alunecare:

$$\mu \geqslant \frac{Ma - F \cos\alpha}{Mg - F \sin\alpha}$$

sau:

$$\mu \geqslant \frac{M [F (R \cos \alpha - r + s \sin \alpha) - Mgs]}{\left(Mg - F \sin\alpha\right)\left(MR + \frac{J}{R}\right)} - \frac{F \cos \alpha}{Mg - F \sin \alpha}.$$

33.15. Pe un plan orizontal se află un mosor cu ață. Cu ce accelerație de translație a se mișcă mosorul dacă firul este tras cu forța F, făcînd unghiul α cu orizontala (fig. 33.15, *a*). Cum trebuie tras firul, pentru ca mosorul să se miște înspre firul întins. (Mosorul se rostogolește pe suprafața mesei fără să alunece. Momentul de inerție al mosorului este I și masa — M.)

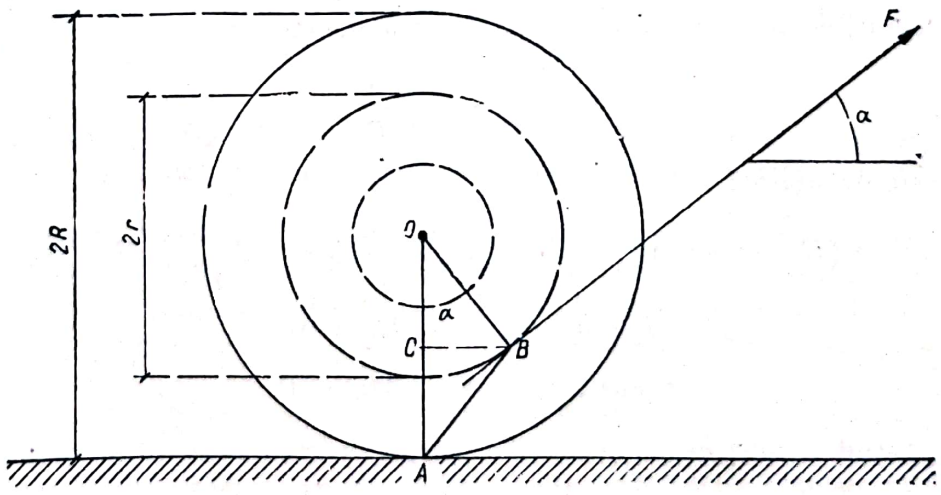


Fig. 33.15, *a*

Rezolvare. Cînd firul este tras cu forța F, mosorul primește o mișcare plan-paralelă. Rostogolirea făcîndu-se fără alunecare, centrul instantaneu de rotație va fi în punctul A de tangență dintre mosor și planul orizontal. Accelerația mosorului se va compune din accelerația de translație a și accelerația de rotație ε

în jurul centrului de greutate al mosorului, egală cu acceleraţia în jurul centrului instantaneu de rotaţie A (fig. 33.15, b).

Pentru a afla relaţia dintre a şi ε se exprimă acceleraţia tangenţială a punctului O în mişcarea de rotaţie în jurul centrului instantaneu şi se scrie că această acceleraţie este egală cu acceleraţia de translaţie a, întrucît punctul O are o mişcare rectilinie.

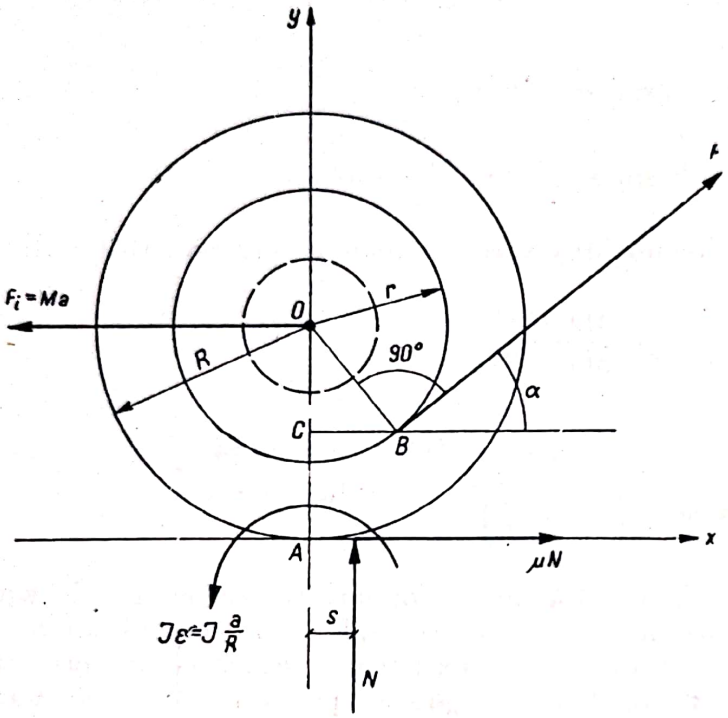


Fig. 33.15, b

Rezultă:

$$R\,\varepsilon = a,$$

de unde:

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Se va scrie numai ecuaţia de momente, întrucît nu se cere în enunţ şi determinarea reacţiunii N.

— Forţa activă este F.

— Reacţiunea este reacţiunea normală N.

— Forţa de inerţie din mişcarea de translaţie este

$$F_i = Ma.$$

— Cuplul de inerţie din mişcarea de rotaţie este

$$C_i = I\,\varepsilon = I\frac{a}{R}.$$

Se pot scrie ecuaţiile:

$$F\cos(R - r\cos\alpha) - F\cdot r\sin^2\alpha - Mar - J\frac{a}{R} + N\cdot s = 0$$

$$F\sin\alpha + N - M_g = 0$$

$$F\cos\alpha + \mu N - Ma = 0.$$

Rezolvînd se obţine:

$$a = \frac{F\cdot R\,(R\cos\alpha - r)}{MR^2 + J},$$

Factorii F, R şi $MR^2 + J$ sînt pozitivi astfel că pentru ca acceleraţia să fie pozitivă este necesar ca:

$$R\cos\alpha - r > 0,$$

adică:

$$\cos \alpha > \frac{r}{R},$$

deci:

$$\alpha > \text{arc cos} \frac{r}{R}.$$

Rezultă că pentru $\alpha > \text{arc cos} \frac{r}{R}$ mosorul se va mișca în sensul indicat în figură.

33.16. Pe fețele perfect lustruite ale unei prisme ABC este trecut un fir la capetele căruia sînt înfășurate două discuri de greutăți P și Q (ca în figură)

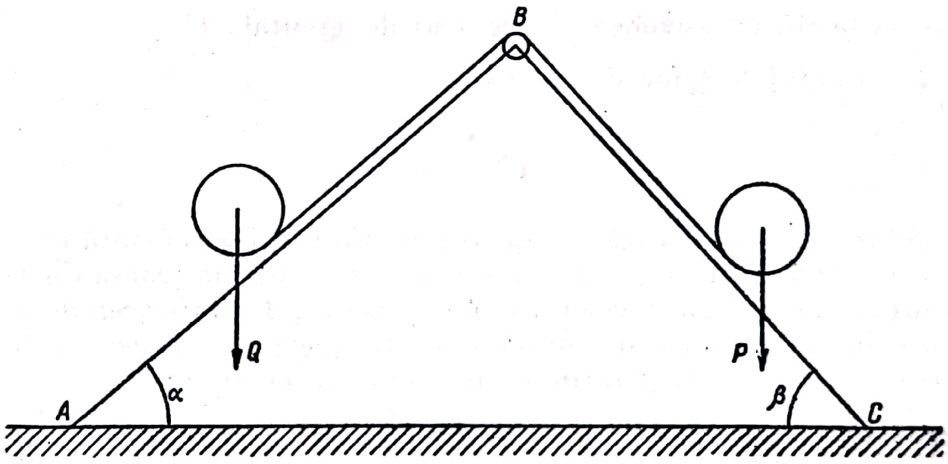


Fig. 33.16, *a*

de raze egale R (fig. 33.16, *a*). Să se studieze mișcarea sistemului și să se determine tensiunea în fir neglijînd masa scripetelui, a firului și frecările.

Rezolvare. Dacă firul ar sta în repaus în timpul mișcării discurilor, atunci fiecare disc s-ar rostogoli în jos de-a lungul fețelor respective ale prismei. Întrucît $P \neq Q$ și $\alpha \neq \beta$, firul va fi antrenat, în general, de unul dintre discuri.

Necunoscînd mișcarea, se face ipoteza că discul care coboară, antrenează și firul.

Discul Q va avea o mișcare compusă, și anume: o mișcare de rostogolire (plan-paralelă) față de firul considerat în repaus (mișcare relativă) și o mișcare de alunecare identică cu mișcarea firului (mișcare de transport). Se știe că:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$\bar{a}_r$ — accelerațiile din mișcarea de rostogolire;
$\bar{a}_t$ — accelerația firului;
$\bar{a}_c$ — $2\ \omega_t \cdot \bar{V}_2 = 0$ întrucît $\bar{\omega}_t = 0$.

Mișcarea relativă plan-paralelă se descompune într-o mișcare de translație cu accelerația a a centrului de greutate O și o mișcare de rotație în jurul lui O cu accelerația unghiulară ε_1.

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{R}.$$

Mișcarea de transport fiind mișcarea firului, se consideră că se face cu o accelerație a_t.

* * *

Forțele de inerție vor fi:

$\frac{Q}{g} a$, aplicată în centrul de greutate O;

$\frac{Q}{g} a_t$, aplicată de asemenea în centrul de greutate O;

$J_1 \varepsilon_1$ — cuplul forțelor de inerție.

* * *

În același fel se analizează și mișcarea discului P și se constată că va avea: o mișcare relativă de rostogolire cu accelerația a, din mișcarea de translație a centrului de greutate, o accelerație unghiulară ε_1 din mișcarea de rotație în jurul centrului de greutate și o mișcare de transport cu accelerația firului a_z.

Se izolează corpurile și introduc forțele (fig. 33.16, *b*).

Discul Q

$$\frac{Q}{g} a + \frac{Q}{g} a_t + T_1 = Q \sin \alpha \tag{1}$$

$$N_1 = Q \cos \alpha \tag{2}$$

$$T_1 R - J \varepsilon = 0. \tag{3}$$

Scripetele O_1

$\sum M_{01} = T_1 r - T_2 r = 0$ (masa scripetelui din B fiind neglijabilă) (4)

Se scriu condițiile de echilibru:

Discul P

$$\frac{P}{g} a_1 + T_2 - \frac{P}{g} az = P \sin \beta \tag{5}$$

$$N_2 = P \cos \beta \tag{6}$$

$$T_2 R - I_1 \varepsilon_1 = 0. \tag{7}$$

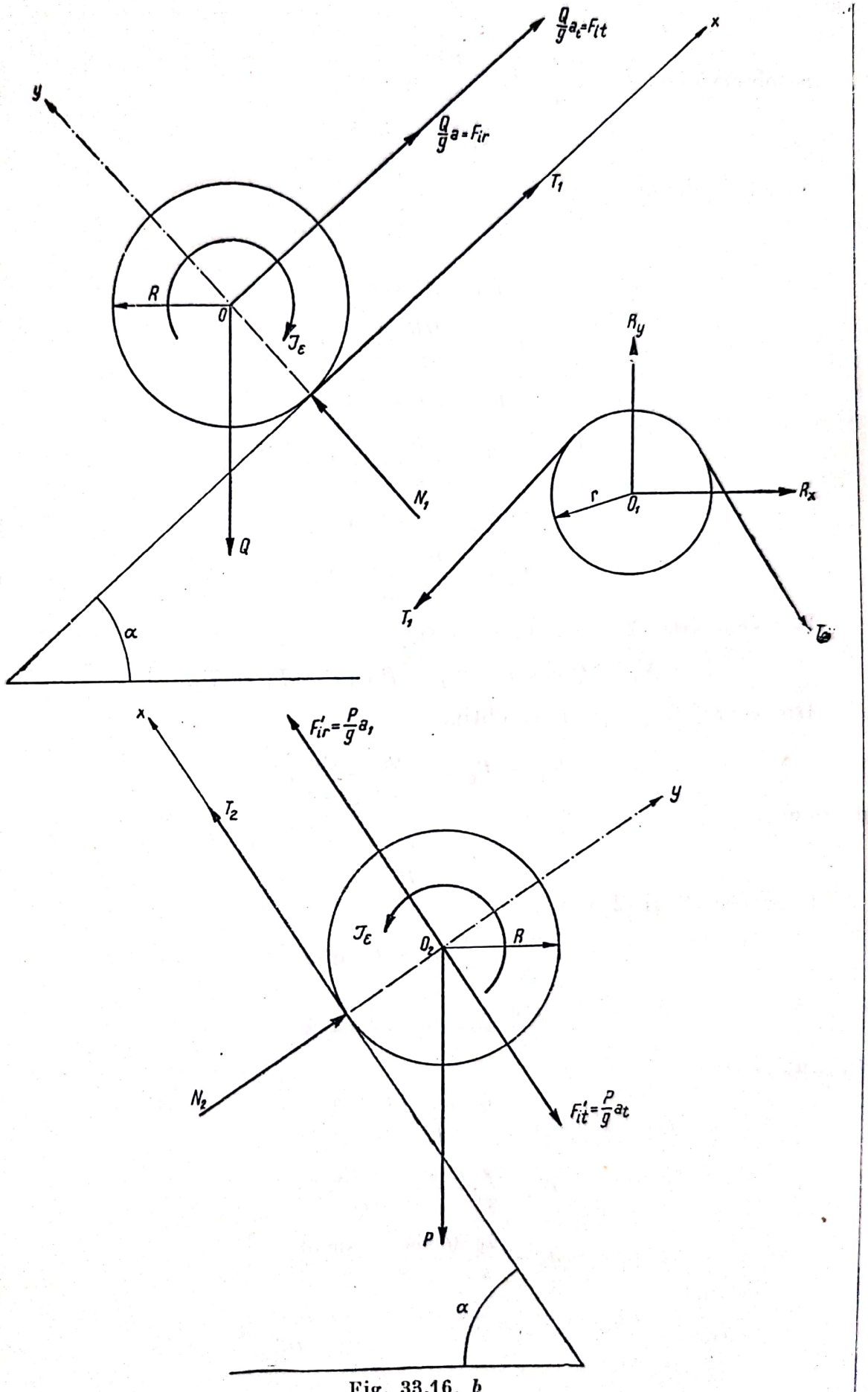


Fig. 33.16, *b*

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că: $J = \frac{QR^2}{2g}$; $J_1 = \frac{PR^2}{2g}$; $\varepsilon = \frac{a}{R}$

și $\varepsilon_1 = \frac{a_1}{R}$.

Ecuațiile devin:

$$\frac{Q}{g} a + \frac{Q}{g} a_t + T_1 = Q \sin \alpha \tag{1}$$

$$N_1 = Q \cos \alpha \tag{2}$$

$$T_1 R - \frac{QR^2}{2g} \frac{a}{R} = 0 \tag{3}$$

$$T_1 r - T_2 r = 0 \tag{4}$$

$$\frac{P}{g} a_1 + T_2 - \frac{P}{g} a_t = P \sin \beta \tag{5}$$

$$N_2 = P \cos \beta \tag{6}$$

$$T_2 R - \frac{PR^2}{2g} \frac{a_1}{R} = 0. \tag{7}$$

Din ecuațiile (2), (4), (6) se obține:

$$N_1 = Q \cos \alpha; \quad N_2 = P \cos \beta \quad T_1 = T_2.$$

Din ecuațiile (3) și (7) se obține:

$$T_1 = T_2 \text{ sau: } \frac{Qa}{2g} = \frac{Pa_1}{2g},$$

de unde:

$$a_1 = \frac{Q}{P} \cdot a.$$

Ecuațiile (1) și (2) devin:

$$\frac{3Qa}{2g} + \frac{Q}{g} a_t = Q \sin \alpha$$

$$\frac{3P a_1}{2g} - \frac{P}{g} a_t = P \sin \beta.$$

Rezultă:

$$a_t = \frac{Q \sin \alpha - P \sin \beta}{P + Q} \cdot g;$$

$$a = \frac{2g}{3} \cdot \frac{P (\sin \alpha + \sin \beta)}{P + Q};$$

$$a_1 = \frac{2g}{3} \cdot \frac{Q (\sin \alpha + \sin \beta)}{P + Q};$$

$$T_1 = T_2 = T = \frac{P_0 Q (\sin \alpha + \sin \beta)}{3 (P + Q)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observații. 1) Se constată că a, a_1 și a_t sînt constante, deci mișcarea de transport a firului se face uniform accelerat și, de asemenea, mișcările de desfășurare a discurilor față de fir.

2) Dacă $\alpha = \beta$ și $P = Q$ rezultă $a_t = 0$ și $a = g \sin \alpha = a_1$, aceeași accelerație ca la alunecarea unui corp pe un plan înclinat, luciu.

33.17. Scîndura unui leagăn împreună cu oamenii așezați pe ea, cîntărește G kgf. Care va fi tensiunea maximă T a sforii dacă se depărtează leagănul cu 45° de la poziția de echilibru și se lasă să oscileze liber?

(Nu se ține seamă de frecări și de rezistența aerului.)

Rezolvare. Leagănul are o mișcare de rotație în jurul unei axe orizontale trecînd prin O. Se notează cu l lungimea OA a firului care susține scîndura leagănului (de fapt sînt două fire identice care au fost înlocuite, pentru simplificarea scrierii, cu firul OA, care ar prelua întreaga tensiune din cele două fire).

Se notează cu θ unghiul pe care-l face firul cu verticala la un moment dat. Acest unghi reprezintă spațiul unghiular care definește în orice moment poziția leagănului:

$\dot{\theta} = \omega$ — viteza unghiulară;

$\ddot{\theta} = \varepsilon$ — accelerația unghiulară.

Componentele după normală și tangentă ale accelerației punctului A sînt (fig. 33.17):

$$a_t = l\varepsilon = l\ddot{\theta}.$$

$$a_n = l\omega^2 = l\dot{\theta}^2.$$

Se izolează scîndura tăind firul. Ea va fi în echilibru fictiv (echilibru dinamic) sub acțiunea următoarelor forțe:

G — greutatea proprie;

T — tensiunea din firul OA;

$F_{it} = Ma_t = \frac{G}{g} l \ddot{\theta}$ — componenta după tangentă a forței de inerție;

$F_{in} = M_{an} = \frac{G}{g} l \dot{\theta}^2$ — componenta după normală a forței de inerție (componenta centrifugă).

Scriind ecuațiile de echilibru, de proiecție pe sistemul de axe format de tangentă și normală se obține sistemul de ecuații:

$$\varepsilon_x = G \sin \theta - \frac{G}{g} l \ddot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_y = T - G \cos \theta - \frac{G}{g} l \theta^2 = 0. \qquad (2)$$

Din ecuația (1) rezultă:

$$\theta = g \frac{\sin \theta}{l}$$

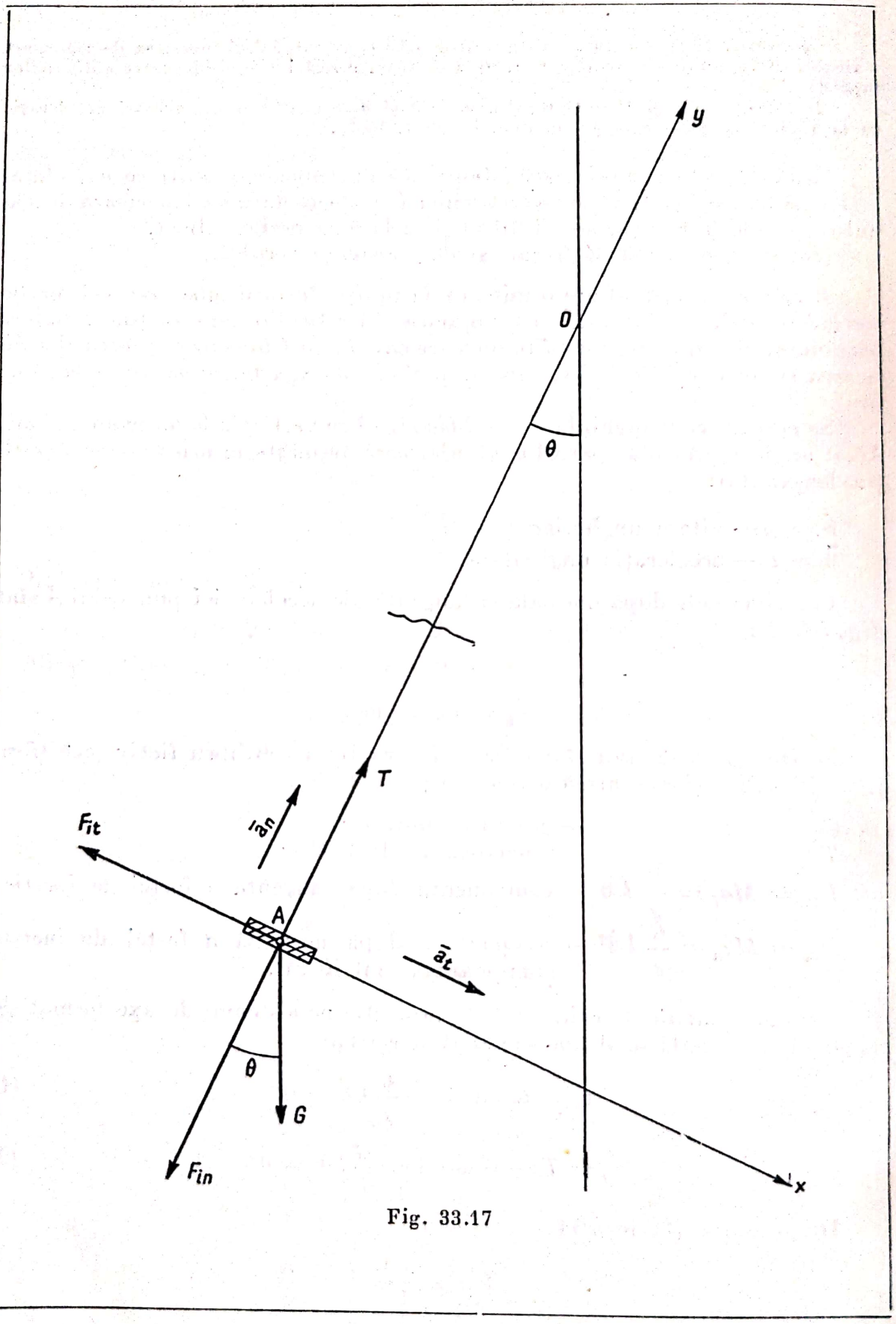


Fig. 33.17

Scanned with OKEN Scanner

și din ecuația (2) rezultă:

$$T = G \cos \theta + \frac{G}{g} l \dot{\theta}^2, \tag{3}$$

θ fiind funcție de timp, rezultă că $T = f(t)$.

Valoarea maximă a tensiunii T se obține anulînd derivata funcției. Se obține:

$$\frac{dT}{dt} = -G \sin \theta \cdot \dot{\theta} + \frac{G}{g} l 2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

$$-G \sin \theta \cdot \dot{\theta} + 2 \frac{G}{g} l \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0.$$

Substituind în această ecuație valoarea lui $\ddot{\theta}$, dedusă din ecuația (1), se obține:

$$-G \sin \theta \dot{\theta} + 2 \frac{G}{g} l \theta \frac{g \sin \theta}{l} = 0.$$

Simplificînd și făcînd reducerile se obține:

$$G\dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$G \neq 0.$$

De asemenea, $\dot{\theta} \neq 0$, deoarece altminteri ar însemna că leagănul stă pe loc. Rămîne, deci:

$$\sin \theta = 0,$$

ceea ce dă (ținînd seamă că $\theta < 90°$):

$$\theta = 0°.$$

Aceasta înseamnă că tensiunea maximă în fir are loc atunci cînd leagănul trece prin poziția verticală.

Substituind această valoare a lui θ în relația (3), care dă mărimea lui T, se obține:

$$T = G + \frac{G}{g} l \dot{\theta}^2. \tag{4}$$

Va trebuie să se determine acum valoarea lui $\dot{\theta}^2$ pentru poziția verticală.

Pentru determinarea valorii lui $\dot{\theta}^2$ în poziția verticală a leagănului se aplică teorema echivalenței energiei cinetice cu lucrul mecanic.

În momentul inițial, energia cinetică a leagănului $E_0 = 0$, pentru că enunțul precizează că leagănul a fost lăsat să oscileze liber. În momentul trecerii prin poziția verticală, energia cinetică a leagănului este:

$$E_1 = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l^2 \dot{\theta}^2.$$

Lucrul mecanic dezvoltat de leagăn, din poziția făcînd unghiul θ_0, în verticală pînă în momentul trecerii lui prin poziția verticală, este:

$$L_{0-1} = Gl\,(1 - \cos\,\theta_0).$$

Scriind echivalenta dintre energia cinetică pierdută și lucrul mecanic produs se obține:

$$\frac{1}{2}\frac{G}{g}\,l^2\,\dot{\theta}^2 = Gl\,(1 - \cos\,\theta_0),$$

de unde:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\,g\,(1 - \cos\theta_0)}{l}. \qquad (5)$$

Înlocuind această valoare în relația (4) se obține:

$$T_{max} = G + \frac{G}{g}\,l\,\frac{2g\,(1 - \cos\,\theta_0)}{l} = G(3 - 2\cos\,\theta_0).$$

În cazul problemei de față, $\theta_0 = 45°$ $\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Deci:

$$T_{max} = G\left(3 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = G\,(3 - \sqrt{2}) \approx 1{,}6\,G.$$

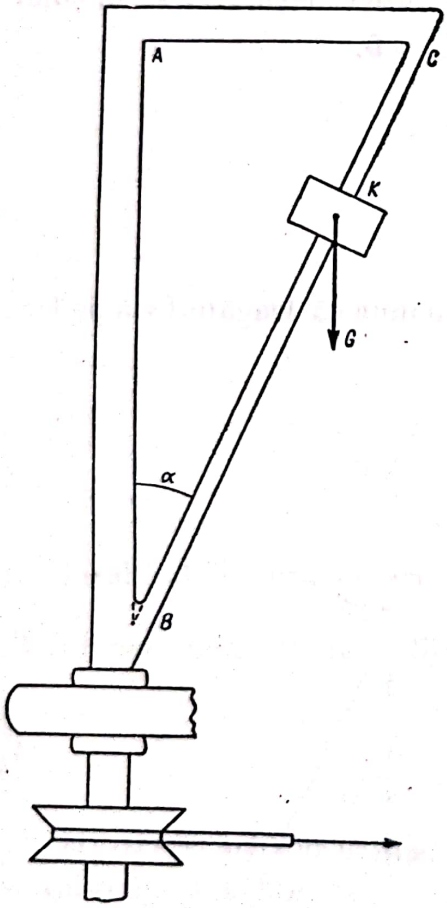


Fig. 33.18, *a*

33.18. Un cadran triunghiular rigid ABC se rotește în jurul laturii AB cu viteza unghiulară ω, constantă. Pe latura BC (ipotenuza triunghiului) poate aluneca, fără frecare, manșonul K de greutate G (fig. 33.18, *a*).

Să se afle poziția de echilibru relativ a manșonului, unghiul $ABC = \alpha$ fiind cunoscut. (Manșonul se poate asimila cu un punct material.)

Rezolvare. Corpul despre care este vorba este manșonul K. Acest manșon fiind în repaus relativ, forțele efectiv aplicate, forțele de legătură și forțele de inerție din mișcare de transport, formează un sistem în echilibru. Izolînd manșonul se observă că forțele sînt (v. fig. 33.18, *b*):

— forțe efectiv aplicate G — greutatea manșonului;
— forțe de legătură N — reacțiunea barei pe care alunecă manșonul;
— forța de inerție — $m\bar{a}$ — forța de inerție; ($\bar{a}$ din mișcarea de transport).

Mișcarea de transport este o mișcare de rotație cu viteză unghiulară constantă $\bar{\omega}$; prin urmare singura accelerație de transport este accelerația normală la cercul pe care îl descrie manșonul în jurul axului AB ($a_n = r\omega^2$).

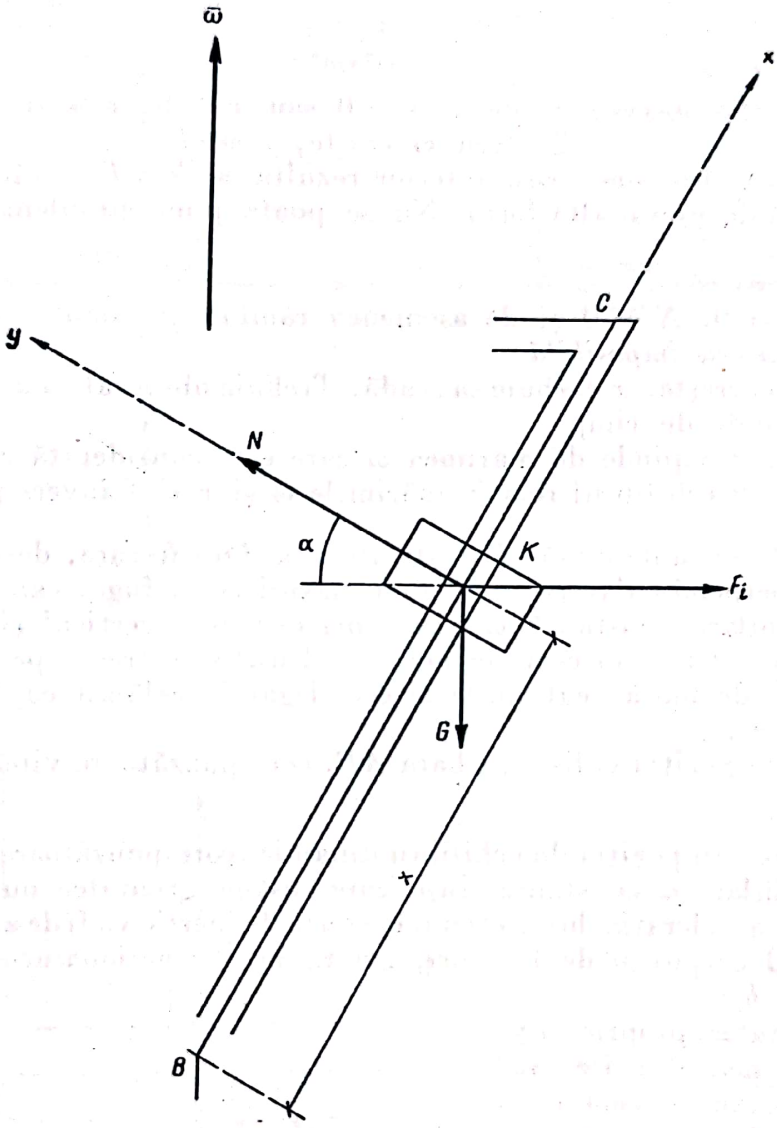


Fig. 33.18, *b*

Notînd cu x distanța de punctul B a manșonului în poziția de echilibru, forța de inerție F_i va avea valoarea:

$$F_i = m \cdot r\omega^2 = \frac{G}{g} x \sin\alpha \cdot \omega^2 = \frac{G}{g} x \omega^2 \sin\alpha.$$

Scriind condițiile de echilibru (proiecții pe direcția barei AB și pe normala ei) se obține:

$$\sum X = \frac{G}{g} \omega^2 x \sin\alpha - N \cos\alpha = 0,$$

$$\sum Y = -G + N \sin\alpha = 0,$$

care rezolvat dă:

$$N = \frac{G}{\sin \alpha};$$

$$x = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Discuție. Se observă: 1) dacă $\omega = 0$ sau $x = 0$, $x \to \infty$;
2) dacă ω crește, x scade;

dacă $x=0$, din cele scrise anterior rezultă că $N = F$ și rămîne numai G neechilibrată de nici o altă forță. Nu se poate pune problema unei poziții de echilibru.

Se observă că:

dacă $\omega = 0$, $N = 0$ și de asemenea rămîne G singur, neechilibrat și deci *problema este imposibilă*

— dacă ω crește, x trebuie să scadă. Trebuie observat că x este o mărime care nu depinde de timp.

Mărimea x depinde de mărimea ω care este considerată constantă. Rezultă că pentru echilibrul relativ mărimile ω și x sînt invers proporționale.

33.19. O culisă de masă M poate aluneca, fără frecare, de-a lungul barei AB fixată perpendicular pe axul unei mașini centrifuge, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω. Axul mașinii este vertical și prin el trece un fir de care atîrnă un corp de masă m. Firul este trecut peste un scripete foarte mic C de masă neglijabilă și este legat la celălalt capăt de masă M (fig. 33.19, *a*).

Să se afle poziția culisei pe bara AB, corespunzătoare vitezei unghiulare ω dată.

Rezolvare. În poziția de echilibru dinamic, corespunzătoare unei anumite viteze unghiulare ω constante, firul care susține greutatea nu se va afla în repaus, deci accelerația lui va fi nulă și forța de inerție va fi de asemenea nulă.

Separînd corpul M de legături, asupra lui vor acționa următoarele forțe (fig. 33.19, *b*):

— Greutatea proprie Mg,
— tensiunea din fir mg,
— reacțiunea normală N,
— forța de inerție (centrifugă) $F_i = Mx\omega^2$.

Se scrie ecuația de echilibru, de proiecție pe verticală:

$$mg - M\,x\omega^2 = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{mg}{M\omega^2}.$$

NOTĂ. Poziția de echilibru dinamic găsită este nestabilă, întrucît la o deplasare din această poziție, indiferent în ce sens, va apărea forța de inerție a corpului de masă m a cărui accelerație nu va mai fi nulă, pentru o anumită viteză unghiulară constantă ω, numai atunci cînd culisa de masă M se află la distanța:

$$x = \frac{mg}{M\omega^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

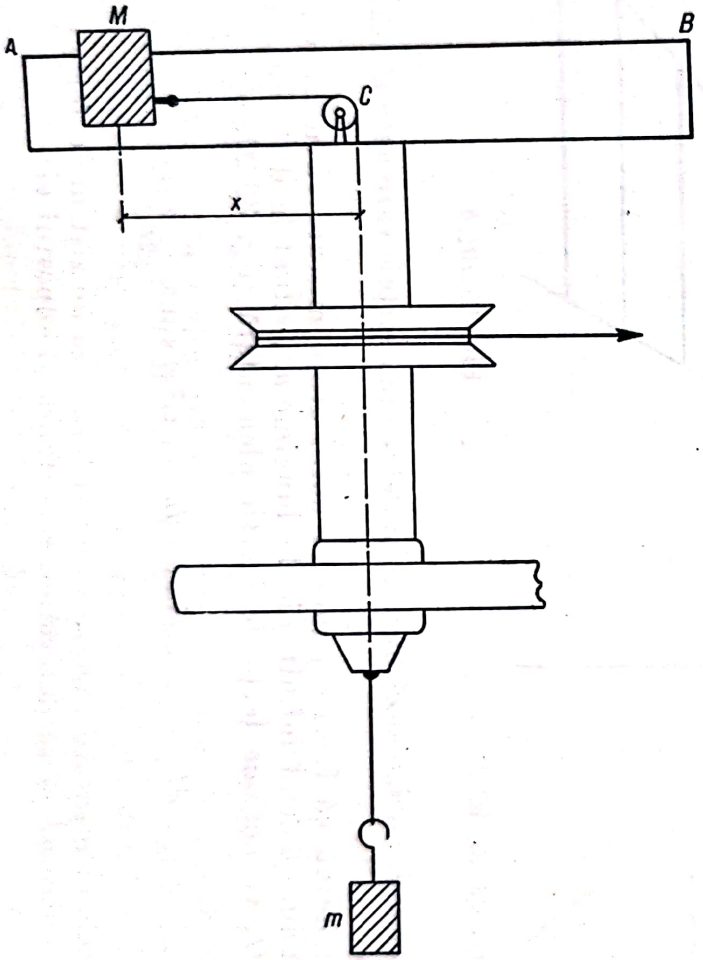


Fig. 33.19, *a*

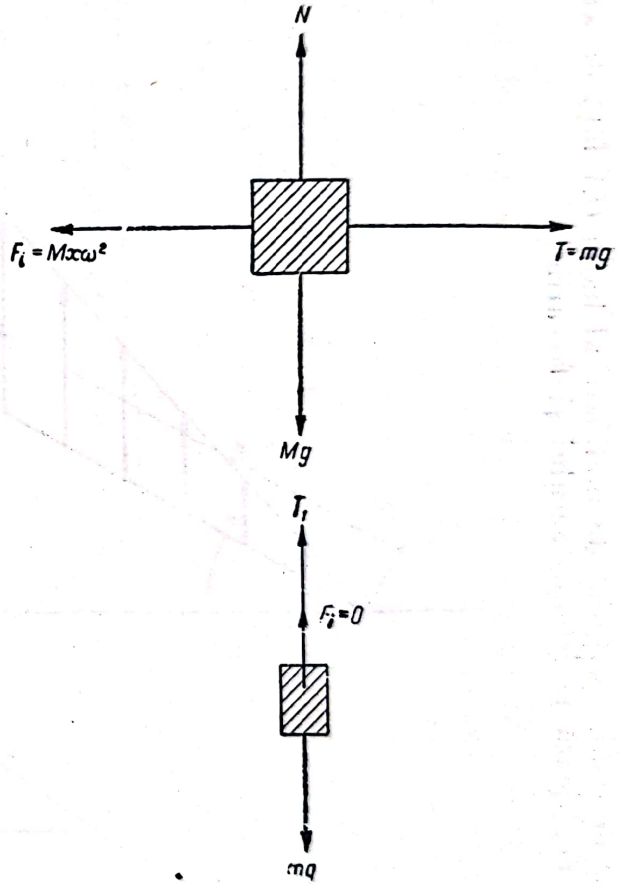


Fig. 33.19, *b*

33.20. O bară omogenă OA, de lungime $2l$ și greutate G, este articulată în capătul O de axa verticală OO_1 care se rotește cu viteza unghiulară ω constantă (fig. 33.20, *a*).

Să se determine unghiul de înclinare al barei OA față de axul vertical OO_1. Se neglijează rezistența aerului și frecările.

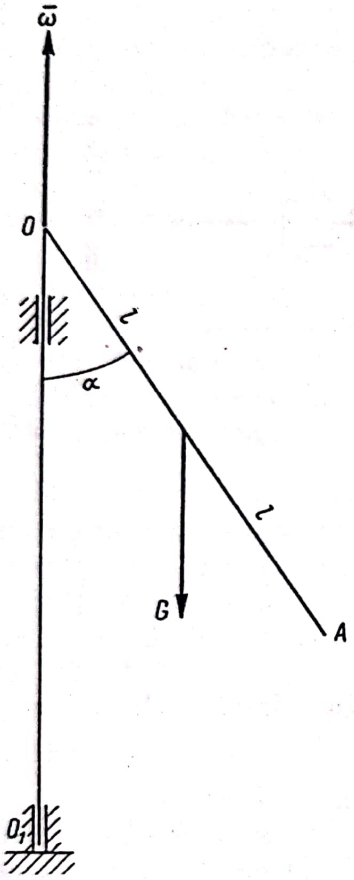


Fig. 33.20, *a*

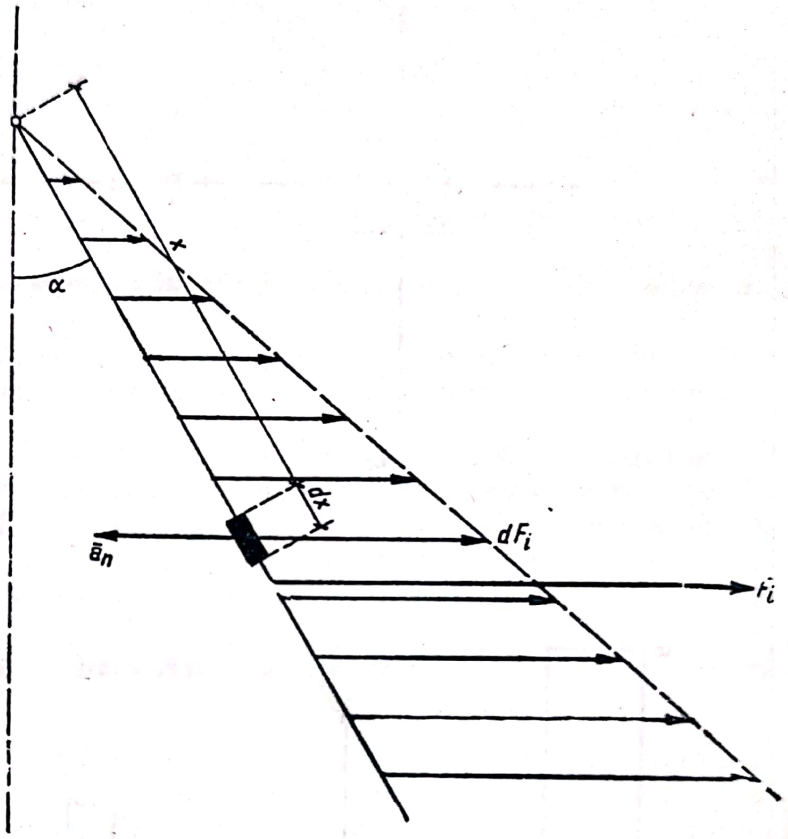


Fig. 33.20, *b*

Rezolvare. Se izolează bara și se determină forțele care acționează asupra barei.

Se observă că fiecare punct al barei are o mișcare circulară uniformă. Asupra unui element infinit mic de lungime dx, situat la distanța x de articulația O, va acționa forța de inerție elementară (fig. 33.20, *b*):

$$dF_i = \omega^2 x \sin\alpha \cdot dm = \omega^2 x \sin\alpha \frac{G}{g2l} dx.$$

Forțele elementare variază liniar și formează un sistem de forțe paralele. Este necesar să se determine rezultanta și suportul ei:

$$F_i = \int_0^{2l} \omega^2 \sin \frac{G}{2gl} x\, dx,$$

sau:

$$F_i = \frac{G}{2gl}\,\omega^2 \sin\alpha \int_0^{2l} x\,dx = \frac{G}{g}\,l\omega^2 \sin\alpha.$$

Este evident că în acest caz repartiția forțelor fiind liniară, suportul rezultantei forțelor de inerție va intersecta bara la două treimi din lungimea ei.

Pentru determinarea poziției de echilibru relativ se desenează din nou bara OA izolată și se aplică forțele care acționează asupra ei (fig. 33.20, *c*):

— greutatea G,

— forțele de legătură H, V din articulație,

— forța de inerție $F_i = \frac{G}{g}\,l\omega^2 \sin\alpha$.

Scriind ecuația de momente în raport cu articulația se obține:

$$Gl \sin\alpha - \frac{G}{g}\,l\omega^2 \sin\alpha \frac{4l}{3} \cos\alpha = 0.$$

Rezultă:

$$\sin\alpha = 0;$$

cazul barei perfect verticale:

$$\cos\alpha = \frac{3g}{4l\omega^2}.$$

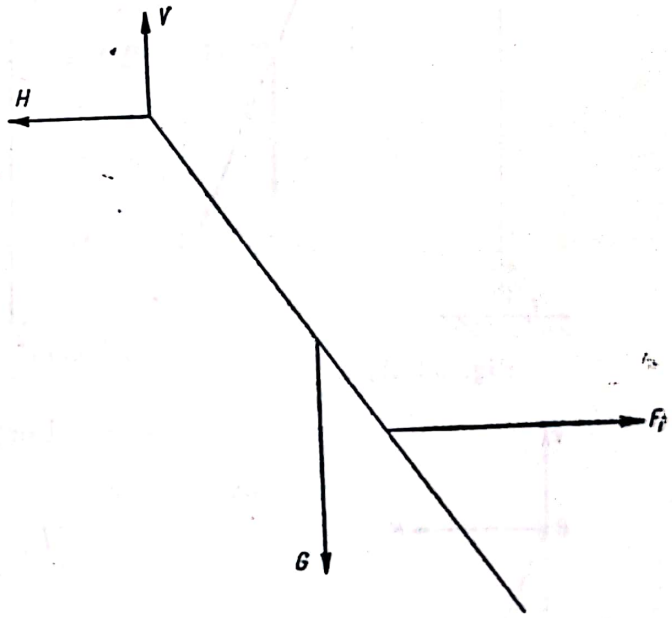


Fig. 33.20, *c*

33.21. Pe un ax vertical O_1O_2 este fixată rigid o bară orizontală AB de lungime a și greutate neglijabilă. La capătul B al acestei bare este articulată plan o bară omogenă BC de lungime l și greutate $p\left[\frac{\text{kgf}}{m}\right]$. Bara B este situată în același plan vertical cu axul O_1O_2 (fig. 33.21, *a*).

Să se afle viteza unghiulară ω constantă cu care trebuie să se rotească axul O_1O_2, pentru ca bara BC să facă cu verticala, în poziția de echilibru relativ, unghiul α (cunoscut). Se neglijează rezistența aerului și frecările.

Rezolvare. Se consideră un element infinit mic de lungime dx, situat la distanța x de punctul B (fig. 33.21, *b*):

— masa elementului $dm = \frac{P}{g}\,dx$;

— accelerația elementului $a_n = \omega^2\,(a + x \sin\alpha)$.

Forța de inerție are numai componentă după normală:

$$dF_i = \frac{P}{g}\,\omega^2\,(a + x\,\sin\,\alpha)\,dx.$$

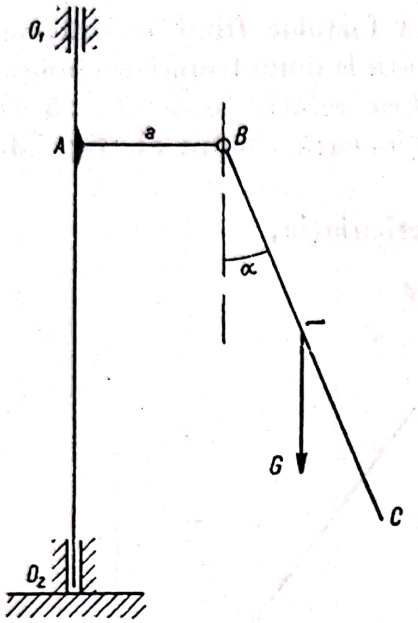


Fig. 33.21, *a*

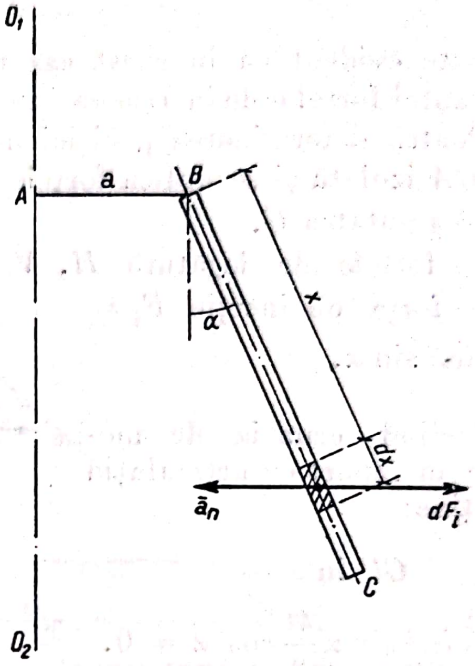


Fig. 33.21, *b*

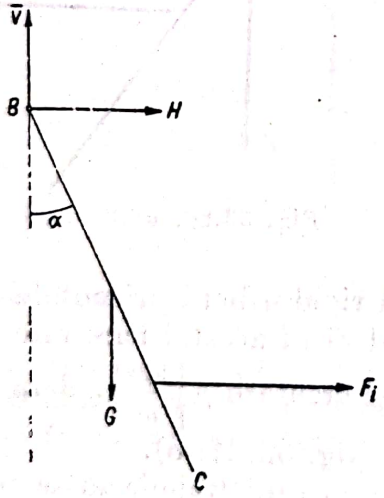


Fig. 33.21, *c*

Forța de inerție a întregii bare:

$$F_i = \int_0^l dF_i = \frac{pl}{2g}\,(2a + l\,\sin\,\alpha)\,\omega^2.$$

Pentru a afla distanța x_0 la care este aplicată forța F_i se determină centrul forțelor paralele dF_i:

$$x_0 = \frac{\int_0^l x\,dF_i}{\int_0^l dF_i} = \frac{(3a + 2l\,\sin\,\alpha)\,l}{3\,(2a + l\,\sin\,\alpha)}.$$

Se izolează bara BC. Asupra ei acționează (fig. 33.21, *c*):

— greutatea proprie $G = pl$;

— componentele reacțiunii din articulația B:

$$V,\ H;$$

— forța de inerție $F_i = \frac{pl}{2g}\,(2a + l\,\sin\,\alpha)\,\omega^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Se aplică ecuația de momente în raport cu punctul B:

$$\sum M_B = \frac{p\,l}{2g}(2a + l\sin\alpha)\,\omega^2\,\frac{(3a + 2l\sin\alpha)}{3\,(2a + l\sin\alpha)}\cos\alpha - pl\frac{l}{2}\sin\alpha = 0.$$

Rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{3gl\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(3a + 2l\sin\alpha)\,l}}.$$

33.22. Un regulator centrifug (Watt) are două bile identice de greutate G, aflate la capetele barelor OA și OB de greutate neglijabilă.

Prin intermediul barelor CE și DE, barele susțin un manșon Q care poate culisa pe axul vertical. Se cunosc lungimile (fig. 33.22, *a*):

$$OA = OB = l,$$
$$OC = OD = CE = DE.$$

Știind că regulatorul se rotește în jurul axului vertical cu viteza unghiulară ω, să se determine înclinarea barelor OA și DB față de verticală, la echilibru relativ.

Rezolvare. Se izolează bara OB asupra căreia acționează forțele (fig. 33.22, *b*):

G — greutatea bilei,
H, V — reacțiunile din articulația O,
— T — tensiunea din bara DE,
— $F_i = \frac{G}{g} \cdot l\sin\alpha\,\omega^2$, forța de inerție.

Se izolează greutatea Q asupra căreia acționează:

Q — greutatea manșonului,
T — tensiunile barelor DE și CE.

Forța de inerție este nulă.

Se pot scrie ecuațiile:

$$-Q + 2T\cos\alpha = 0$$
$$-H - T\sin\alpha + \frac{G}{g} \cdot l\sin\omega^2 = 0$$
$$-V - T\cos\alpha - G = 0$$
$$-Gl\sin\alpha + G \cdot l\sin\alpha\,\omega^2\,l\cos\alpha - T_{2a}\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$T = \frac{Q}{2\cos\alpha}$$

și

$\sin\alpha = 0$ (soluție banală)

$$\cos\alpha = \frac{Gl + Qa}{Gl^2\omega^2}.$$

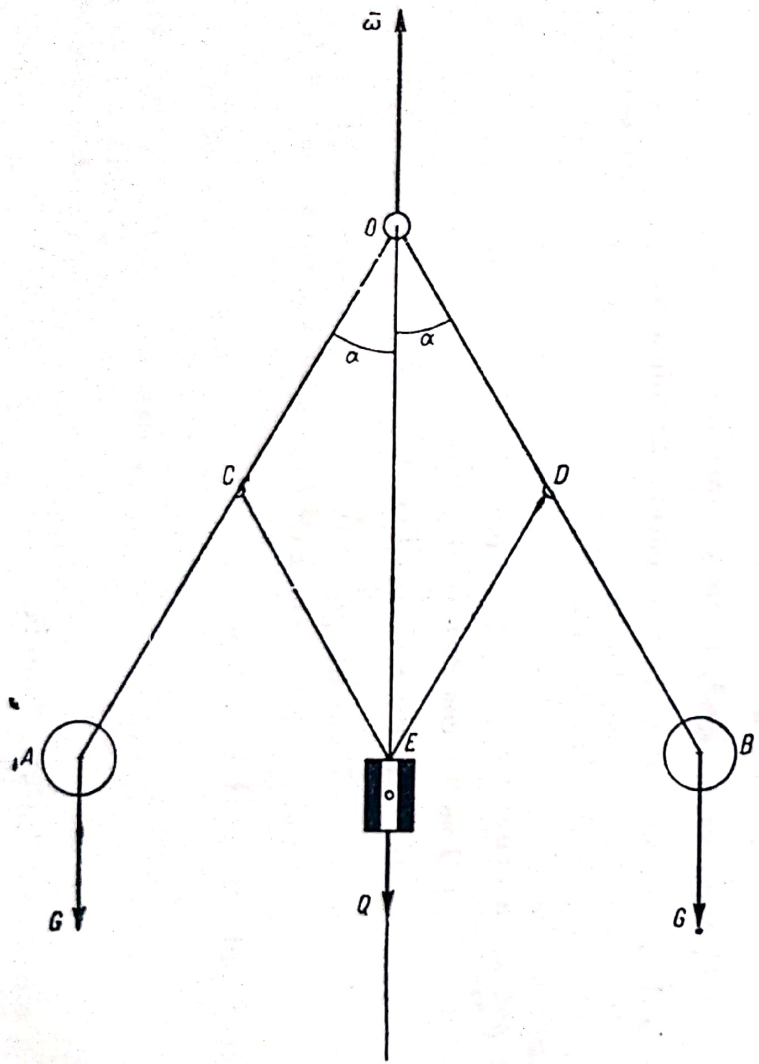


Fig. 33.22, *a*

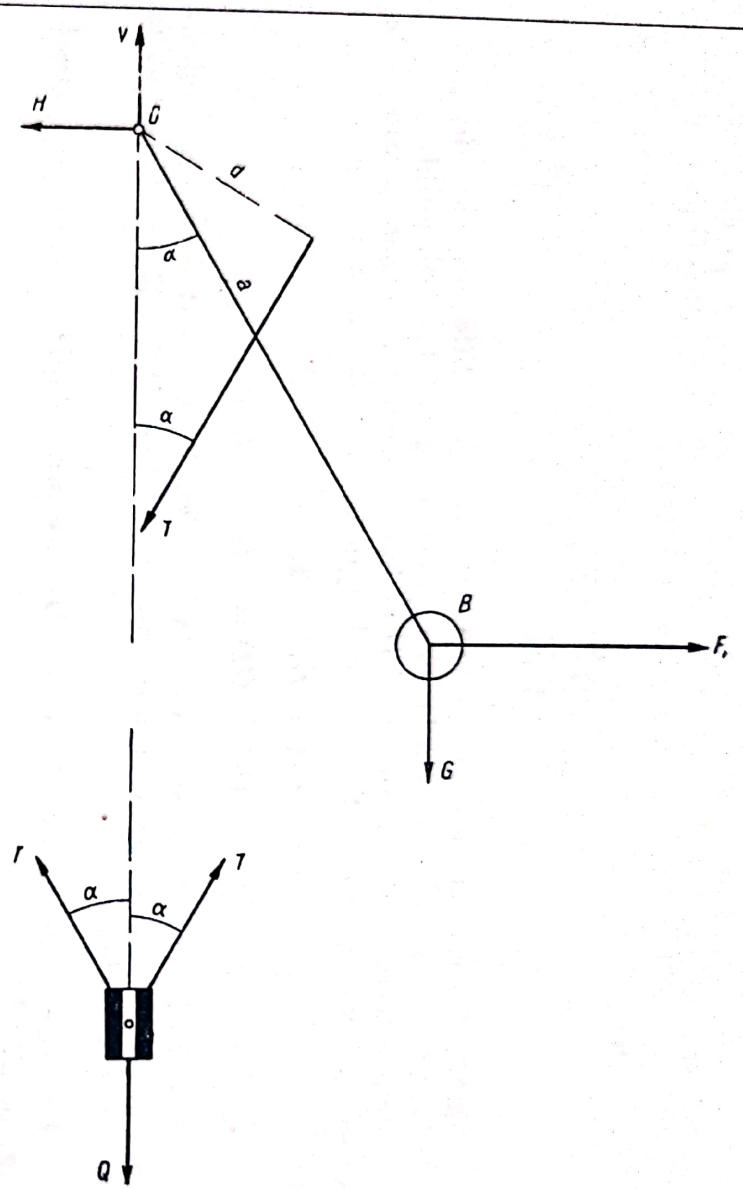


Fig. 33.22, *b*

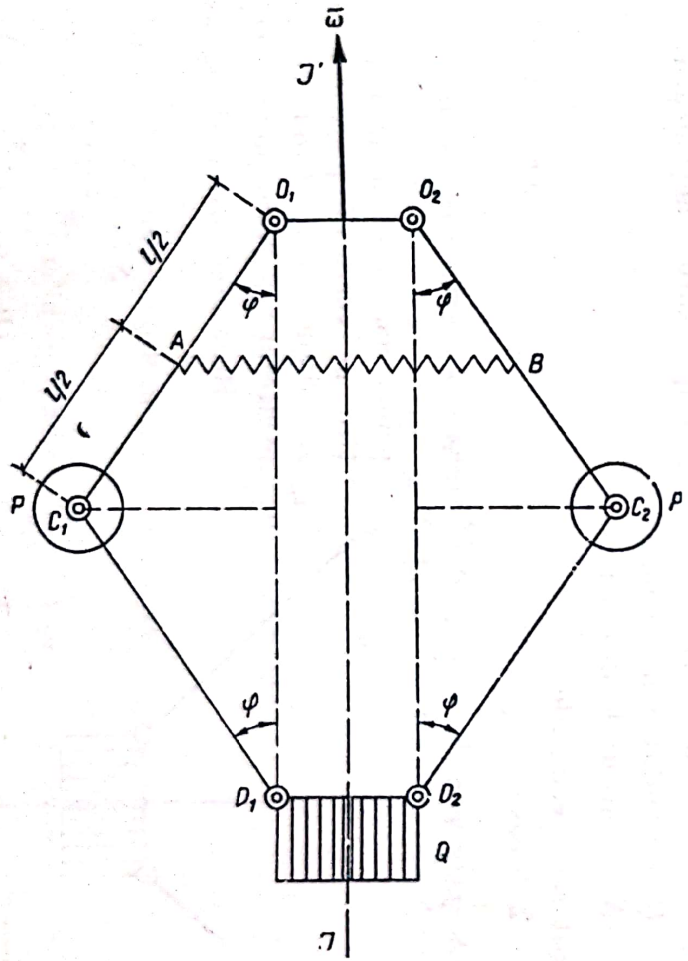


Fig. 33.23, *a*

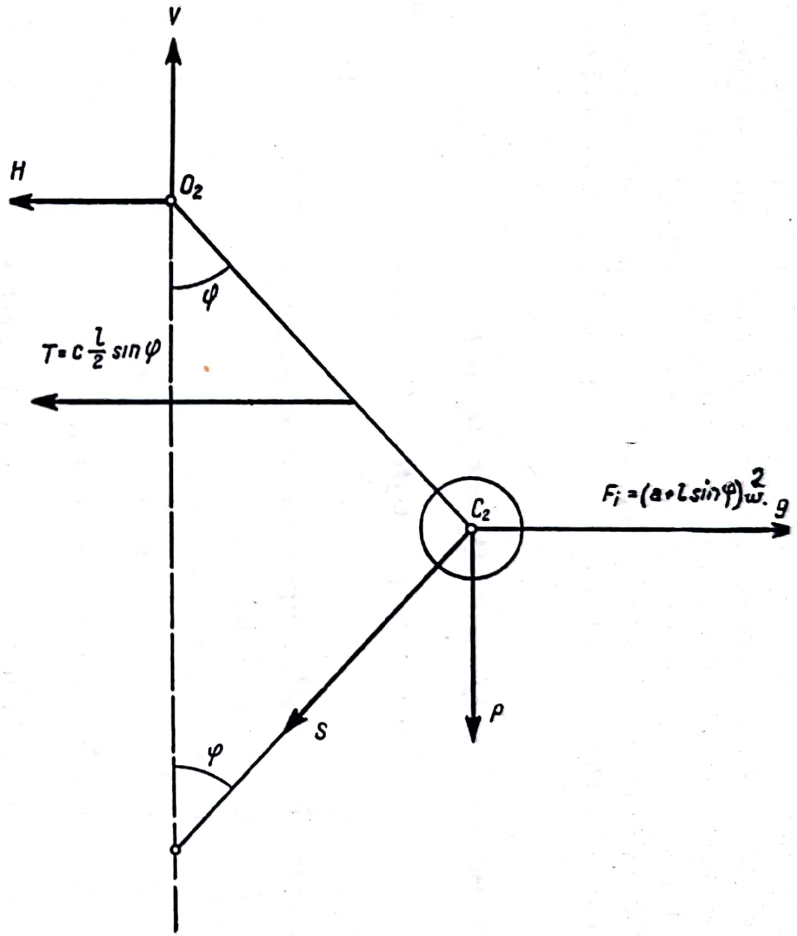


Fig. 33.23, *b*

33.23. Un regulator centrifugal se compune dintr-un sistem de bare articulate de greutate neglijabilă dispuse ca în figură. Barele susțin două bile grele de greutate P și un manșon de greutate Q. Barele superioare sînt legate între ele cu un resort, a cărui tensiune este proporțională cu alungirea resortului, coeficientul de proporționalitate fiind C (fig. 33.23, *a*).

Să se determine viteza unghiulară cu care trebuie să se rotească regulatorul în jurul axului vertical, pentru ca barele O_1C_1 și O_2C_2 să se încline cu unghiul α.

Se cunosc $O_1C_1 = O_2C_2 = C_1D_1 = C_2D_2 = l$;

$$O_1A = AC_1 = O_2B = BC_2 = \frac{l}{2}.$$

Se izolează bara O_2C_2 asupra căreia acționează:

P — greutatea bilei,

H_1V — reacțiunile din articulație,

$T = C\frac{l}{2}\sin\varphi$ — tensiunea din arc,

S — tensiunea din bara C_2D_2,

$F_i = (a + l\sin\varphi)\frac{P}{g}\omega^2$ — forța de inerție.

De asemenea se izolează manșonul Q asupra căruia acționează:

Q — greutatea manșonului,

S — tensiunile din bare.

Se pot scrie ecuațiile:

$$2S\cos\varphi - Q = 0,$$

$$-T\frac{l}{2}\cos\varphi + F_i \cdot l\cos\varphi - Pl\sin\varphi - S_2 l\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

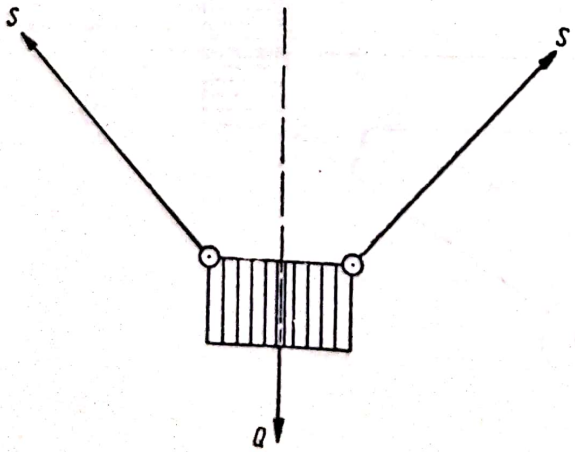


Fig. 33.23, *c*

prima ecuație fiind dată de proiecțiile pe verticală pentru corpul Q și a doua ecuație fiind cea de momente în raport cu punctul O_2.

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$S = \frac{Q}{2\cos\alpha}$$

$$\omega^2 = g\frac{\left(P + Q + C\frac{l^2}{4}\cos\varphi\right)\operatorname{tg}\varphi}{P(a + l\sin\varphi)}.$$

33.24. O placă omogenă în formă de triunghi-dreptunghi isoscel avînd greutatea G și cateta a este fixată pe un ax vertical, ca în figura 33.24, *a*.

Să se determine reacțiunile care apar în reazemele A și B, dacă placa se rotește cu viteza unghiulară constantă ω. Nu se ține seamă de frecări și de rezistența aerului.

Asupra plăcii care se află în orice moment în echilibru fictiv lucrează forțele date, forțele de legătură și forțele de inerție.

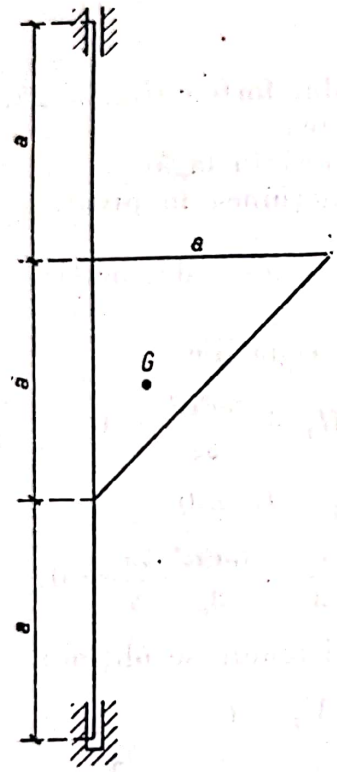


Fig. 33.24, *a*

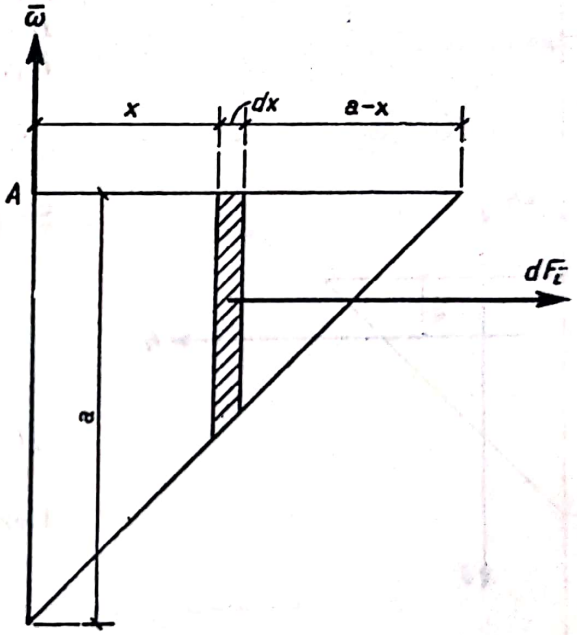


Fig. 33.24, *b*

Să se determine în prealabil forțele de inerție: asupra unui element din suprafață de lungime dx acționează forța de inerție (fig. 33.24, *b*):

$$dF_i = dm \cdot x \cdot \omega^2$$

$$dF_i = \frac{G\omega^2}{g\dfrac{a^2}{2}}(a - x)x\,dx.$$

Forța de inerție rezultantă are expresia:

$$F_i = \int_0^a \frac{2G}{ga^2}\omega^2(a - x)\,x dx = \frac{2G}{ga^2}\omega^2\int_0^a (a - x)x \cdot dx = \frac{2G}{ga}\omega^2\frac{a^2}{2}$$

$$F_i = \frac{G\omega^2 a^2}{3g}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina suportul forței de inerție se determină centrul forțelor paralele în raport cu punctul A. Rezultă:

$$d = \frac{\int_0^a dF_i \left(\frac{a-x}{2}\right)}{\int_0^a dF_i} = \frac{\int_0^a \frac{2G\omega^2}{ga^2} \frac{(a-x)^2}{2} x \cdot dx}{\frac{Ga^2\omega^2}{3g}} = \frac{a}{4}.$$

Se izolează placa împreună cu axul și se introduc forțele (fig. 33.24, c):

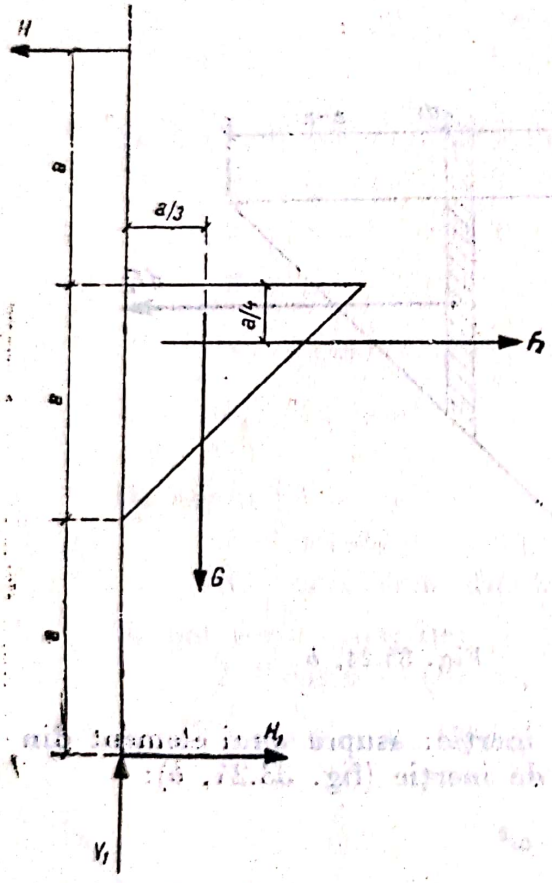


Fig. 33.24, c

$d\bar{G}$ — greutatea,
H — reacțiunea în lagăr,
H_1, V_1 — reacțiunea în pivot,

$F_i = \frac{G\omega^2 a^2}{3g}$ — forța de inerție.

Se pot scrie ecuațiile:

$$-H + H_1 + \frac{Ga^2\omega^2}{3g} = 0$$

$$V_1 - G = 0$$

$$H \cdot 3a - G\frac{a}{3} - \frac{Ga^2\omega^2}{3g}\frac{7a}{4} = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține:

$$V_1 = G$$

$$H = \frac{G}{g}\left[1 + \frac{7}{36}a^2\omega^2\right].$$

$$H_1 = \frac{G}{g}\left[1 - \frac{5a^2\omega^2}{36}\right].$$

33.25. O placă în formă de trei sferturi de cerc având raza R[cm] și greutatea p[kg/cm²] este fixată cu diametrul care desparte semicercul de sfertul de cerc, pe un ax vertical AB de lungime $4R$, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 33.25, a).

Să se determine reacțiunile care apar în reazemele A și B, în timpul mișcării. Să se determine viteza unghiulară pentru care reacțiunea orizontală din pivot să fie nulă. Nu se ține seamă de frecări și de rezistența aerului.

Rezolvare. Placa va fi în orice moment în echilibru fictiv (echilibru dinamic), sub acțiunea forțelor date, a forțelor de legătură și a forțelor de inerție (fig. 33.25, b).

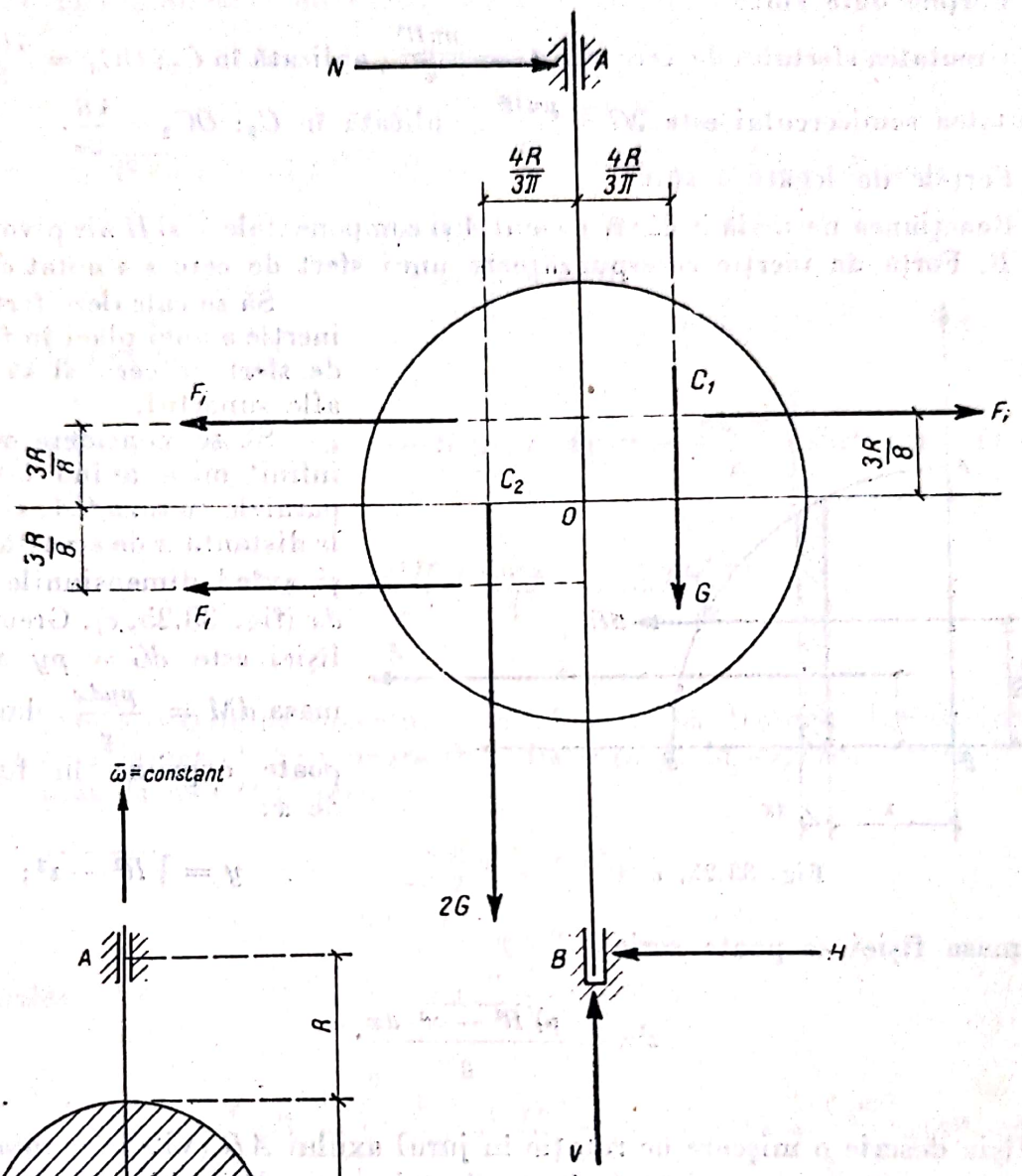


Fig. 33.25, *b*

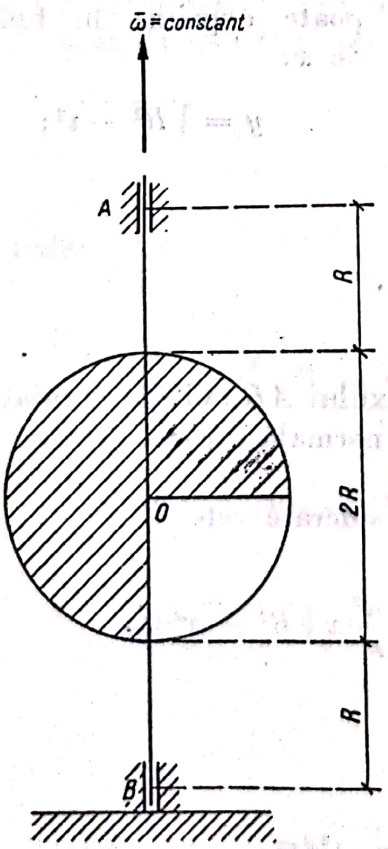


Fig. 33.25, *a*

Forţele date sînt:

Greutatea sfertului de cerc este $G = \frac{p\pi R^2}{4}$, aplicată în C_1; $OC_1 = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$.

Greutatea semicercului este $2G = \frac{p\pi R^2}{2}$, aplicată în C_2: $OC_2 = \frac{4R}{3\pi}$.

Forţele de legătură sînt:

Reacţiunea normală N din reazemul A şi componentele V şi H ale pivotului din B. Forţa de inerţie corespunzătoare unui sfert de cerc s-a notat cu F_i.

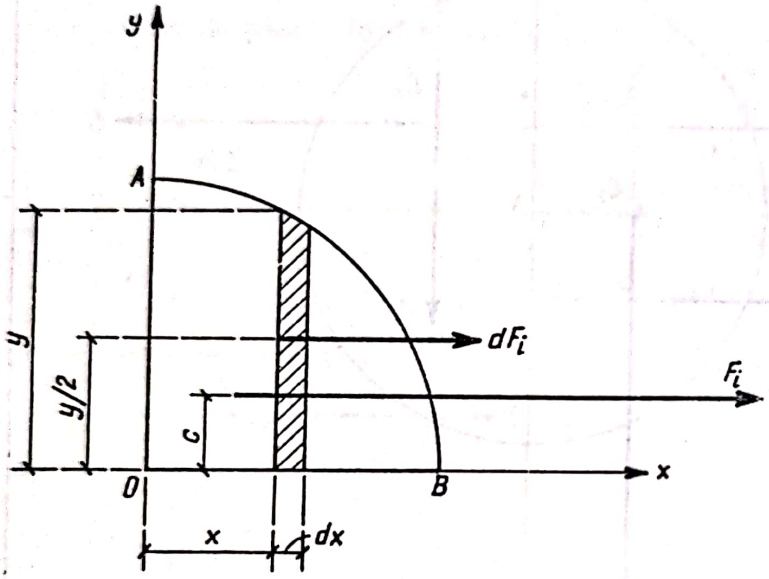


Fig. 33.25, *c*

Să se calculeze forţa de inerţie a unei plăci în formă de sfert de cerc şi să i se afle suportul.

Să se considere o fîşie infinit mică avînd laturile paralele cu raza OA, situată la distanţa x de această rază şi avînd dimensiunile y şi dx (fig. 33.25, *c*). Greutatea fîşiei este $dG = py\,dx$ şi masa $dM = \frac{pydx}{g}$, dar y se poate exprima în funcţie de x:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2};$$

deci masa fîşiei se poate scrie:

$$dm = \frac{p\sqrt{R^2 - x^2}\cdot dx}{g}.$$

Fîşia descrie o mişcare de rotaţie în jurul axului AB. Viteza de rotaţie ω fiind constantă nu va exista decît acceleraţia normală a cărei valoare este $a = x\omega^2$.

Forţa de inerţie corespunzătoare fîşiei considerate este:

$$dF_i = a\,dM = x\omega^2 \frac{p\sqrt{R^2 - x^2}}{g} dx = \frac{p\,\omega^2}{g}\, x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

Forţa de inerţie totală va fi:

$$F_i = \int_0^R dF_i = \int_0^R \frac{p\omega^2}{g}\, x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

Se face schimbare de variabilă:

$$x = R\cos\alpha$$

$$dx = -R\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - R^2\cos\alpha} = \sqrt{R^2(1-\cos^2\alpha)} = R\sin\alpha$$

$$x = 0 \qquad x = R$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = 0.$$

Integrala devine:

$$F_i = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{p\omega^2}{g} R\cos\alpha\, R\sin\alpha\,(-R\sin\alpha)\, d\alpha = -\frac{p\omega^2 R^3}{g}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\alpha\cos\alpha\, d\alpha =$$

$$= -\frac{p\omega^2 R^3}{g}\left|\frac{\sin^3\alpha}{3}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = +\frac{p\omega^2 R^3}{3g}.$$

Pentru a determina suportul forței F_i se aplică teorema lui Varignon în raport cu originea O. Se notează cu c distanța de la suportul forței de inerție F_i pînă la axa O și rezultă:

$$\sum \frac{y}{2} dF_i = cF_i,$$

de unde:

$$c = \frac{\sum \frac{y}{2} dF_i}{F_i}.$$

Dar $\sum_0^R \frac{y}{2} dF_i = \int_R^0 \frac{y}{2} dF_i = \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{2} \frac{p\omega^2}{g} x\sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_0^R \frac{p\omega^2}{2g} x(R^2 - x^2) dx$

$$\frac{p\omega^2}{2g}\int_0^R (R^2 x - x^3)\, dx = \frac{p\omega^2}{2g}\left|\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_0^R = \frac{p\omega^2}{2g}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{pR^4\omega^2}{8g},$$

deci:

$$c = \frac{\frac{pR^4\omega^2}{8g}}{\frac{pR^3\omega^2}{3g}} = \frac{3R}{8}.$$

Pentru a afla valoarea reacțiunilor totale (atît cele datorite forțelor care acționează asupra corpului atunci cînd el este în stare de repaus, cît și cele

datorite forţelor care acţionează asupra lui cînd se rotesc forţele de inerţie) se scriu cele trei ecuaţii de echilibru:

$$N - H - F_i = 0$$

$$V - 2G - G = 0$$

$$4RN - \frac{4R}{3\pi}2G + \frac{4R}{3\pi}G - \left(2R - \frac{3R}{8}\right)F_i = 0.$$

Rezolvînd acest sistem se află:

$$V = 3G = 3\frac{\pi R^2 p}{4g}$$

$$N = \frac{G}{3\pi} + \frac{13}{32}F_i = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{\pi R^2 p}{4} + \frac{13}{32}\cdot\frac{pR^3\omega^2}{3g} = \frac{pR^2}{96}\left(8 + 13\frac{R^2\omega^2}{g}\right)$$

$$H = N - F_i = \frac{G}{3\pi} + \frac{13}{32}F_i - F_i = \frac{G}{3\pi} - \frac{19}{32}F_i = \frac{pR^2}{96}\left(8 - \frac{19R\omega^2}{g}\right).$$

Din expresiile reacţiunilor se observă că se poate determina viteza unghiulară ω pentru care componenta orizontală H a reacţiunii din B să fie nulă:

$$H = 0; \qquad 8 - \frac{19R\omega^2}{g} = 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8g}{19R}}.$$

33.26. O placă dreptunghiulară $CDEF$, avînd laturile $CD = EF = a$ [cm], $DE = FC = b$[cm] şi greutatea p[kg/cm^2], este fixată pe un ax orizontal AB de lungime $AB = L$, care se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω. Să se determine reacţiunile care apar în lagărele A şi B în timpul mişcării. Distanţele AC şi EB sînt egale (fig. 33.26, *a*).

Nu se ţine seamă de frecările din lagăr şi de rezistenţa aerului.

Rezolvare. Placa va fi în orice moment în stare de echilibru fictiv (echilibru dinamic) sub acţiunea forţelor date, a forţelor de legătură şi a forţelor de inerţie. Să se determine întîi valorile forţelor date şi forţelor de inerţie, cum şi liniile lor de acţiune.

Greutatea plăcii este $G = p\ ab$ şi este aplicată în centrul plăcii O.

Pentru determinarea forţelor de inerţie se descompune placa în două triunghiuri dreptunghiulare egale $\Delta CDE = \Delta EFC$.

Ducînd înălţimile, fiecare dintre cele două triunghiuri considerate va fi împărţit în alte două triunghiuri dreptunghice, după cum urmează:

$$\Delta\, CDD' = \Delta\, EFF',$$

$$\Delta\, DED' = \Delta\, FCF';$$

elementele geometrice ale acestor triunghiuri sînt (fig. 33.26,*b*)

$$CD = a \qquad D = b$$

$$DD' = h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$CD' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{și} \quad ED' = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

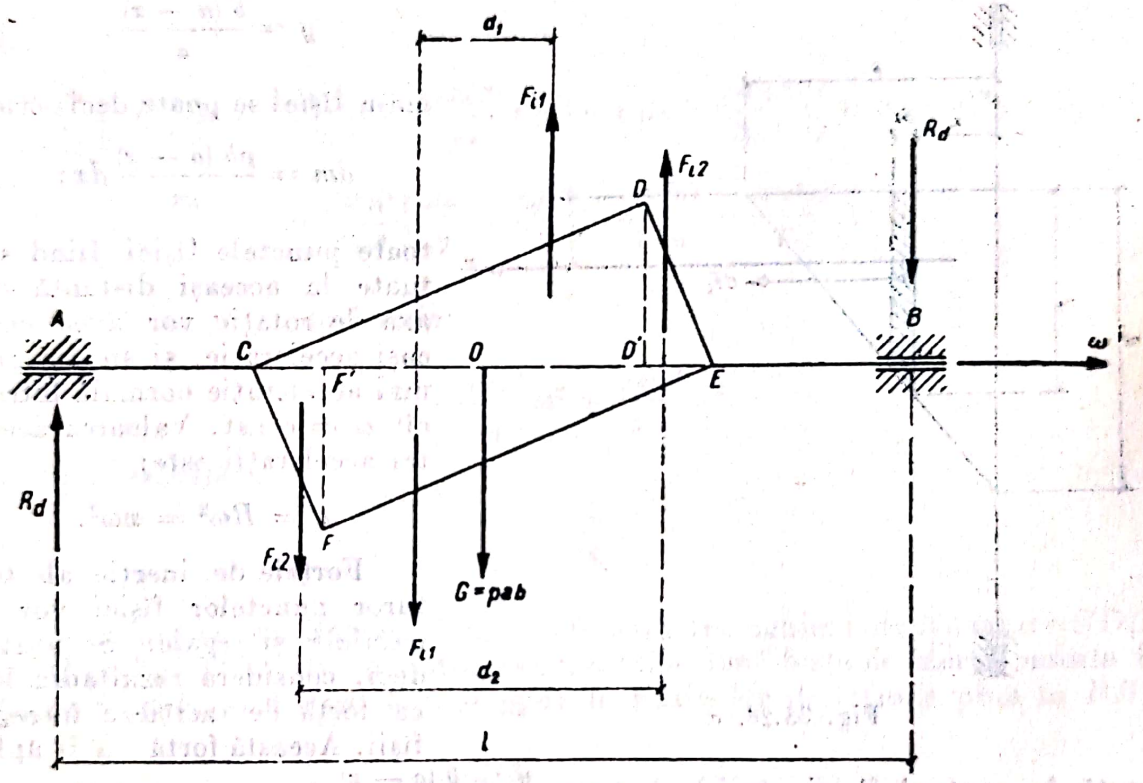


Fig. 33.26, *a*

Pentru celelalte două triunghiuri egale cu acestea laturile omoloage sînt egale.

În fiecare dintre aceste triunghiuri se va calcula forța de inerție și se va determina linia ei de acțiune.

Să se considere cazul general al unei plăci în formă de triunghi-dreptunghi de catete a și b fixată cu cateta b pe un ax care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω.

Să se considere o fîșie infinit mică paralelă cu cateta b (deci și cu axa de rotație), situată la distanța x

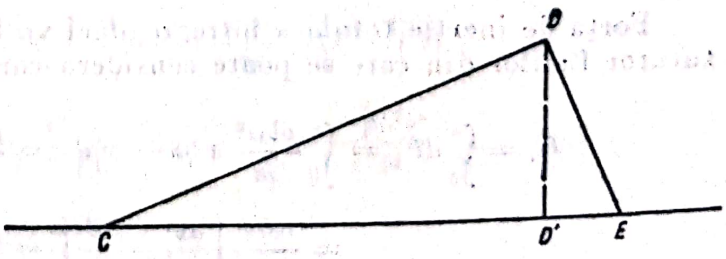


Fig. 33.26, *b*

de ax și avînd dimensiunile dx și y. Greutatea acestei fîșii va fi $dG = pydx$ și masa, $dm = \frac{pydx}{g}$ (fig. 33.26, *c*).

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice se poate scrie:

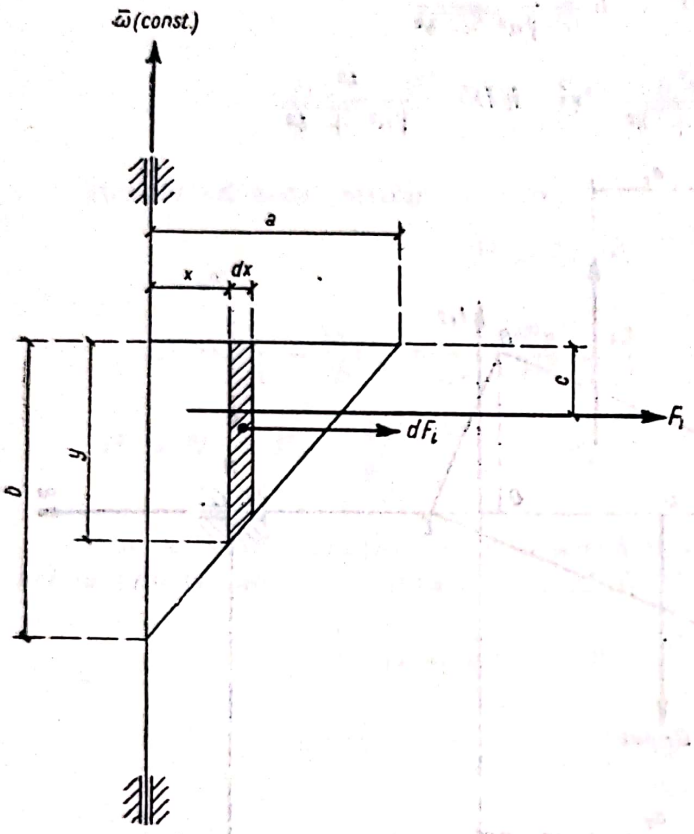


Fig. 33.26, *c*

$$\frac{a-x}{a} = \frac{y}{b},$$

de unde:

$$y = \frac{b(a-x)}{a},$$

masa fîșiei se poate deci scrie:

$$dm = \frac{pb(a-x)}{ga}dx;$$

toate punctele fîșiei fiind situate la aceeași distanță de axa de rotație vor avea aceeași accelerație, și anume numai accelerație normală întrucît $\omega = \text{const}$. Valoarea acestei accelerații este:

$$a = R\omega^2 = x\omega^2.$$

Forțele de inerție ale tuturor punctelor fîșiei vor fi paralele și egale. Se poate, deci, considera rezultanta lor ca forță de inerție a întregii fîșii. Această forță va fi aplicată în centrul fîșiei, deci la distanța $\frac{y}{2} = \frac{b(a-x)}{2a}$ de cateta a. Mărimea forței de inerție a fîșiei, elementare este:

$$dF_i = a\,dm = x\omega^2 \frac{pb(a-x)}{ga}dx,$$

$$dF_i = \frac{pb\omega^2}{ga}x(a-x)dx.$$

Forța de inerție totală a întregii plăci va fi suma forțelor de inerție ale tuturor fîșiilor din care se poate considera compusă placa, deci:

$$F_i = \int_0^a dF_i = \int_0^a \frac{pb\omega^2}{ga}x(a-x)dx = \frac{pb\omega^2}{ga}\int_0^a x(a-x)dx =$$

$$= \frac{pb\omega^2}{ga}\left|\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{pa^2b}{6g}\omega^2.$$

Pentru a afla linia de acțiune a forței de inerție F_i se aplică teorema lui Varignon în raport cu vîrful unghiului drept al plăcii.

Notînd cu C distanța de la linia de acțiune a forței F_i pînă la punctul în raport cu care se aplică teorema lui Varignon (vîrful unghiului drept) și ținînd seamă că linia de acțiune a forței dF_i se află la distanța $\frac{y}{2} = \frac{b\,(a-x)}{2a}$ de același punct, rezultă:

$$dF_i = \int_0^a \frac{y}{2}\, dF_i, \tag{1}$$

dar

$$\int_0^a \frac{y}{2}\, dF_i = \int_0^a \frac{b\,(a-x)}{2a} \cdot \frac{pb\omega^2}{ga}\, x\,(a-x)dx = \frac{pb^2\omega^2}{2ga^2}\int_0^a x\,(a-x)^2\, dx =$$

$$= \frac{pb^2\omega^2}{2ga^2}\left|\frac{x^2a^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right|_0^a = \frac{pb^2a^2\omega^2}{24g},$$

relația (1) se poate deci scrie:

$$c \cdot \frac{pa^2b^2}{6g}\,\omega^2 = \frac{pb^2a^2}{24g}\,\omega^2,$$

de unde rezultă:

$$c = \frac{b}{4}.$$

Să se aplice rezultatele aflate în cele două triunghiuri dreptunghice CDD' și DED (fig. 33.26, *d*). Se obțin valorile celor două forțe de inerție notate în figură F_{i1} și F_{i2} și distanțele y_1 și y_2 de la liniile lor de acțiune pînă la DD':

$$F_{i1} = \frac{p\overline{DD'}^2\overline{CD'}}{6g}\,\omega^2 = \frac{p\omega^2}{6g}\,\overline{DD'}^2 \cdot \overline{CD'}$$

$$F_{i1} = \frac{p\omega^2}{6g}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{pa^4b^2}{6g\,(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\,\omega^2$$

$$y_1 = \frac{\overline{CD'}}{4} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$F_{i2} = \frac{p\overline{DD'}\cdot\overline{D'E}}{6g}\,\omega^2 = \frac{p\omega^2}{6g}\,\overline{DD'}^2 \cdot \overline{D'E}$$

$$F_{i2} = \frac{p\omega^2}{6g}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{pa^2b^4}{6g\,(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\,\omega^2$$

$$y_2 = \frac{D'E}{4} = \frac{b^2}{4\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Pentru triunghiul EFF' forța de inerție va fi F_{i1} și pentru triunghiul CFF' va fi f_{i2} din figura 33.26, *a*.

Se vede în figură că forțele de inerție F_{i1} formează un cuplu cu brațul de pîrghie d_1 și forțele de inerție F_{i2} — un cuplu cu brațul de pîrghie d_2.

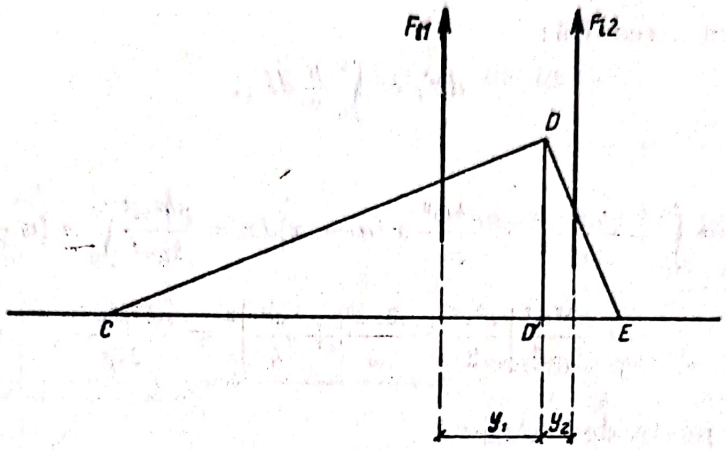


Fig. 33.26, *d*

Valorile lui d_1 și d_2 se pot calcula ușor în funcție de elementele geometrice aflate pînă acum.

$$d_1 = \overline{CE} - [\overline{CF'} + y_1 + \overline{D'E} + y_1] = \overline{CE} - 2(\overline{D'E} + y_1)$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - 2\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_1 = \frac{2(a^2 + b^2) - 4b^2 - a^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - 2b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_2 = \overline{CE} - [\overline{CF'} - y_2 + \overline{D'E} - y_2] = \overline{CE} - 2(\overline{D'E} - y_2)$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} - 2\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{b^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} - 2\frac{3b^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{3b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_2 = \frac{2(a^2 + b^2) - 3b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul, total al cuplelor forțelor de inerție este:

$$C_i = F_{i1}\, d_1 + F_{i2}\, d_2$$

$$C_i = \frac{pa^4b^2\omega^2}{6g\,(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2-2b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{pa^2b^4}{6g\,(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{2a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$C_i = \frac{pa^2b^2\omega^2}{12g\,(a^2+b^2)^2}\left[a^2\,(a^2-2b^2) + b^2\,(2a^2-b^2)\right];$$

$$C_i = \frac{pa^2b^2\,(a^4-b^4)}{12g\,(a^2+b^2)^2}\,\omega^2 = \frac{pa^2b^2\,(a^2-b^2)}{12g\,(a^2+b^2)}\,\omega^2.$$

Pentru a afla reacțiunile ce au în reazeme (cele două lagăre A și B) în timpul mișcării va trebui înlocuit cuplul forțelor de inerție cu un cuplu echivalent, având brațul de pîrghie egal cu distanța l dintre reazeme. Forța R_d a acestui cuplu echivalent va fi chiar reacțiunea care apare în reazeme datorită mișcării (reacțiune dinamică). Rezultă:

$$R_d \cdot l = C_i,$$

deci:

$$R_d = \frac{C_i}{l} = \frac{pa^2b^2\,(a^2-b^2)}{12lg\,(a^2+b^2)}\,\omega^2.$$

Liniile de acțiune (direcțiile) reacțiunilor dinamice R_d sînt liniile de intersecție dintre planul plăcii dreptunghiulare și planele perpendiculare pe axa de rotație, duse prin cele două reazeme.

Placa rotindu-se rezultă că direcțiile reacțiunilor dinamice sînt variabile.

Reacțiunile totale din reazeme vor fi egale cu rezultanta dintre reacțiunea statică și reacțiunea dinamică.

Desenînd cele două reacțiuni în planul lor (un plan perpendicular pe AB) se obține figura 33.26, *e*.

Unghiul α este variabil.

Din această figură rezultă că reacțiunea totală maximă din reazem va avea loc pentru $\alpha = 0°$ și va fi $R_d + R_s$ și reacțiunea totală minimă va avea loc pentru $\alpha = 180$ și va fi $R_d - R_s$. În problema noastră $R_s = \frac{G}{2} = \frac{pab}{2}$;

$$R_{max} = \frac{pa^2b^2\,(a^2-b^2)}{12lg\,(a^2+b^2)}\,\omega^2 + \frac{pab}{2}$$

$$R_{min} = \frac{pa^2b^2\,(a^2-b^2)}{12lg\,(a^2+b^2)}\,\omega^2 - \frac{pab}{2}.$$

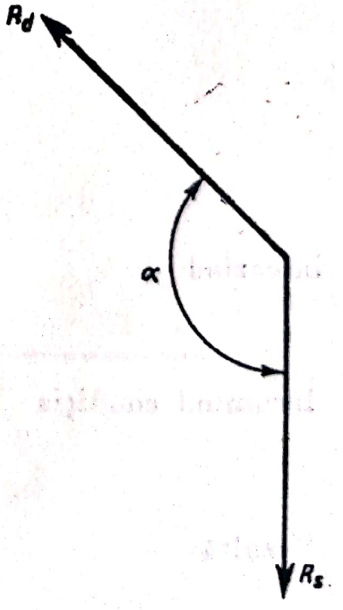


Fig. 33.26, *e*

33.27. O tijă omogenă AB, de lungime $2a$, are la capătul A o articulație care este pusă în mișcare pe o dreaptă orizontală Ox cu ajutorul unui fir prins de ea (fig. 33.27, *a*). Cu ce viteză trebuie mișcată articulația A, pentru ca tija să se rotească în jurul ei uniform, cu viteza unghiulară ω, în sensul acelor de ceasornic? Să se exprime viteza v în funcție de unghiul φ, dacă în momentul inițial $\varphi = \varphi_0$ și $v = 0$.

Rezolvare. Se izolează bara (v. fig. 33.27, *b*). Ea va fi în echilibru dinamic sub acțiunea forțelor:

$\bar{G}$ — greutatea proprie;

$\bar{H}$, $\bar{V}$ — componentele reacțiunii din articulație;

$F_1 = \frac{G}{g}$ $\bar{W}$ — forța de inerție din mișcarea de transport;

$F_2 = \frac{G}{g} a\,\omega$ — forța de inerție după direcția normalei din mișcarea relativă.

Se scrie ecuația de momente în raport cu A:

$$\frac{G}{g} W a \sin\varphi - G a \cos\varphi = 0$$

$$W \sin\varphi - g \cos\varphi = 0$$

$$W = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} \sin\varphi - g \cos\varphi = 0$$

$$dv = g \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} dt$$

$$dv = g \frac{\varphi \cos\varphi}{\varphi \sin\varphi} dt$$

$$\varphi = -\omega$$

$$dv = -\frac{g}{\omega} \cdot \frac{\varphi \cos\varphi}{\sin\varphi} dt$$

integrînd

$$v = \frac{g}{\omega} \ln \sin\varphi + C.$$

Însumînd condiția

$$t = 0 \begin{cases} v = 0 \\ \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Rezultă

$$C = \frac{g}{\omega} \ln \sin\varphi_0.$$

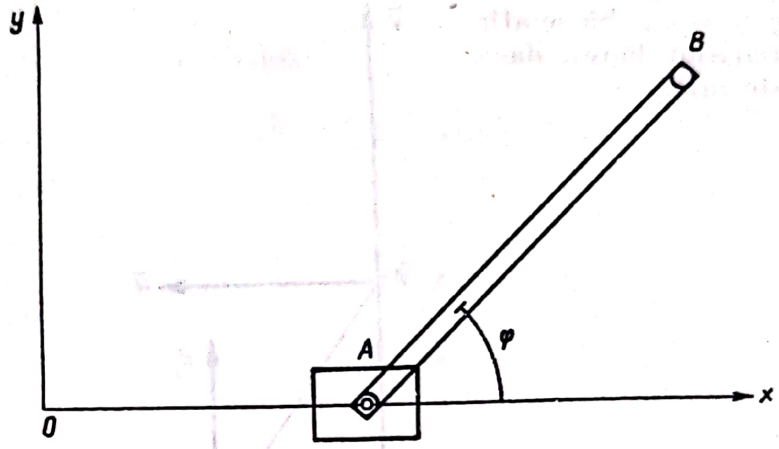


Fig. 33.27, *a*

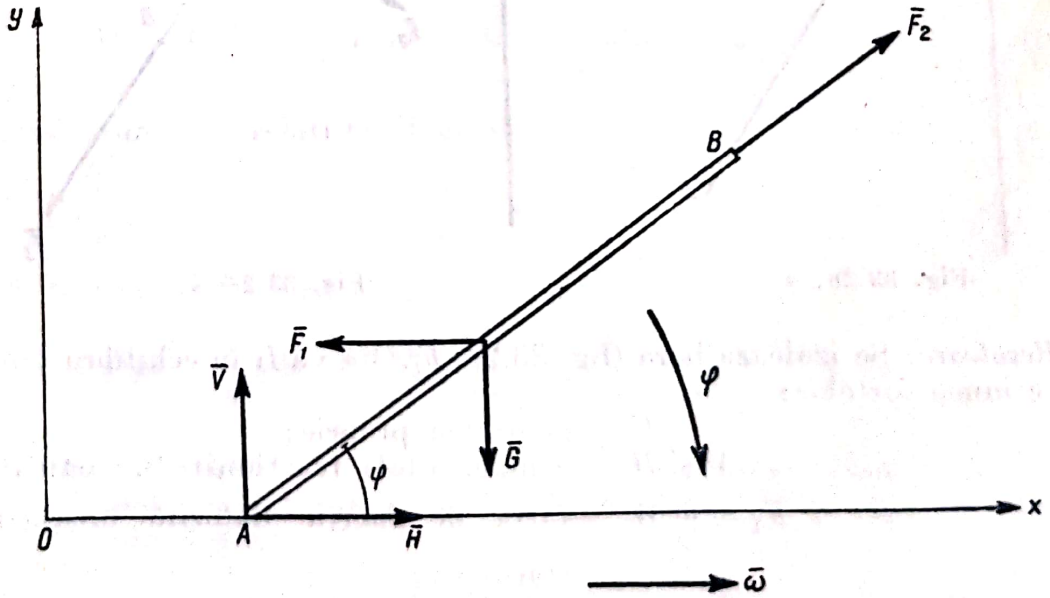


Fig. 33.27, *b*

33.28. O bară omogenă AB, de lungime $2a$, se poate roti în jurul articulației A, care alunecă în jos, pe o dreaptă fixă verticală, cu accelerația constantă $W < g$ (fig. 33.28, *a*). În momentul inițial bara se află în repaus și unghiul ei de înclinare față de verticală este $\varphi = \varphi_0$. Să se afle perioada oscilațiilor barei, dacă unghiul φ_0 este mic.

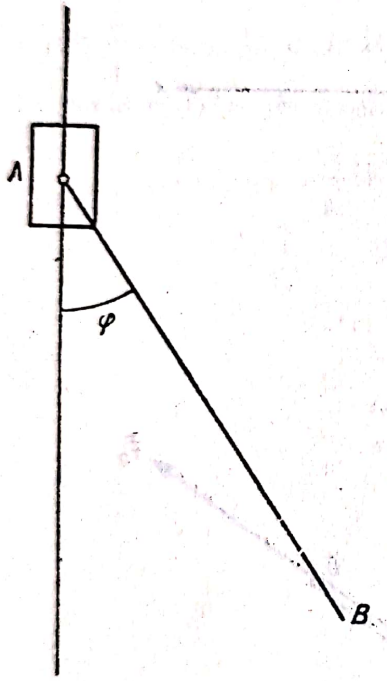


Fig. 33.28, *a*

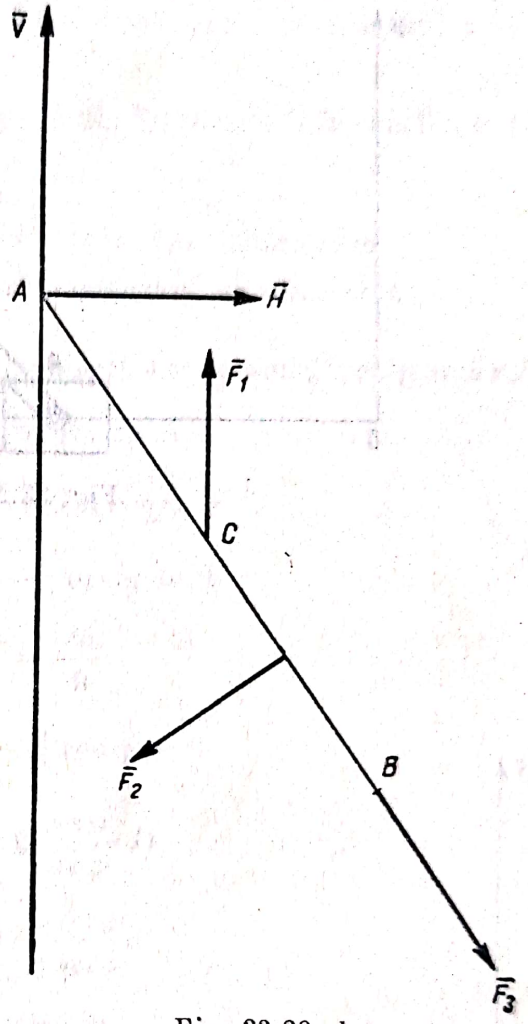


Fig. 33.28, *b*

Rezolvare. Se izolează bara (fig. 33.28, *b*). Ea va fi în echilibru dinamic sub acțiunea forțelor:

G — greutatea proprie;

V și H — componentele reacțiunii din articulație;

$F_1 = \frac{G}{g} W$ — forța de inerție datorită mișcării de transport;

$F_2 = \frac{G}{g} a\ddot{\varphi}$ și $F_3 = \frac{G}{g} a\dot{\varphi}^2$ — componentele normală și tangențială ale forței de inerție din mișcarea relativă.

Se scrie ecuația de momente în raport cu A:

$$\frac{G}{g} a \ddot{\varphi} \frac{4a}{3} + Ga \sin \varphi - \frac{G}{g} W a \sin \varphi = 0.$$

Simplificînd factorii constanți și înlocuind $\sin \varphi = \varphi$, întrucît unghiul φ este mic, se obține:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3\varphi}{4a}(g - W) \quad 0.$$

Comparînd cu ecuația pendulului:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

unde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

rezultă perioada:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{3(g - W)}}.$$

33.29. Peste un scripete fix trece un fir, la extremitățile căruia sînt suspendate greutățile Q : și $P_1P > Q$. Greutatea scripetelui este G și raza lui este r (fig. 33.29, *a*). Scripetele poate fi asimilat cu un disc. Să se afle accelerația greutăților.

Rezolvare. Se dă o deplasare virtuală sistemului și se introduc forțele date și forțele de inerție (fig. 33.29, *b*).

Lucrul mecanic virtual va fi:

$$\delta L = P \cdot \delta h - \frac{P}{g} a \delta h - Q \delta h - \frac{Q}{g} a \delta h - I_0 \, 2\delta\theta = 0.$$

Ținînd seamă de relațiile cinematice:

$$\delta\theta = \frac{\delta h}{r}; \text{ și } \varepsilon = \frac{a}{r},$$

expresia lucrului virtual devine:

$$P\delta h - \frac{P}{g} a \delta h - Q \delta h - \frac{Q}{g} \cdot a \delta h - I_0 \frac{a}{R} \cdot \frac{\delta h}{r} = 0.$$

Deplasarea virtuală δh este o mărime infinit mică, arbitrară dar diferită de zero, astfel că egalitatea poate fi împărțită cu δh și separînd accelerația a, expresia devine:

$$a\left[\frac{P}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{I}{r^2}\right] = P - Q.$$

Se obține:

$$a = \frac{P - Q}{P + Q + \frac{Ig}{r^2}} g.$$

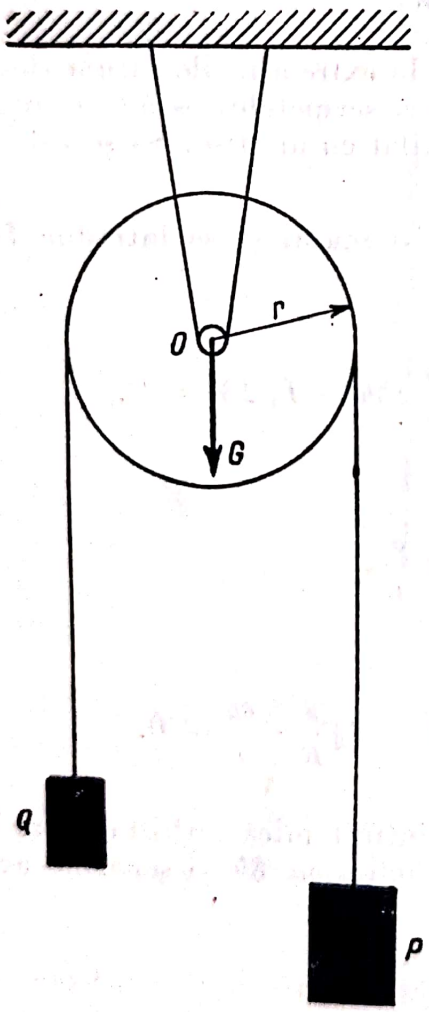


Fig. 33.29, *a*

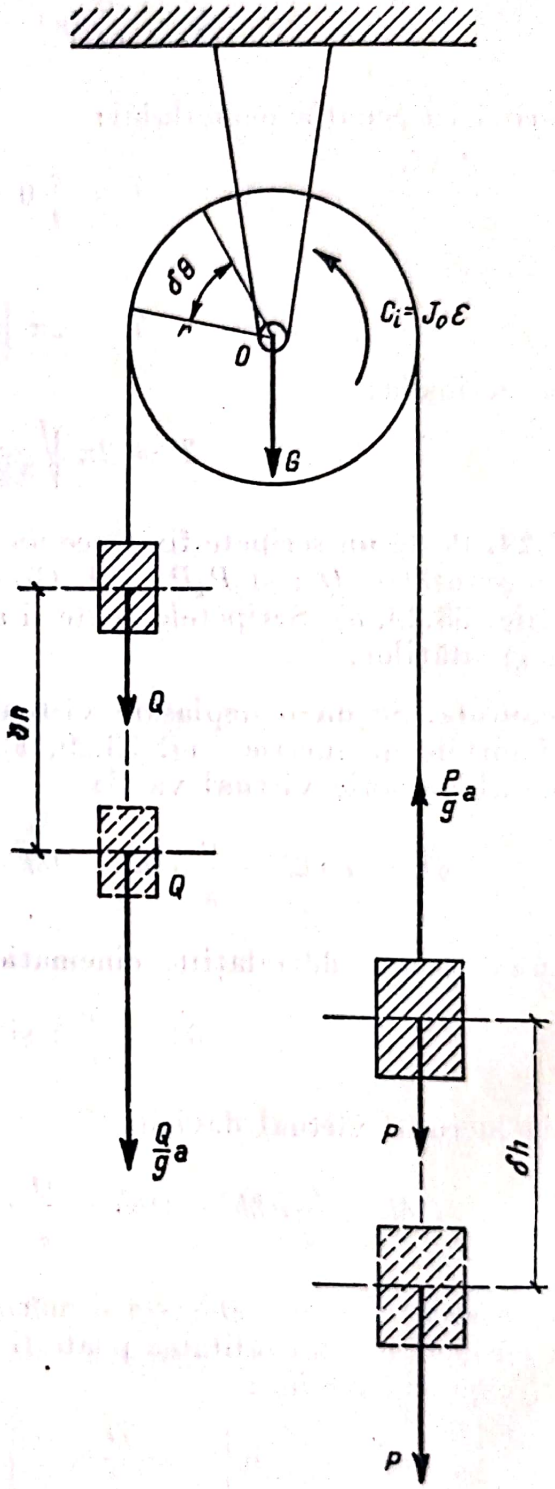


Fig. 33.29, *b*

33.30. O pană A cu unghiul α, de greutate P, se sprijină cu o parte, pe un perete vertical, și cu partea cealaltă, pe o prismă B de greutate Q, care poate aluneca fără frecare pe un plan orizontal fix (fig. 33.30, *a*). Să se afle accelerațiile penei și prismei.

Rezolvare. Se dă o deplasare virtuală sistemului și se introduc forțele date și forțele de inerție (fig. 33.30, *b*).

Lucrul virtual are expresia:

$$\delta L + P\delta h_1 - \frac{P}{g} a_1 \delta h_1 - \frac{Q}{g} a_2 \delta h_2 = 0.$$

Se observă că există o relație geometrică între deplasările celor două pene:

$$\delta h_2 = \delta h_1 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{și} \quad a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Expresia lucrului mecanic devine:

$$\delta L - \frac{P}{g} a_1 \delta h_1 - \frac{Q}{g} a_1 \operatorname{tg}^2 \alpha \delta h_1 = 0.$$

Se obține:

$$a_1 = \frac{P}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha} g \quad \text{și} \quad a_2 = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

33.31. Un fir este trecut peste un scripete fix și unul mobil, ca în figura 33.31, *a*. O extremitate a lui este legată fix și cealaltă susține o greutate P.

Se cunosc greutățile $P_1 G$ și greutățile și momentele de inerție ale scripeților F și Q, J_1 și J_2, precum și razele lor.

Să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Se dă o deplasare virtuală și se introduc, afară de forțele date, și forțele de inerție (fig. 33.31, *b*).

Lucrul mecanic virtual are expresia:

$$\delta L = P \cdot \delta h_1 - \frac{P}{g} a_1 \delta h_1 - J_1 \varepsilon_1 \delta \theta_1 - Q \delta h_2 - \frac{Q}{g} a_2 \delta h_2 -$$

$$- J_2 \varepsilon_2 \delta \theta_2 - G \delta h_2 - \frac{G}{g} a_2 \delta h_2 = 0.$$

Trebuie ținut seamă de următoarele relații cinematice:

$$\delta h_2 = \frac{\delta h_1}{2}; \quad \delta \theta_1 = \frac{\delta h_1}{r}; \quad \delta \theta_2 = \frac{\delta h_1}{2r};$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}; \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}.$$

Scanned with OKEN Scanner

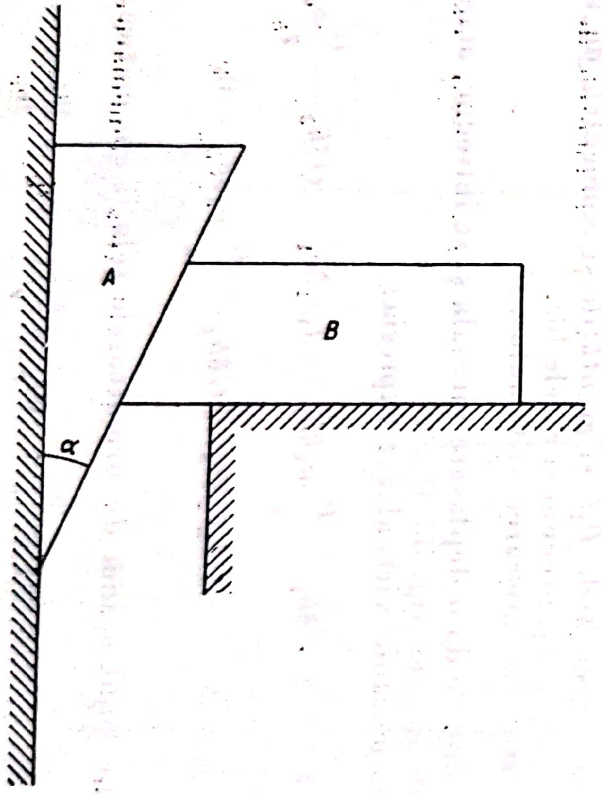


Fig. 33.30, *a*

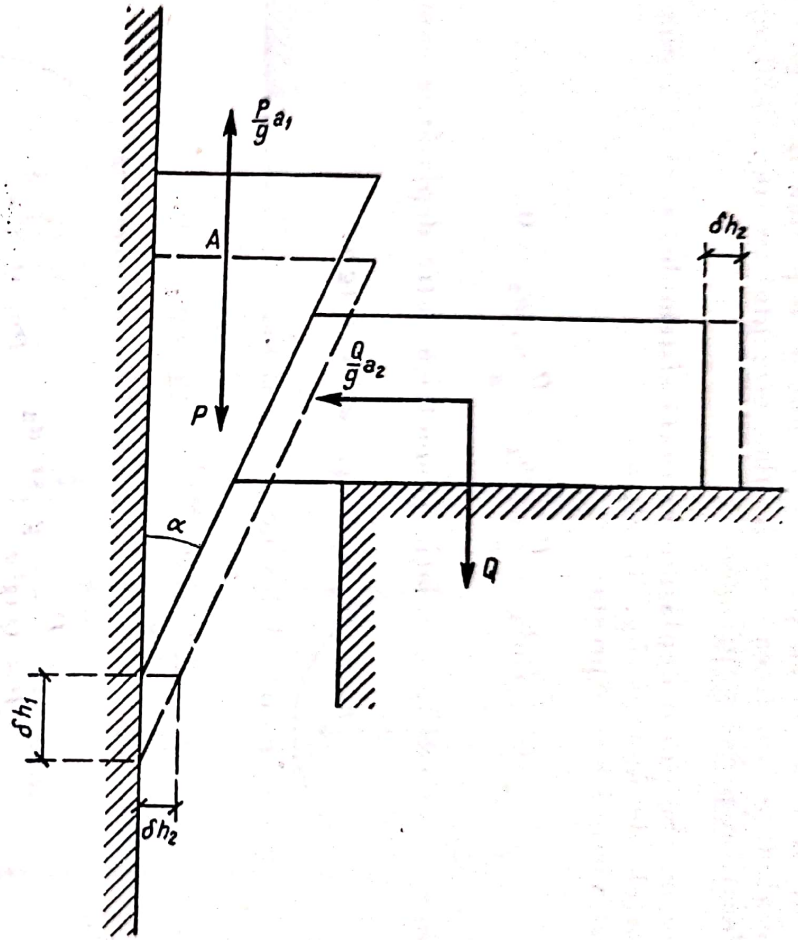


Fig. 33.30, *b*

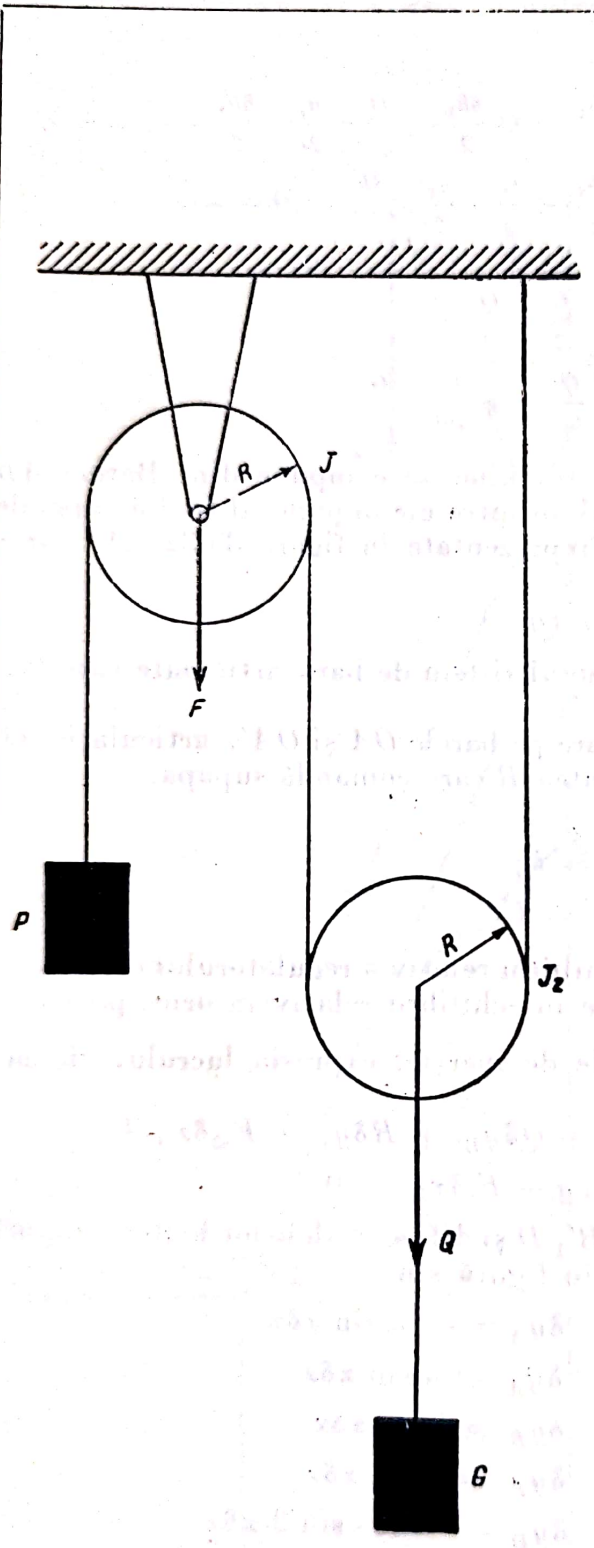


Fig. 33.31, *a*

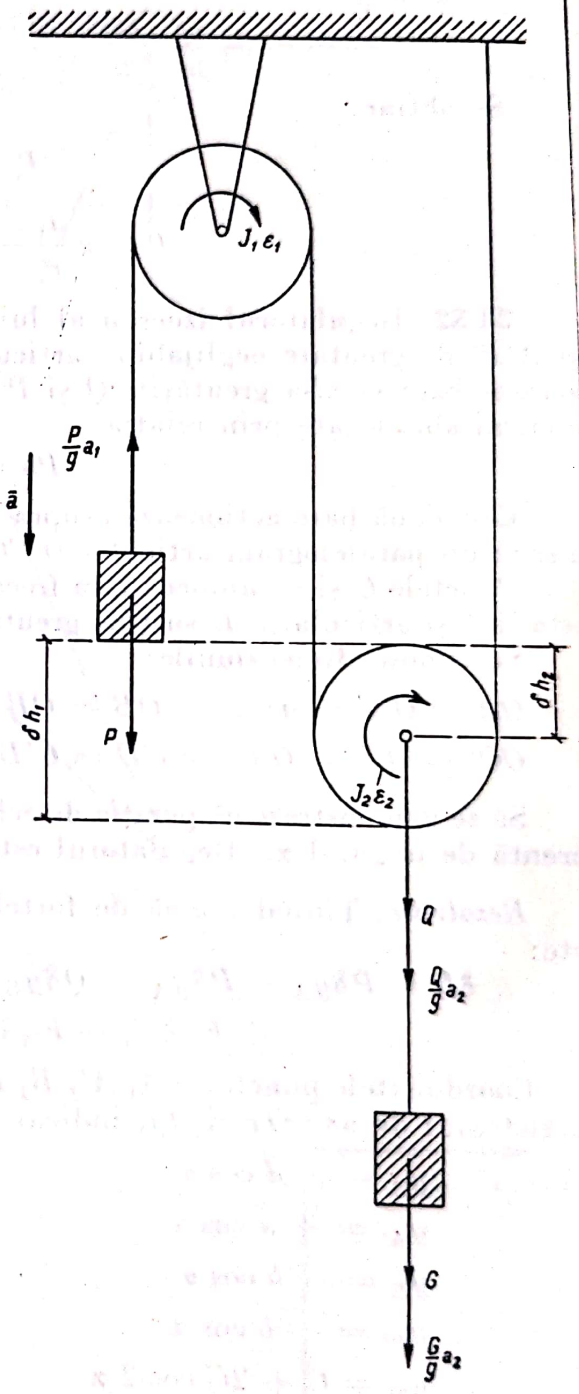


Fig. 33.31 *b*

Scanned with OKEN Scanner

Expresia lucrului virtual devine:

$$P\delta h_1 - \frac{P}{g} a_1 \delta h_1 - J_1 \frac{a_1}{r} \frac{\delta h_1}{r} - Q \frac{\delta h_1}{2} - \frac{Q}{g} \cdot \frac{a_1}{2r} \cdot \frac{\delta h_1}{2} -$$
$$- J_2 \frac{a_1}{2r} \cdot \frac{\delta h_1}{2r} - G \frac{\delta h_1}{2} - \frac{G}{g} \cdot \frac{a_1}{2} \cdot \frac{\delta h_1}{2} = 0$$

Se obține:

$$a_1 = \frac{P - \frac{G}{2} - \frac{Q}{2}}{P + g \frac{J_1}{r^2} + \frac{Q}{4r} + g \frac{J_2}{4r^2} + \frac{G}{4}} g$$

33.32. Regulatorul izocron al lui Rankine se compune din: Barele AB și $A'B'$ de greutate neglijabilă, articulate între ele în punctul O. La capetele acestor bare se află greutățile Q și P reprezentate în figura 33.32, ale căror mărimi sînt legate prin relația:

$$Pa = Qb.$$

Cele două bare acționează asupra unui sistem de bare articulate care formează un paralelogram articulat $O'CC'D$.

Punctele C și C' alunecă fără frecare pe barele OA și OA', articulația O' este fixă și articulația D susține greutatea R care comandă supapa.

Se cunosc dimensiunile:

$$OA = OA' = a; \qquad OB = OB = b;$$
$$OO' = O'C = O'C' = CD = C'D' = C.$$

Să se demonstreze că poziția de echilibru relativ a regulatorului este indiferentă de unghiul α. (Regulatorul este în echilibru relativ în orice poziție).

Rezolvare. Ținînd seamă de forțele de inerție, expresia lucrului virtual este:

$$\delta L = P\delta y_A + P\delta y_{A'} + Q\delta y_B + Q\delta y_{B'} + R\delta y_D + F_{i2}\delta x_A +$$
$$+ F_{i2}\delta x'_A + F_{i1}\delta x_B + F_i \delta x_{B'} = 0.$$

Coordonatele punctelor $A_1\, A'_1\, B_1\, B'_1\, D$ și diferențialele lor luate în raport cu sistemul de axe Ox și Oy, indicat în figură sînt:

$$y_A = + a \cos \alpha \qquad \delta y_A = - a \sin \alpha \delta\alpha$$
$$y_{A'} = + a \cos \alpha \qquad \delta y_{A'} = a \sin \alpha \delta\alpha$$
$$y_B = - b \cos \alpha \qquad \delta y_B = b \sin \alpha \delta\alpha$$
$$y_{B'} = - b \cos \alpha \qquad \delta y_{B'} = b \sin \alpha \delta\alpha$$
$$y_D = C + 2C \cos 2\alpha \qquad \delta y_D = - 4c \cdot \sin 2\alpha \delta\alpha$$
$$y_A = a \sin \alpha \qquad \delta y_A = a \cos \alpha \delta\alpha$$
$$x_{A'} = - a \sin \alpha \qquad \delta x_{A'} = - a \cos \alpha \delta\alpha$$
$$x_B = - b \sin \alpha \qquad \delta x_B = - b. \sin \alpha \delta\alpha$$
$$x_{B'} = b \sin \alpha \qquad \delta x_{B'} = b \cos \alpha \delta\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

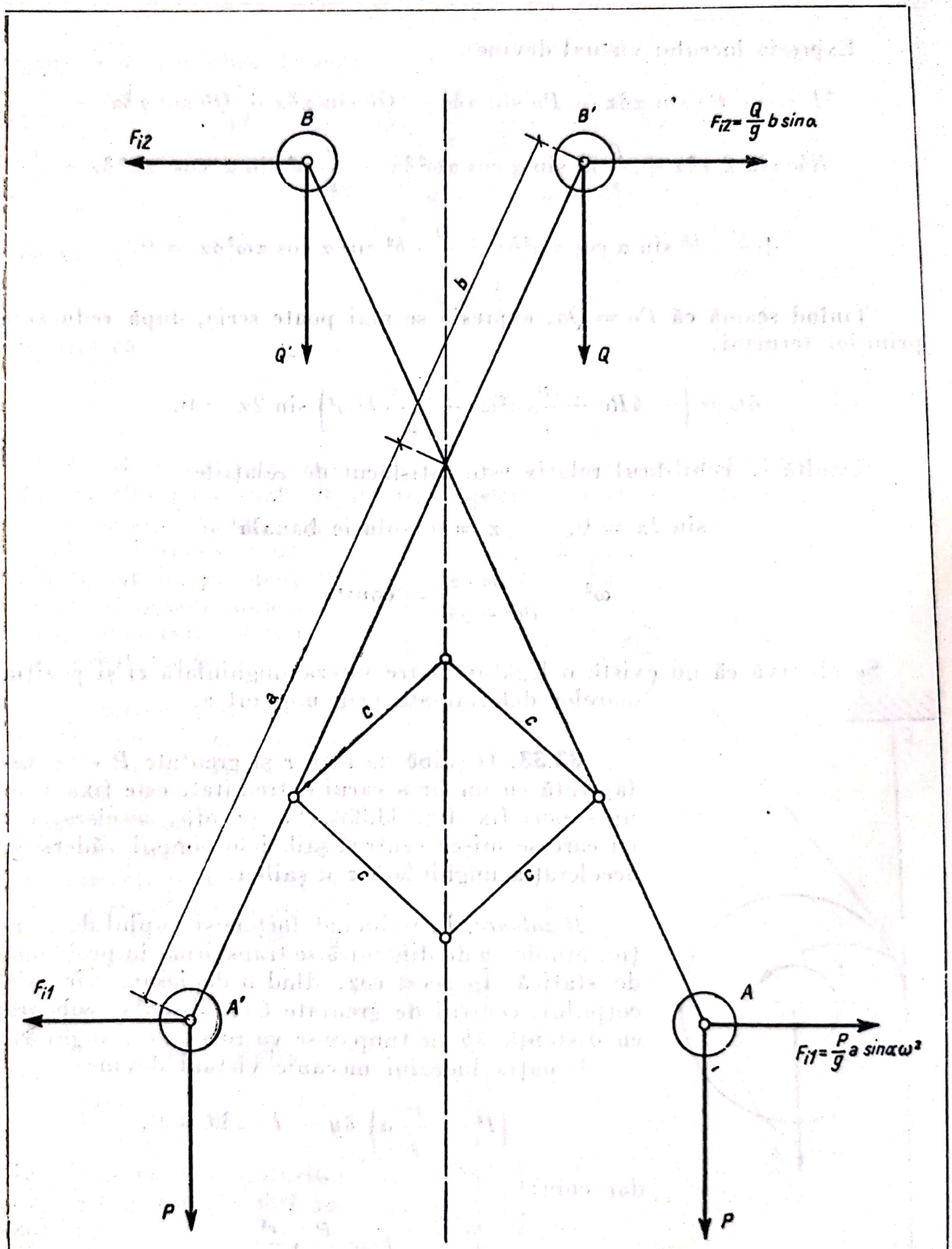

B
B'
F_{i2}
$F_{i2}=\frac{Q}{g}b\sin\alpha$
Q'
Q
b
a
c
c
c
c
F_{i1}
A'
A
$F_{i1}=\frac{P}{g}a\sin\alpha\omega^2$
P
P

Fig. 33.32

Expresia lucrului virtual devine:

$$\delta L = -Pa \sin \alpha \delta\alpha - Pa \sin \alpha \delta\alpha + Qb \sin \alpha \delta\alpha + Qb \sin \alpha \delta\alpha -$$

$$- R4c \sin 2\alpha \delta\alpha + \frac{P}{g} a^2 \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 \delta\alpha + \frac{P}{g} a^2 \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 \delta\alpha +$$

$$+ \frac{Q}{g} \cdot b^2 \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 \delta\alpha + \frac{Q}{g} \cdot b^2 \sin \alpha \cos \alpha \omega^2 \delta\alpha = 0.$$

Ținînd seamă că $Pa = Qa$, expresia se mai poate scrie, după reducerea primilor termeni:

$$\delta L = \left(-4Rc + \frac{P}{g} a^2 \omega^2 + \frac{Q}{g} \cdot b^2 \omega^2 \right) \sin 2\alpha = 0.$$

Rezultă că echilibrul relativ este satisfăcut de relațiile:

$$\sin 2\alpha = 0, \qquad \alpha = 0 \text{ (soluție banală)}$$

$$\omega^2 = \frac{4\, Rc \cdot g}{Pa^2 + Qb^2} = \text{const.}$$

Se observă că nu există o legătură între viteza unghiulară ω și poziția barelor determinată prin unghiul α.

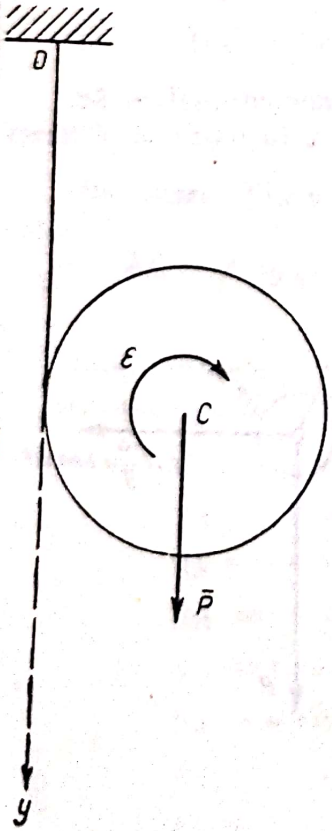


Fig. 33.33

33.33. O șaibă de rază r și greutate P este înfășurată cu un fir a cărui extremitate este fixată de un suport fix (fig. 33.33). Să se afle accelerația a cu care se mișcă centrul șaibei în timpul căderii și accelerația unghiulară ε a șaibei.

Rezolvare. Introducînd forțele și cuplul de inerție, problema de dinamică se transformă în problemă de statică. În acest caz, dînd o deplasare virtuală corpului, centrul de greutate C al discului coboară cu distanță δy în timp ce se va roti cu un unghi $\delta\theta$.

Ecuația lucrului mecanic virtual devine:

$$\left(P - \frac{P}{g} a \right) \delta y - I \cdot \varepsilon \delta\theta = 0,$$

dar cum:

$$I = \frac{P}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$$

pentru disc și

$$2\delta y = r\delta\theta, \qquad \text{și } 2a = r \cdot \varepsilon,$$

ecuația de echilibru devine:

$$\left(P - \frac{P}{g}a\right)\delta y - \frac{P}{g}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\frac{2a}{r}\cdot\frac{2}{r}\delta y = 0$$

$$P - \frac{P}{g}a - 2\frac{P}{g}a = 0,$$

de unde

$$a = \frac{g}{3},$$

rezultă că

$$\varepsilon = \frac{2a}{r} = \frac{2g}{3r}.$$

33.34. Se dă dispozitivul de ridicat din figură, unde J_1, J_2, J_3 și R_1, R_2, R_3 sînt momentele de inerție respectiv razele scripeților *I*, *II* și *III*. (fig. 33,34). Asupra scripetelui *I* acționează un cuplu motor de moment M; se cere să se determine accelerația a cu care va fi ridicată greutatea Q.

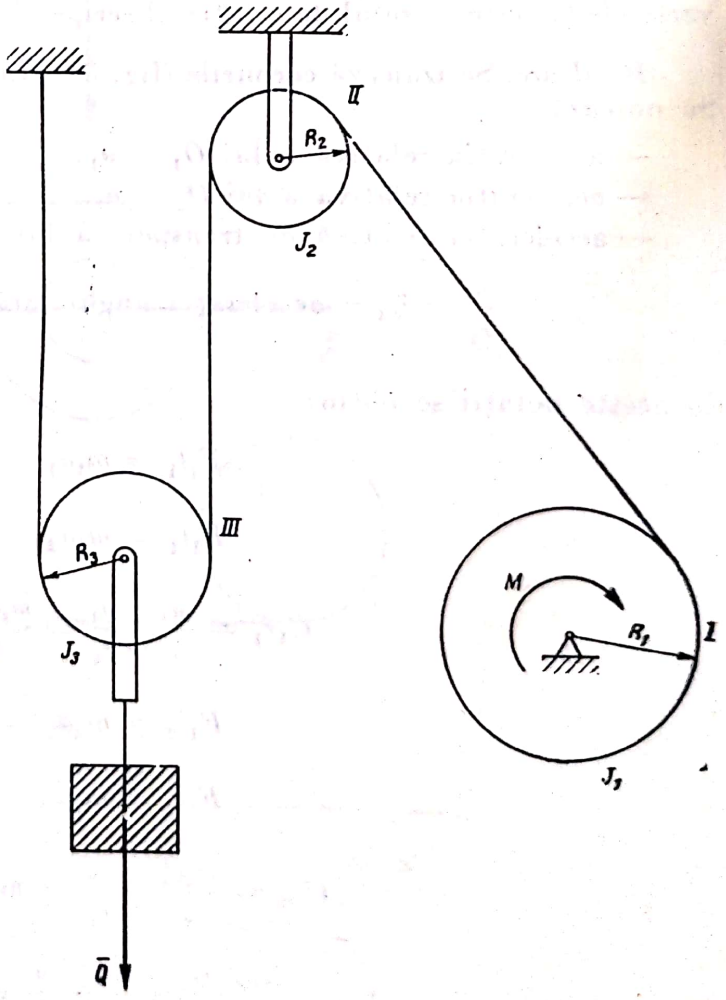


Fig. 33.34

Rezolvare. Procedînd ca în problema precedentă și notînd cu ε_1, ε_2, ε_3; $\delta\theta_1$; $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ accelerațiile unghiulare și deplasările virtuale unghiulare ale celor trei scripeți și cu δy deplasarea virtuală a greutății Q, ecuația lucrului mecanic virtual devine:

$$(M - J_1\varepsilon_1)\cdot\delta\theta_1 - J_2\varepsilon_2\cdot\delta\theta_2 - J_3\varepsilon_3\delta\theta_3 - \left(Q - \frac{Q}{g}a\right)\delta y = 0,$$

însă din cauza legăturilor cu cablul inextensibil rezultă:

$$R_1\delta\theta_1 = R_2\cdot\delta\theta_2 = R_3\delta\theta_3 = 2\,\delta y$$

$$R_1\varepsilon_1 = R_2\varepsilon_2 = R_3\varepsilon_3 = 2a.$$

Înlocuind pe $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ în funcție de δy și pe ε_1, ε_2, ε_3 în funcție de a, și simplificînd cu δy, se obține:

$$\left(M - J_1 \frac{2a}{R_1}\right) \cdot \frac{2}{R_1} - J_2 \cdot \frac{2a}{R_2} \cdot \frac{2}{R_2} - J_3 \cdot \frac{2a}{R_3} \cdot \frac{2}{R_3} - \left(Q - \frac{Q}{g}a\right) = 0,$$

de unde:

$$a = \frac{\frac{2M}{R_1} - Q}{4\left(\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_3}{R_3^2}\right) - \frac{Q}{g}}.$$

33.35. Două șaibe M_1 și M_2 de mase m_1 și m_2 cu raze r_1 și r_2 sînt înfășurate de un fir, care trece peste un scripete M_3 de masă m_3 și rază r_3 care se rotește fără frecare în jurul unei axe fixe O (fig. 33.35,*a*). Să se afle accelerația unghiulară φ a scripetelui și accelerațiile centrelor celor două șaibe, presupunînd că firul nu alunecă pe scripete și că centrele celor două șaibe se mișcă pe drepte verticale (φ_3 este unghiul de rotație al scripetelui).

Rezolvare. Se izolează corpurile (fig. 33.35,*b*).
Se notează:

— accelerația relativă a lui $O_1 = a_1$;
— accelerația relativă a lui $O_2 = a_2$;
— accelerația relativă de transport a lui O_1 și $O_2 = a$;

$$\frac{a}{r_3} = \ddot{\varphi}_3 = \text{accelerația unghiulară a scripetelui.}$$

Cu aceste notații se obțin:

$$F_i t_1 = m_1 a_1$$

$$F_1 t_1 = m_1 a_2$$

$$C_1 r_1 = \frac{m_1}{2} \cdot \frac{a_1}{r_1} = \frac{m_1 a_1 r_1}{2}$$

$$F_1 i_2 = m_2 a_2$$

$$F_1 i_2 = m_2 a$$

$$C_{ir2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{a_2}{r_2} = m_2 a_2 r_2$$

$$C_{i3} = \frac{m_3 r_3^2 \varphi}{2} = \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a}{r_3} = \frac{m_3 r_3 a}{2}$$

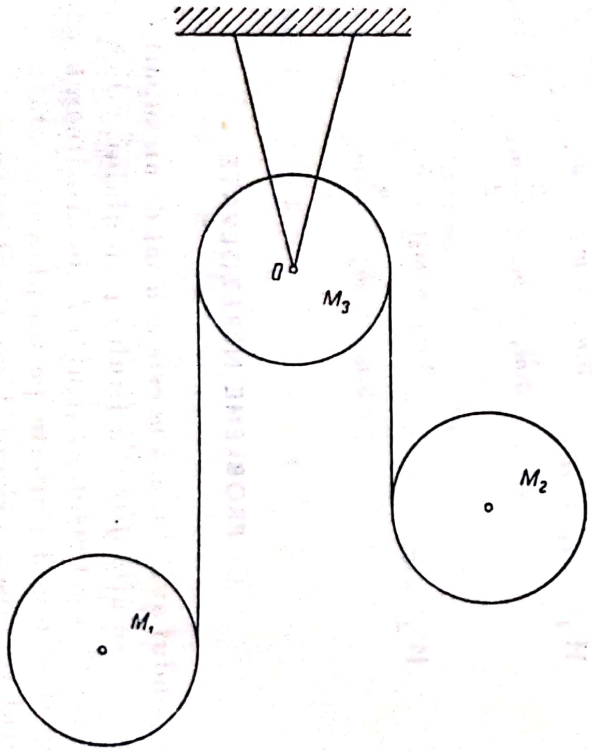
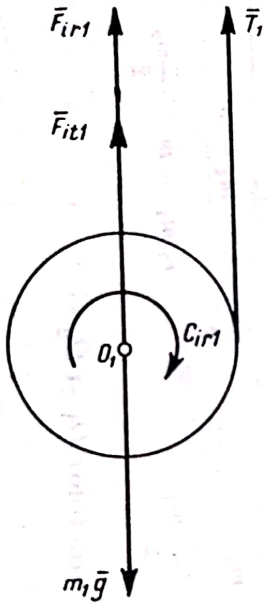
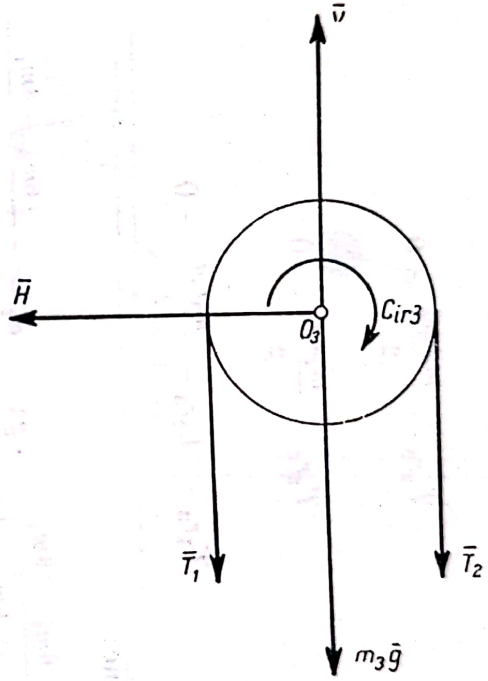


Fig. 33.35, *a*





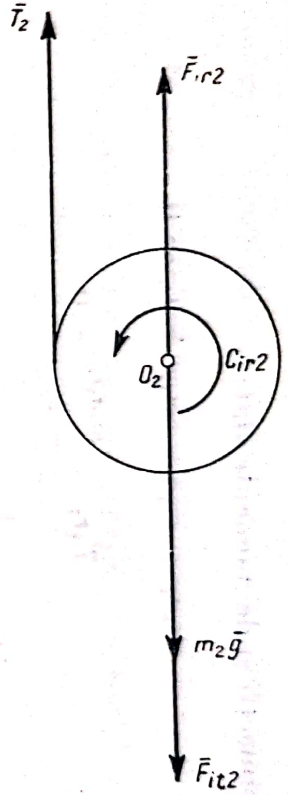


Fig. 33.35, *b*

Ecuațiile de proiecții și de momente sînt:

$$m_1 a_1 = m_1 a - m_1 g + T_1 = 0$$

$$T_1 r_1 - \frac{m_1 a_1 r_1}{2} = 0$$

$$m_2 a_2 - m_2 a - m_2 g + T = 0$$

$$T_2 r_2 - \frac{m_2 a_2 r_2}{2} = 0$$

$$T_2 r_2 - \frac{m_2 a_2 r_2}{2} = 0$$

$$T_1 r_3 - T_2 r_3 - \frac{m_3 r_3 a}{2} = 0$$

Rezolvînd se obține:

$$a_1 = \frac{6m_3 + 8m_2}{9m_3 + 6m_1 + 6m_2} \cdot g; \qquad a_2 = \frac{6m_3 + 8m_1}{9m_3 + 6m_1 + 6m_2} \cdot g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{3}{2} m_3} \cdot g; \qquad \ddot{\varphi} = \frac{m_1 - m_2}{r_3 (m_1 + m_2 + \frac{3}{2} m_3)} \cdot g$$

Accelerațiile absolute ale punctelor O_1 și O_2 sînt:

$$W_1 = a_1 + a = \frac{3(m_1 + m_3) + m_2}{3(m_1 + m_2 + \frac{3}{2} m_3)} g$$

$$W_2 = a_2 - a = \frac{3(m_2 + m_3) + m_1}{3(m_1 + m_2 + \frac{3}{2} m_3)} \cdot g$$

C. PROBLEME NEREZOLVATE

33.36. Un pendul avînd masa m este atîrnat de un suport fixat de un cărucior (fig. 33.36). Să se afle direcția firului pendulului, adică unghiul α dintre fir și verticală, precum și tensiunea firului T, în următoarele cazuri:

a) căruciorul se mișcă uniform pe un plan orizontal;

b) căruciorul se mișcă orizontal cu accelerația a;

c) căruciorul coboară liber pe un plan înclinat, care formează unghiul φ cu orizontala;

d) căruciorul este împins cu o accelerație oarecare b, orientată de-a lungul planului înclinat;

e) căruciorul coboară cu aceeași accelerație pe planul înclinat.

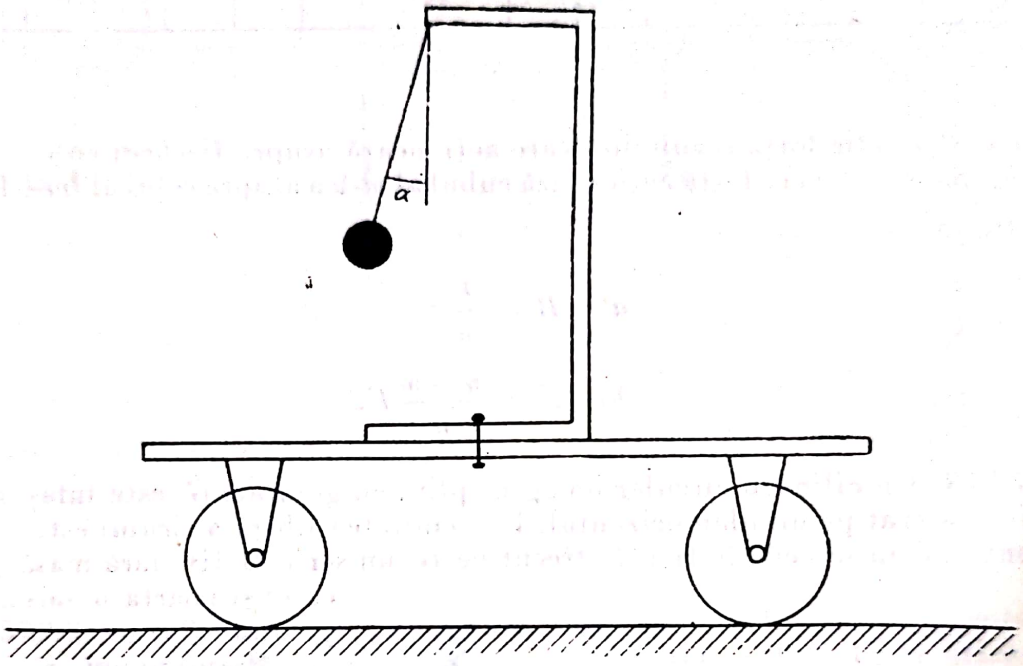


Fig. 33.36

Răspuns:

Cazul a) $\alpha = 0; \quad T = mg.$

Cazul b) $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{g}; \quad T = m\sqrt{a^2 + g^2}.$

Cazul c) $\alpha = -\varphi; \quad T = mg\cos\varphi.$

Cazul d) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g\cos\varphi} + \operatorname{tg}\alpha;$

$T = m\sqrt{b^2 + g^2 + 2bg\sin\alpha}.$

Cazul e) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{g\cos\varphi} - \operatorname{tg}\alpha;$

$T = m\sqrt{b^2 + g^2 - 2bg\sin\alpha}.$

33.37. Pe o scîndură se află un corp. Coeficientul de frecare între scîndură și corp este 0,1. Ce accelerație trebuie comunicată scîndurii în direcție orizontală, pentru ca să alunece corpul de pe ea.

Răspuns: $a = 0{,}98\ \text{m/s}^2.$

33.38. Pe un plan orizontal neted se află n cuburi egale avînd fiecare greutatea G. O forță constantă F acționează asupra primului cub în sensul indicat de săgeată (fig. 33.38).

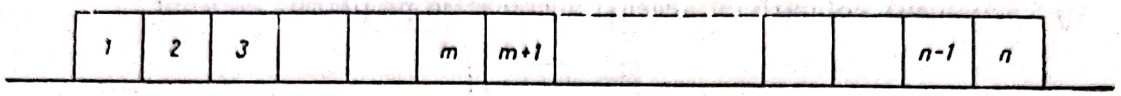


Fig. 33.38

a) Să se afle forța rezultantă care acționează asupra fiecărui cub.
b) Să se afle cu ce forță acționează cubul al m-lea asupra celui al $(m+1)$-lea.

Răspuns:

$$a)\quad R = \frac{F}{n};$$

$$b)\quad N = \frac{n-m}{n}F.$$

33.39. Un cilindru circular omogen, plin, cu greutate G, este înfășurat cu un fir și așezat pe un plan orizontal. Extremitatea liberă a firului este întinsă orizontal, cum se vede în figură, trecut peste un scripete fix (fără masă și frecare) și poartă o sarcină de greutate P (fig. 33.39).

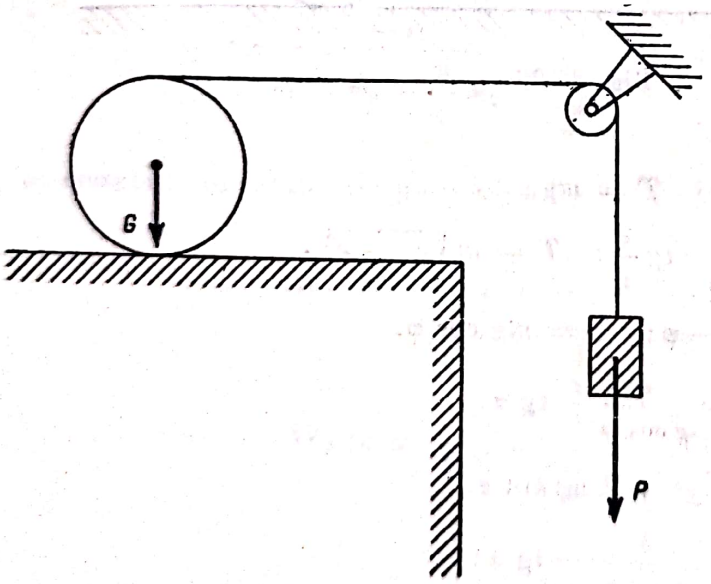


Fig. 33.39

Presupunînd că cilindrul se rostogolește fără să alunece, să se afle accelerația a_1 a centrului de greutate al cilindrului, accelerația a_2 a sarcinii și tensiunea T a firului. Se neglijează frecarea de rostogolire și rezistența aerului.

Răspuns:

$$a = \frac{P}{P + \frac{3}{8}G} \cdot g, \quad a_2 = \frac{a}{2}$$

$$T = \frac{3}{8} \cdot \frac{G}{g} a = \frac{P \cdot G}{\frac{8}{3}P + G}.$$

33.40. Trei greutăți F, G, Q așezate pe o masă orizontală aspră, coeficientul de frecare fiind μ, sînt legate între ele prin cîte un fir.

Ultima greutate Q este legată cu un fir care trece peste un scripete, de greutate neglijabilă, la capătul firului fiind agățată greutatea P (fig. 33.40).

Să se determine accelerația de mișcare a sistemului și tensiunile din fir.

Răspuns:

$$a = \frac{P - G - Q - F}{P + Q + G + F} g.$$

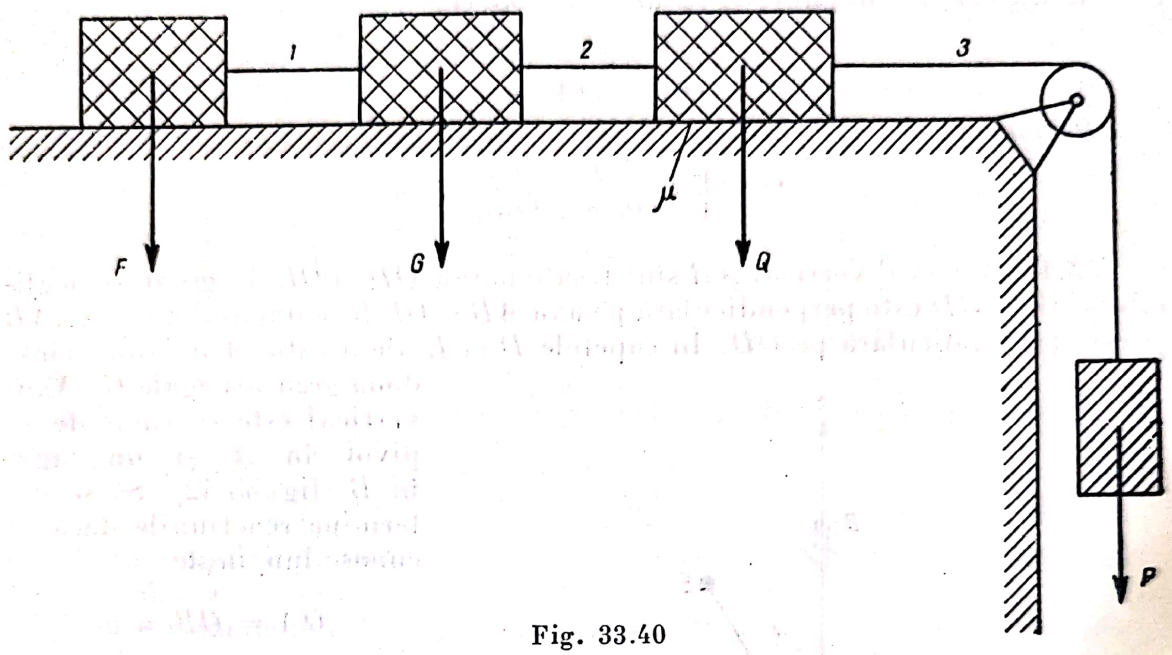


Fig. 33.40

33.41. Un regulator se compune din două discuri cilindrice de greutate P_1 fiecare, prinse prin articulații excentrice de capetele a două brațe orizontale, solidare cu axul vertical care se rotește cu viteză unghiulară constantă. Lungi-

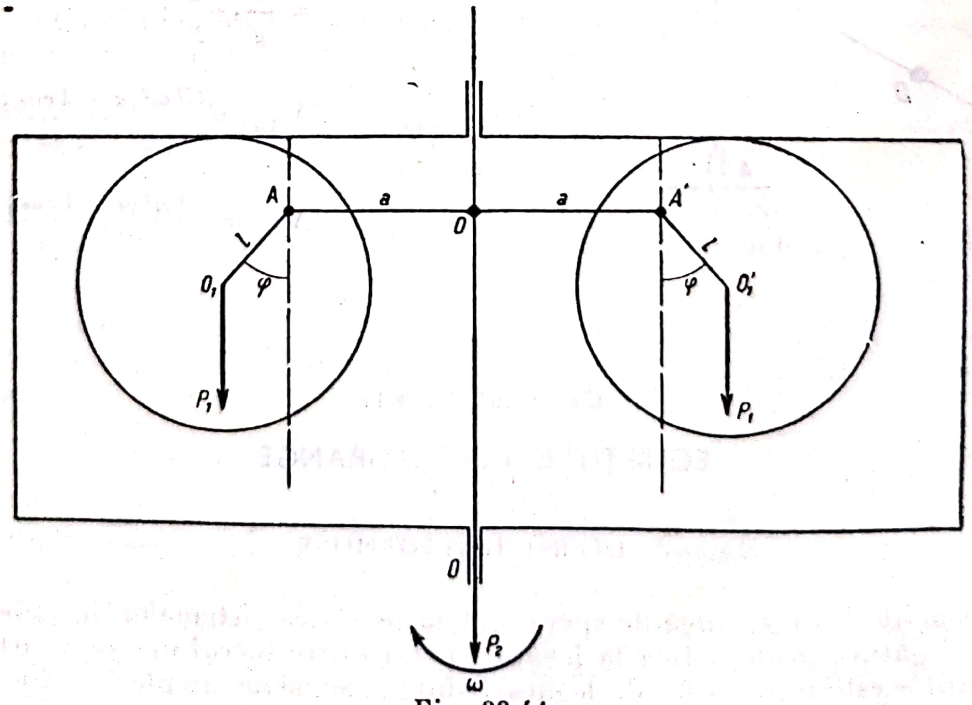


Fig. 33.41

mea braţelor este a. Discurile sînt prinse în articulaţii excentric, excentricitatea fiind l. Aceste discuri susţin o carcasă a cărei greutate este P_2. Să se afle viteza unghiulară pentru care razele discurilor care unesc centrele discurilor cu articulaţiile fac unghiul φ, ca în figura 33.41:

$$O_1A = O'A' = l;$$
$$OA = OA' = a.$$

Răspuns:

$$\dot{\omega} = \sqrt{g \frac{2P_1 + P_2}{2P_1(a + l\sin\varphi)} \operatorname{tg}\varphi}.$$

33.42. De axul vertical AB sînt fixate barele OD şi OE de greutate neglijabilă. Bara OD este perpendiculară pe axa AB şi OE face unghiul φ cu axa AB şi este perpendiculară pe OD. În capetele D şi E ale acestor bare sînt prinse două greutăţi egale G. Axul vertical este susţinut de un pivot în A şi un lagăr în B (fig. 33.42). Să se determine reacţiunile dacă se cunosc lungimile:

$$OA = OB = a$$

şi

$$OD = OE = l.$$

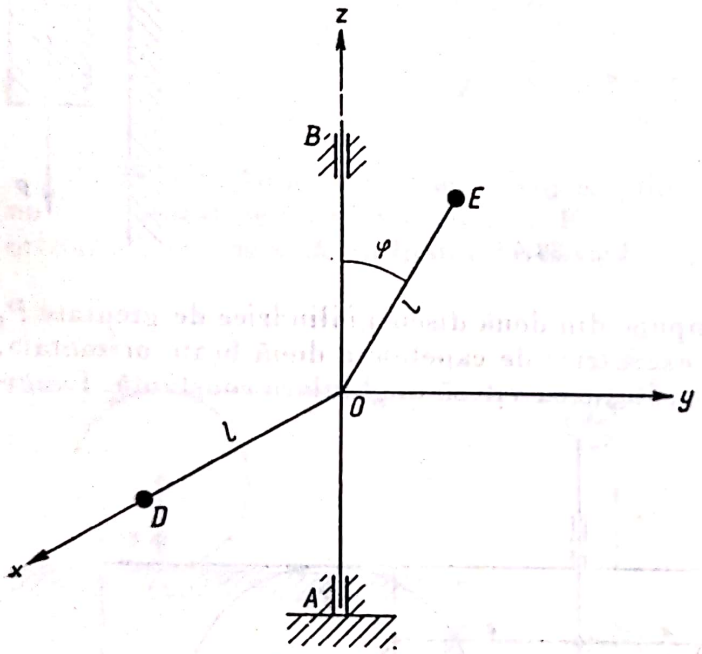


Fig. 33.42

Răspuns: $N_{Ax} = N_{Bx} = \frac{G}{g} \cdot \frac{l\omega^2}{2}$;

$$N_{Ay} = \frac{Gl\omega^2(a - l\cos\varphi\sin\varphi)}{2ga};$$

$$N_{By} = \frac{Gl\omega^2(a + l\cos\varphi\sin\varphi)}{2ga}.$$

Capitolul XXXIV

ECUAŢIILE LUI LAGRANGE

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua se aplică sistemelor de puncte supuse la legături *ideale*, adică la legături pentru care lucrul mecanic virtual al reacţiunilor este nul. Astfel de legături sînt: rezemările simple fără frecare de alunecare, articulaţiile fără frecare, legăturile corpurilor care se rostogolesc

fără să alunece (dacă se neglijează efectul frecării de rostogolire), legăturile rigide ale sistemelor de puncte materiale (solidul rigid), legăturile cu fire flexibile și inextensibile etc.

Un sistem de puncte (A_i) este supus la legături dacă deplasările reale $d\bar{r}_i = dx_i\bar{i} + dy_i\bar{j} + dz_i\bar{k}$ ale punctelor sistemului satisfac relații de forma:

$$\sum_i (P_{li}\, dx_i + Q_{li}\, dy_i + R_{li}\, dz_i) + T_l\, dt = 0 \quad (l = 1,2,\ldots,\ m), \tag{34.1}$$

unde P_{li}, Q_{li}, R_{li}, T_l sînt funcții de coordonatele punctelor A_i (x_i, y_i, z_i) și de timpul t.

Legăturile se numesc *olonome* dacă relațiile (34.1) sînt niște diferențiale totale exacte, deci se pot pune sub forma întreagă:

$$f_l(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{34.2}$$

m fiind numărul de legături ale sistemului.

Dacă legăturile sînt *scleronome* (fixe), relațiile (34.1) și (34.2) nu depind explicit de timp, adică $T_l = 0$, și:

$$f_l(x_i, y_i, z_i) = 0. \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{34.2'}$$

Dacă depind explicit de timp, ele se numesc *reonome*, legăturile fiind mobile (cazul mișcării relative).

Fie un sistem de puncte (A_i) cu h grade de libertate supus la legături olonome (scleronome sau reonome). Vectorii de poziție ai punctelor A_i sînt de forma:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_h, t), \tag{34.3}$$

unde q_k, $(k = 1, 2, \ldots, h)$ sînt *coordonatele generalizate*, adică parametrii care definesc poziția sistemului la un moment dat. Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru acest sistem sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_K \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \tag{34.4}$$

unde:

$$E = E(q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_h, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{34.5}$$

este energia cinetică a sistemului, un polinom de gradul al doilea în $\dot{q}_k$ (în cazul legăturilor scleronome este un polinom omogen, adică o formă cvadratică în $\dot{q}_k$), iar:

$$Q_k = \sum_i \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, h) \tag{34.6}$$

este forța generalizată, $\bar{F}_i$ fiind *forțele efectiv aplicate* sistemului.

În ecuația (34.4) derivatele parțiale $\frac{\partial E}{\partial q_k}$ și $\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}$ se calculează ca și cînd coordonatele generalizate q_k și vitezele generalizate $\dot{q}_k$ ar fi variabile independente.

Pentru calculul energiei cinetice se pot folosi relațiile stabilite în capitolul XXVII. Astfel pentru un solid avînd o mișcare de translație:

$$E = \frac{1}{2} M v^2, \tag{34.7}$$

unde M este masa, iar $\bar{v}$ — viteza punctelor solidului. Dacă solidul are o mișcare de rotație în jurul axei fixe Oz:

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{34.8}$$

unde J_z este momentul de inerție axial al solidului în raport cu axa de rotație, și ω este viteza unghiulară.

Pentru calculul energiei cinetice se poate folosi și teorema lui Konig:

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + E_r, \tag{34.9}$$

unde M este masa solidului, $\bar{v}_c = \dot{\bar{\rho}}$ — viteza centrului maselor, și E_r — energia cinetică a solidului în mișcarea față de centrul maselor.

Pentru calculul forței generalizate se poate folosi relația de definiție (34.6) sau observația că forța generalizată Q_k este coeficientul deplasării virtuale δq_k din expresia lucrului mecanic virtual:

$$\delta \mathcal{L} = \sum \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k + \ldots + Q_h \delta q_h. \tag{34.10}$$

Pentru calculul forței generalizate Q_k, de exemplu, se dă coordonatei generalizate q_k variația δq_k păstrînd celelalte coordonate $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_h$ constante; se obține lucrul mecanic virtual $\delta \mathcal{L}_k = Q_k \delta q_k$ care împărțit prin δq_k dă valoarea lui Q_k:

$$Q_k = \frac{\delta \mathcal{L}_k}{\delta q_k}. \tag{34.11}$$

Forța generalizată Q_k are dimensiunea unei forțe dacă q_k este o lungime și are dimensiunea unui moment dacă q_k este un unghi.

Dacă sistemul de forțe este *conservativ*, adică derivă dintr-o funcție de forță U, $\bar{F}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \bar{k}$, atunci:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{34.12}$$

ecuațiile lui Lagrange devenind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}. \tag{34.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ele se pot pune și sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \tag{34.14}$$

unde:

$$L = E + U \tag{34.15}$$

este *funcția lui Lagrange* sau *potențialul cinetic*.

Se reamintesc expresiile funcției de forță $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_h, t)$ pentru greutatea $M\bar{g}$ a unui corp:

$$U = -Mgz + C \tag{34.16}$$

(z este cota centrului maselor și axa Oz este verticala ascendentă) și pentru forța elastică $\bar{F} = -k\bar{r}$ pentru care:

$$U = -\frac{1}{2}kr^2 + C = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C, \tag{34.17}$$

originea fiind aleasă în centrul atractiv O.

Dacă sistemul de puncte (A_i) este supus la h legături olonome și la h' legături neolonome, poziția sistemului este determinată de valorile coordonatelor generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_h$ prin intermediul relațiilor (34.3), coordonatele generalizate satisfăcînd relațiile de neolonomie care se pot pune sub forma:

$$\sum_{k=1}^{h} c_{jk}\, dq_k + c_{j0}\, dt = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, h') \tag{34.1'}$$

Ecuațiile lui Lagrange devin pentru acest sistem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{j=1}^{h'} \lambda_j c_{jk} \; (k = 1, 2, \ldots, h) \tag{34.18}$$

Din aceste ecuații (34.18) și din relațile (34.1') care se pot pune și sub forma:

$$\sum_{k=1}^{h} c_{jk}\dot{q}_k + c_{j0} = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, h') \tag{34.19}$$

se obține un sistem cu $(h + h')$ necunoscute: cele h coordonate generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_h$ și cei h' multiplicatori ai lui Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$.

B. PROBLEME REZOLVATE

34.1. O sferă A de masă m presupusă concentrată în centrul ei este suspendată de un fir înfășurat pe un cilindru fix de rază r avînd axa orizontală (fig. 34.1). În poziția verticală firul are lungimea l. Să se studieze mișcarea sferei. Caz particular $r = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Dacă sfera oscilează într-un plan vertical sistemul are un singur grad de libertate. Alegînd drept parametru unghiul θ coordonatele (34.3) ale punctului A sînt:

$$x = (l + r\theta)\cos\theta - r\sin\theta$$
$$y = (l + r\theta)\sin\theta + r\cos\theta. \tag{1}$$

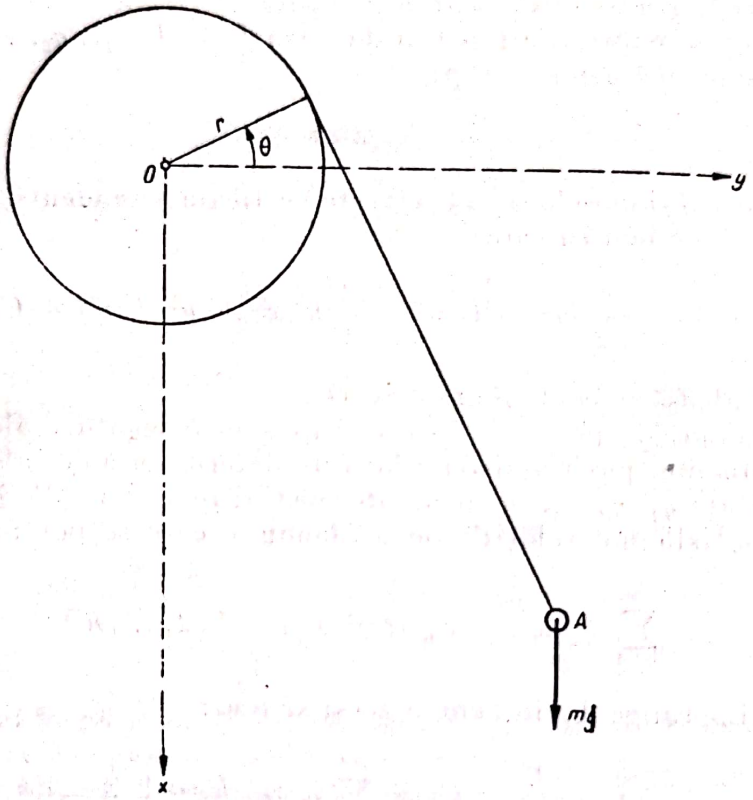


Fig. 34.1

Ecuația lui Lagrange (34.4) pentru cazul nostru este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial E}{\partial \theta}\right) = Q, \tag{2}$$

unde energia cinetică (34.5) este:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m(l + r\theta)^2\dot\theta^2, \tag{3}$$

deoarece:

$$\dot x = -(l + r\theta)\sin\theta\cdot\dot\theta + r\dot\theta\cos\theta - r\dot\theta\cos\theta = -(l + r\theta)\dot\theta\sin\theta$$
$$\dot y = (l + r\theta)\cos\theta\cdot\dot\theta + r\dot\theta\sin\theta - r\dot\theta\sin\theta = (l + r\theta)\dot\theta\cos\theta$$

și forța generalizată (34.6) ținînd seamă și de (1) este:

$$Q = m\bar{g}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = mg\frac{\partial x}{\partial \theta} = mg\left[-(l + r\theta)\sin\theta + r\cos\theta - r\cos\theta\right] =$$

$$= -mg(l + r\theta)\sin\theta. \tag{4}$$

Din (3) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = m(l + r\theta)^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(l + r\theta)^2\ddot{\theta} + 2mr(l + r\theta)\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = mr(l + r\theta)\theta^2 \tag{5}$$

și înlocuind în (2) rezultă după simplificări:

$$(l + r\theta)\ddot{\theta} + r\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0 \tag{6}$$

În cazul micilor oscilații $\sin\theta \approx \theta$ și neglijînd termenii de gradul al doilea în $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$, ecuația (6) devine:

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0, \qquad \theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi\right),$$

perioada micilor oscilații fiind $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ ca în cazul pendulului simplu. Pentru $r = 0$ ecuația (6) devine:

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \tag{7}$$

problema reducîndu-se la aceea a pendulului simplu.

Observație. Cum singura forță activă aplicată, greutatea, derivă din funcția de forță (34.16):

$$U = mgx$$

pentru calcul forței generalizate se putea folosi, în locul formulei (34.6), relația (34.12)

$$Q = \frac{\partial U}{\partial \theta} = mg\frac{\partial x}{\partial \theta}.$$

34.2. O bară de greutate P este așezată pe două role (discuri omogene) de raze r și greutate G. Să se studieze mișcarea sistemului dacă asupra barei acționează forța constantă $\bar{F}$ (fig. 34.2).

Rezolvare. Sistemul are un singur grad de libertate, deoarece între cei cinci parametri x_1, x_2, x_3, θ_1 și θ_2 (fig. 34.2) care definesc poziția sistemului la un moment dat există relațiile:

$$\dot{x}_1 = r\dot{\theta}_1, \qquad \dot{x}_2 = r\dot{\theta}_2 \tag{1}$$

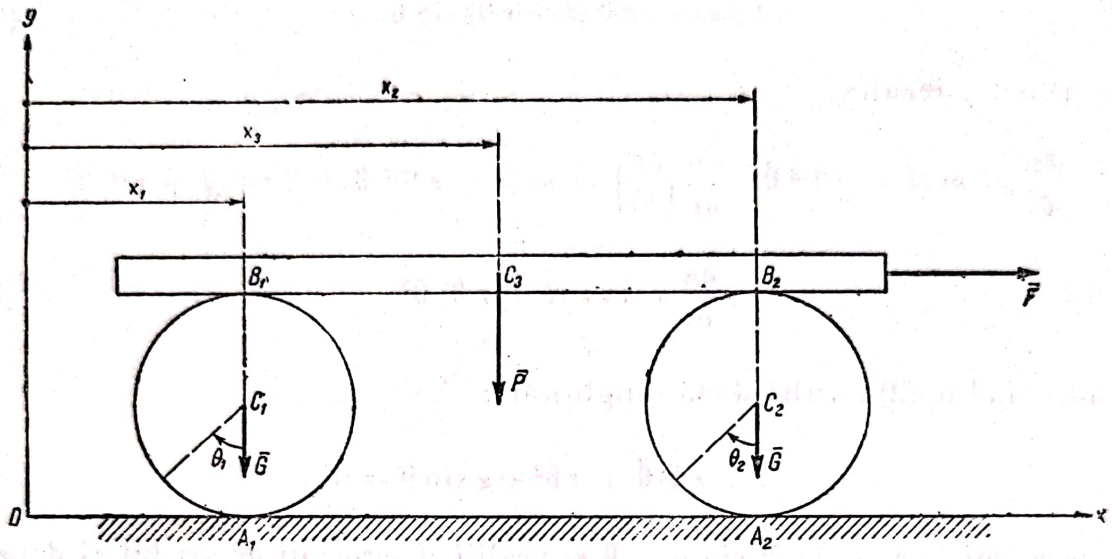


Fig. 34.2

care exprimă condiția ca rolele să se rostogolească fără să alunece pe planul orizontal, centrele instantanee de rotație fiind în A_1 și A_2 și relațiile:

$$\dot{x}_3 = 2\,r\dot{\theta}_1 \qquad x_3 = 2\,r\,\dot{\theta}_2 \tag{2}$$

care exprimă condițiile ca bara să nu alunece în raport cu rolele, vitezele punctelor B_1 și B_2 de pe role și bară fiind egale. Relațiile (1) și (2) fiind olonome se pot exprima sub formă întreagă parametrii în funcție de unul dintre ei, de exemplu $x_3 = x$, ecuația lui Lagrange (34.4) fiind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Energia cinetică a sistemului, ținînd seamă de relația (34.7) pentru bară și de teorema lui König (34.9) pentru role, este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{4P+3G}{8\,g}\dot{x}^2, \tag{4}$$

deoarece:

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2, \text{ și din (1) și (2): } \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \frac{\dot{x}}{2},\ \dot{\theta}_1 = \theta_2 = \frac{\dot{x}}{2r}.$$

Din (4) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \frac{4P+3G}{4\,g}\dot{x};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{4P+3G}{4\,g}\ddot{x}. \tag{5}$$

Lucrul mecanic virtual (34.10) fiind:

$$\delta L = F\,dx,$$

forța generalizată:

$$Q = \frac{\delta L}{\delta x} = F. \tag{6}$$

Făcînd înlocuirile în ecuația (1) se obține:

$$\frac{4P + 3G}{4g}\ddot{x} = F;$$

deci:

$$\ddot{x} = \frac{4F}{4P + 3G}g = \text{const.} \tag{7}$$

$$x = \frac{2F}{4P + 3G}gt^2 + v_0 t + x_0,$$

mișcarea barei fiind uniform variată. Accelerațiile:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{\ddot{x}}{2} = \frac{2F}{4P + 3G}g \qquad \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = \frac{\ddot{x}}{2r} = \frac{2F}{(4P+3G)r}g \tag{8}$$

sînt de asemenea constante, centrele rolelor avînd și ele mișcări uniform variate.

34.3. Se consideră mecanismul din figura 34.3. Cunoscînd masele corpurilor M_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, razele $r_2, r_3, R_3, r_4, R_4, r_6, r_7$, momentele de inerție J_2, J_3, J_4, J_6, J_7 și unghiurile α și β, să se studieze mișcarea sistemului. Legăturile sînt ideale, articulațiile A_2, A_4 și A_6 fiind fără frecare, corpul *3* rostogolindu-se fără alunecare, iar corpul *5* alunecînd fără frecare.

Rezolvare. Sistemul are un singur grad de libertate, deoarece între cei zece parametri $s_1, s, \theta_2, \theta_3, s_3, \theta_4, s_5, \theta_6, \theta_7, s_7$ și s_8 există relațiile:

$$\dot{s}_1 = r\dot{\theta}_2 = (R_3 - r_3)\,\dot{\theta}_3 \tag{1}$$

(viteza corpului 1, viteza periferică a scripetelui *2* și viteza punctului B_3 sînt egale, I_3 fiind centrul instantaneu de rotație al discului *3*):

$$\dot{s}_3 = R_3\,\dot{\theta}_3 \tag{2}$$

$$2\,R_3\,\dot{\theta}_3 = r_4\,\dot{\theta}_4 \tag{3}$$

(punctele C_3 și B_4 au aceeași viteză);

$$R_4\,\dot{\theta}_4 = \dot{s}_5 = r_6\,\dot{\theta}_6 = 2\,r_7\,\dot{\theta}_7 \tag{4}$$

(vitezele punctului C_4, a corpului *5*, viteza periferică a scripetelui *6* și viteza punctului B_7 fiind egale, I_7 fiind centrul instantaneu al scripetelui *7*):

$$\dot{s}_8 = \dot{s}_7 = r_7\,\dot{\theta}_7 \tag{5}$$

(A_7 centrul scripetelui *7* și corpul *8* au aceeași viteză).

Scanned with OKEN Scanner

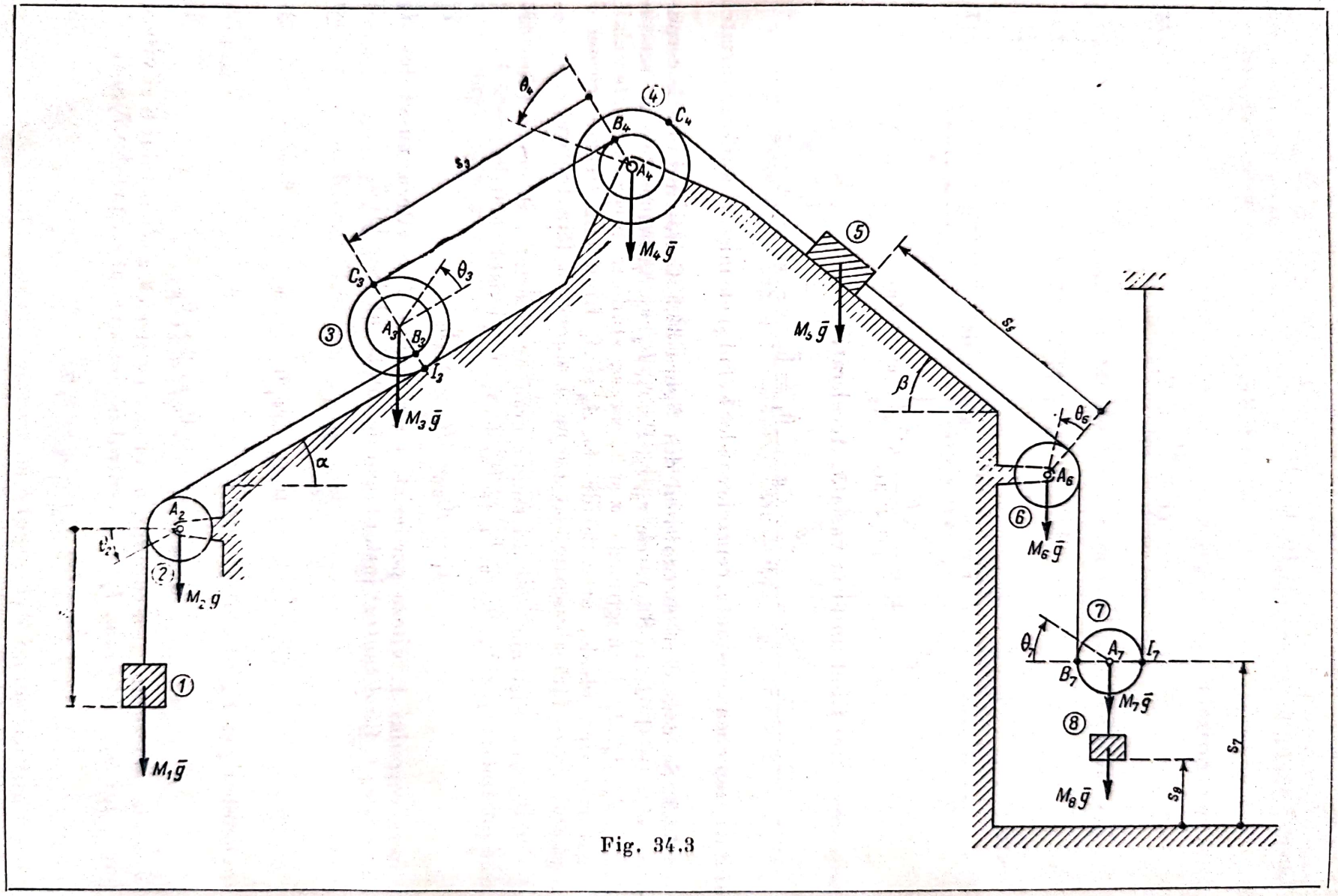

θ4
④
B4
C4
A4
s3
M4 g
C3
θ3
③
A3
B3
I3
M3 g
M5 g
⑤
s5
β
θ6
A6
⑥
M6 g
α
A2
⑦
θ7
A7
I7
B7
M7 g
⑧
s7
s8
M8 g
M2 g
⑦
①
M1 g

Fig. 34.3

Ecuația lui Lagrange (34.4) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E}{\partial s} = 0, \tag{6}$$

în care energiile cinetice ale corpurilor din sistem sînt:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 \dot{s}_1^2 \qquad E_5 = \frac{1}{2} M_5 \dot{s}_5^2 \qquad E_8 = \frac{1}{2} M_8 \dot{s}_8^2 \tag{7}$$

pentru corpurile *1*, *5* și *8* avînd o mișcare de translație (34.7):

$$E_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \qquad E_4 = \frac{1}{2} J_4 \dot{\theta}_4^2 \qquad E_6 = \frac{1}{2} J_6 \dot{\theta}_6^2 \tag{8}$$

pentru corpurile *2*, *4* și *6* avînd o mișcare de rotație (34.8) și aplicînd teorema lui König (34.9) pentru corpurile *3* și *7* care au o mișcare plană:

$$E_3 = \frac{1}{2} M_3 \dot{s}_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \qquad E_7 = \frac{1}{2} M_7 \dot{s}_7^2 + \frac{1}{2} J_7 \dot{\theta}_7^2. \tag{9}$$

Din relațiile (1) — (5) și (7) — (8) rezultă:

$$E = \sum_{i=1}^{8} E_i = \frac{1}{2} M_r \dot{s}^2, \tag{10}$$

unde:

$$M_r = M_1 + \frac{J_2}{r_2^2} + \left(\frac{R_3}{R_3 - r_3}\right)^2 M_3 + \frac{J_3}{(R_3 - r_3)^2} + \left(\frac{2 R_3}{R_3 - r_3}\right)^2 \frac{J_4}{r_4^2} +$$
$$+ \left(\frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \frac{R_4}{r_4}\right)^2 M_5 + \left(\frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \frac{R_4}{r_4}\right)^2 \frac{J_6}{r_6^2} + \left(\frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \frac{R_4}{r_4} \frac{r_7}{2 r_7}\right)^2 (M_7 + M_8) +$$
$$+ \left(\frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \frac{R_4}{r_4}\right)^2 \frac{J_7}{(2 r_7)^2} \tag{11}$$

este masa redusă a sistemului, adică masa pe care ar avea-o un corp suspendat.

Derivînd expresia (10) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{s}} = M_r \dot{s} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) = M_r \ddot{s} \qquad \frac{\partial E}{\partial s} = 0 \tag{12}$$

Lucrul mecanic virtual al forțelor efectiv aplicate (34.10) este:

$$\delta \mathfrak{L} = M_1 g \, \delta s_1 + M_3 g \sin \alpha \, \delta s_3 - M_5 g \sin \beta \, \delta s_5 -$$
$$- M_7 g \, \delta s_7 - M_8 g \, \delta s_8, \tag{13}$$

unde deplasările virtuale au expresiile:

$$\delta s_1 = \delta s; \qquad \delta s_3 = \frac{R_3}{R_3 - r_3} \delta s; \qquad \delta s_5 = \frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \cdot \frac{R_4}{r_4} \delta s;$$
$$\delta s_7 = \delta s_8 = \frac{2 R_3}{R_3 - r_3} \cdot \frac{R_4}{r_4} \cdot \frac{r_7}{2 r_7} \cdot \delta s. \tag{14}$$

Din (13) și (14) și din (34.11) rezultă:

$$\delta \mathfrak{L} = F_r \, \delta s \qquad Q = \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta s} = F_r, \tag{15}$$

unde:

$$F_r = M_1 g + \frac{2 R_3}{R_3 - r_3} M_3 g \sin \alpha - \frac{2 R_3 R_4}{(R_3 - r_4) r_4} M_5 \sin \beta - \\ - \frac{R_3 R_4}{(R_3 - r_3) r_4} (M_7 + M_8) g \tag{16}$$

reprezintă forța redusă.

Înlocuind relațiile (12) și (15) în ecuația (6) rezultă:

$$M_r \ddot{s} = F_r,$$

de unde:

$$s = \frac{F_r}{M_r} \qquad s = \frac{1}{2} \frac{F_r}{M_r} t^2 + v_0 t + s_0$$

mișcarea corpului 1 fiind uniform variată.

34.4. Pe un scripete de masă periferică M și raza r este petrecut un fir AB, în A fiind suspendat un corp de masă m și în B fiind legat resortul BC avînd constanta elastică k. Știind că în momentul inițial greutatea A se găsește în poziția ei de echilibru și are viteza v_0, să se studieze mișcarea sistemului.

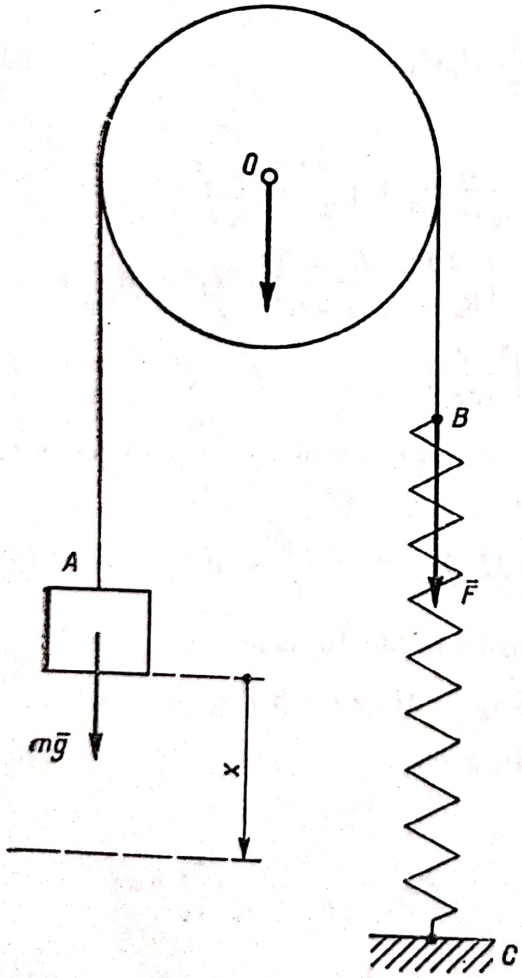


Fig. 34.4

Rezolvare. În poziția de echilibru greutatea mg și tensiunea resortului $F = k\Delta l$ fiind egale, alungirea resortului în poziția de echilibru este:

$$\Delta l = \frac{mg}{k}. \tag{1}$$

Sistemul avînd un singur grad de libertate se alege drept parametru deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru, ecuația lui Lagrange (34.13) fiind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2}$$

Energia cinetică a sistemului dată de relațiile (34.7) și (34.8) este:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \\ = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2, \tag{3}$$

deoarece viteza greutății A este $v = \dot{x}$, viteza unghiulară a scripetelui $\omega = \frac{\dot{x}}{r}$, și momentul său de inerție este $J = Mr^2$.

Alungirea resortului într-o poziție oarecare fiind $r = \Delta l + x$ forțele derivă din funcția de forță (34.16), (34,17):

$$U = m g x - \frac{1}{2} k r^2 = m g x - \frac{1}{2} k (\Delta l + x)^2. \tag{4}$$

Derivînd relația (3) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m)\ddot{x}$$

și din (4), ținînd seamă și de (1), rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m g - k (\Delta l + x) = - k x.$$

Înlocuind în (2) se obține:

$$(M + m)\ddot{x} = - k x. \tag{5}$$

Integrînd ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți (5) și ținînd seama de condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ rezultă:

$$x = \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t, \tag{6}$$

mișcarea greutății fiind o oscilație armonică de pulsație $\nu = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$ și perioadă $T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}}$ în jurul poziției de echilibru. Scripetele oscilează în jurul poziției de echilibru, unghiul de rotire față de această poziție fiind

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{v_0}{\nu r} \sin \nu t.$$

34.5. Un disc omogen, orizontal, de rază r și masă M, se poate roti în jurul unei axe verticale care trece prin centrul O al discului. Un gîndac A merge pe marginea discului, legea mișcării fiind $s = \text{arc } A_0 A = \frac{1}{2} a t^2$. Să se studieze mișcarea discului știind că în momentul inițial el era în stare de repaus.

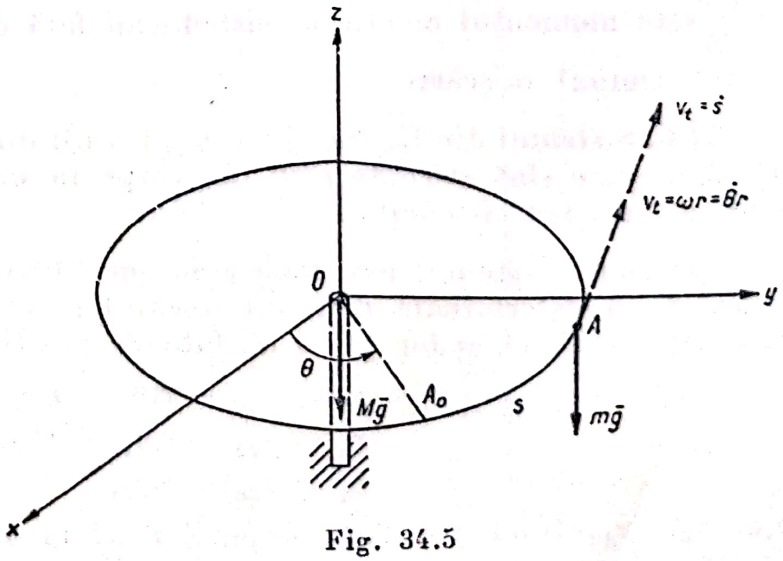


Fig. 34.5

Rezolvare. Alegînd drept parametru unghiul $\theta = \sphericalangle xoA_0$ de rotire al discului față de poziția inițială (pentru $t = 0$, axa fixă Ox și raza OA_0 coincizînd) ecuația lui Lagrange (34.13) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{1}$$

Energia cinetică a sistemului (34.8) şi (34.7) este:

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4} M r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (a t + \dot{\theta} r)^2, \qquad (2)$$

deoarece momentul de inerţie al discului este $J = \frac{1}{2} Mr^2$ şi viteza absolută (17.3) a gîndacului este:

$$v = v_r + v_t = a t + \dot{\theta} r,$$

viteza relativă $v_r = \dot{s} = at$ şi cea de transport $v_t = \omega r = \dot{\theta} r$ fiind coliniare (fig. 34.5).

Forţele derivă din funcţia de forţă (34.16):

$$U = - M g z_0 - m g z_A = 0, \qquad (3)$$

deoarece $z_0 = z_A = 0$. Din (2) şi (3) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta} + m r (a t + \dot{\theta} r) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2} M + m\right) r^2 \ddot{\theta} + m r a$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

şi înlocuind în (1) rezultă:

$$\left(\frac{1}{2} M + m\right) r^2 \ddot{\theta} - m r a = 0 \qquad (4)$$

de unde, ţinînd seamă şi de condiţiile iniţiale $t = 0$, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ rezultă:

$$\ddot{\theta} = - \frac{2 ma}{(M + 2 m) r}, \qquad \dot{\theta} = - \frac{2 mat}{(M + 2 m) r}, \qquad \theta = - \frac{mat^2}{(M + 2 m) r}, \qquad (5)$$

discul avînd o mişcare de rotaţie uniform accelerată în sens invers mişcării gîndacului.

Observaţie. Cum $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ şi $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ din ecuaţia (1) rezultă $\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \text{const.}$ Or $\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}$ este momentul cinetic al sistemului faţă de axa Oz care se conservă în tot timpul mişcării.

34.6. Sistemul din figura 34.6 este alcătuit din doi scripeţi de masă neglijabilă de care sînt atîrnate prin fire corpurile de masă m, $2m$ şi $3m$. Să se studieze mişcarea sistemului.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, poziţiile corpurilor din sistem fiind determinate prin intermediul parametrilor θ_1 şi θ_2 (unghiurile de rotaţie ale scripeţilor O_1 şi O_2 faţă de poziţia lor iniţială) de abscisele:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} - r_1\theta_1 - r_2\theta_2 \\ x_2 &= x_{20} - r_1\theta_1 + r_2\theta_2 \\ x_3 &= x_{30} + r_1\theta_1, \end{aligned} \qquad (1)$$

x_{10}, x_{20}, x_{30} fiind abscisele corpurilor în momentul iniţial.

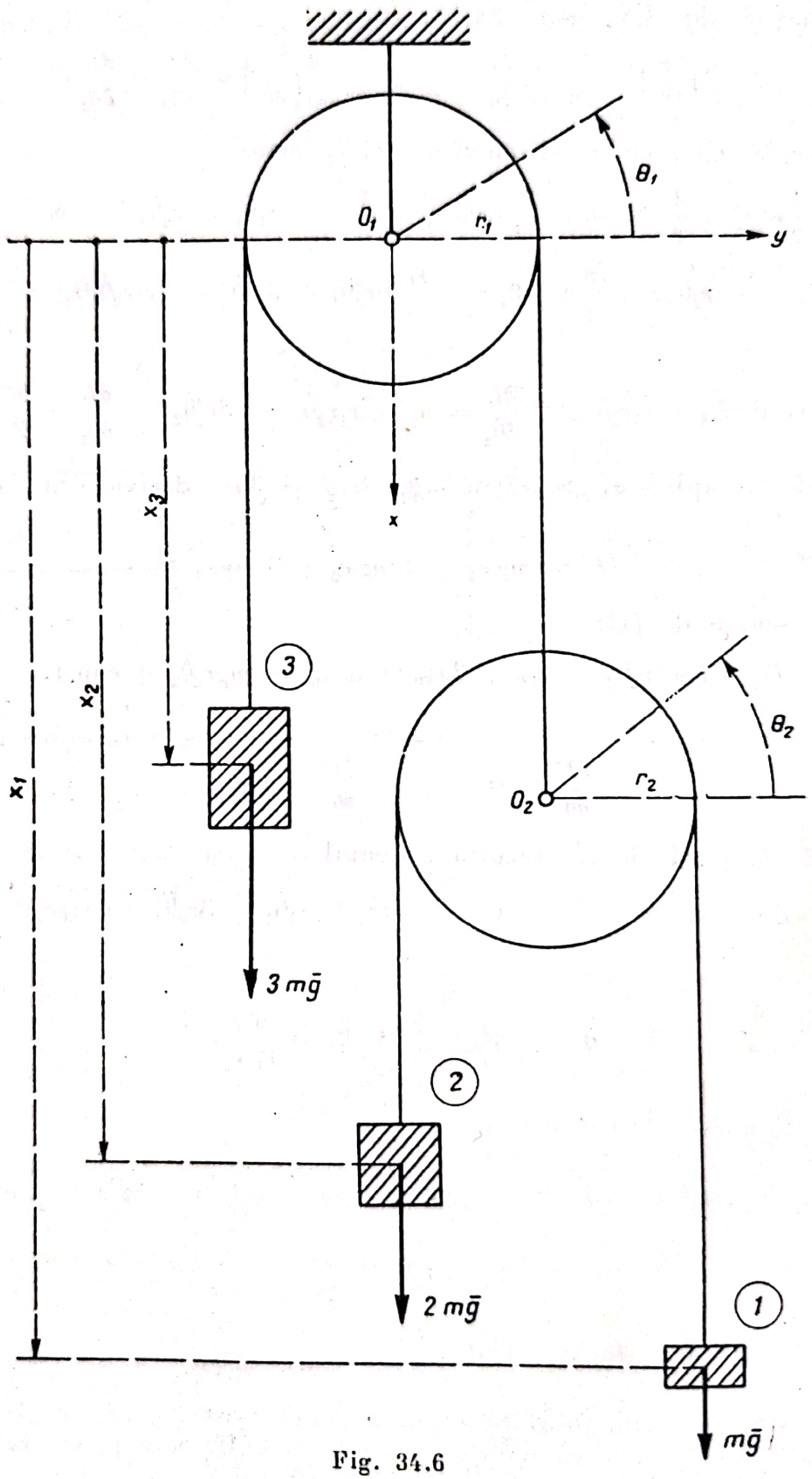


Fig. 34.6

Ecuațiile lui Lagrange (34.13) sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = \frac{\partial U}{\partial \theta_2}. \tag{2}$$

Energia cinetică a sistemului (34.7) este:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m\,(-r_1\dot{\theta}_1 - r_2\dot{\theta}_2)^2 + m\,(-r_1\dot{\theta}_1 +$$

$$+ r_2\dot{\theta}_2)^2 + \frac{3}{2}m(r_1\dot{\theta}_1)^2 = \frac{m}{2}(6r_1^2\dot{\theta}_1^2 + 3r_2^2\dot{\theta}_2^2 - 2r_1r_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2),$$

deci:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1} = m\,(6\,r_1^2\dot{\theta}_1 - r_1r_2\dot{\theta}_2) \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2} = m\,(-r_1r_2\dot{\theta}_1 + 3r_2^2\dot{\theta}_2) \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = 0. \tag{3}$$

Forțele efectiv aplicate, greutățile $m\bar{g}$, $2m\bar{g}$ și $3m\bar{g}$ derivă din funcția de forță (34.16):

$$U = mgx_1 + 2\,mgx_2 + 3\,mgx_3$$

și ținînd seamă de (1):

$$U = mg\,(r_2\theta_2 + x_{10} + 2x_{20} + 3x_{30}) = mgr_2\theta_2 + \text{const.},$$

deci:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = mgr_2 \tag{4}$$

Înlocuind (3) și (4) în (2) rezultă sistemul:

$$mr_1\,(6r_1\ddot{\theta}_1 - r_2\ddot{\theta}_2) = 0 \qquad mr_2\,(-r_1\ddot{\theta}_1 + 3r_2\ddot{\theta}_2) = mgr_2,$$

de unde:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g}{17\,r_1} \qquad \ddot{\theta}_2 = \frac{6\,g}{17\,r_2}. \tag{5}$$

Accelerațiile celor trei corpuri sînt:

$$\ddot{x}_1 = -r_1\ddot{\theta}_1 - r_2\ddot{\theta}_2 = -\frac{7}{17}g \qquad \ddot{x}_2 = -r_1\ddot{\theta}_1 + r_2\ddot{\theta}_2 = \frac{5}{17}g$$

$$\ddot{x}_3 = r_1\ddot{\theta}_1 = \frac{g}{17}, \tag{6}$$

mișcările lor fiind uniform variate.

34.7. O pană *1* triunghiulară de masă M_1 este așezată pe un plan orizontal luciu. Pe pană este așezat un corp *2* de masă M_2 care poate luneca fără frecare pe ea. Să se studieze mișcarea sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, pozițiile corpurilor fiind definite cu ajutorul parametrilor x și s (fig. 34,7, *a*). Viteza corpului *1* este:

$$\bar{v}_1 = \dot{x}\bar{i} \tag{1}$$

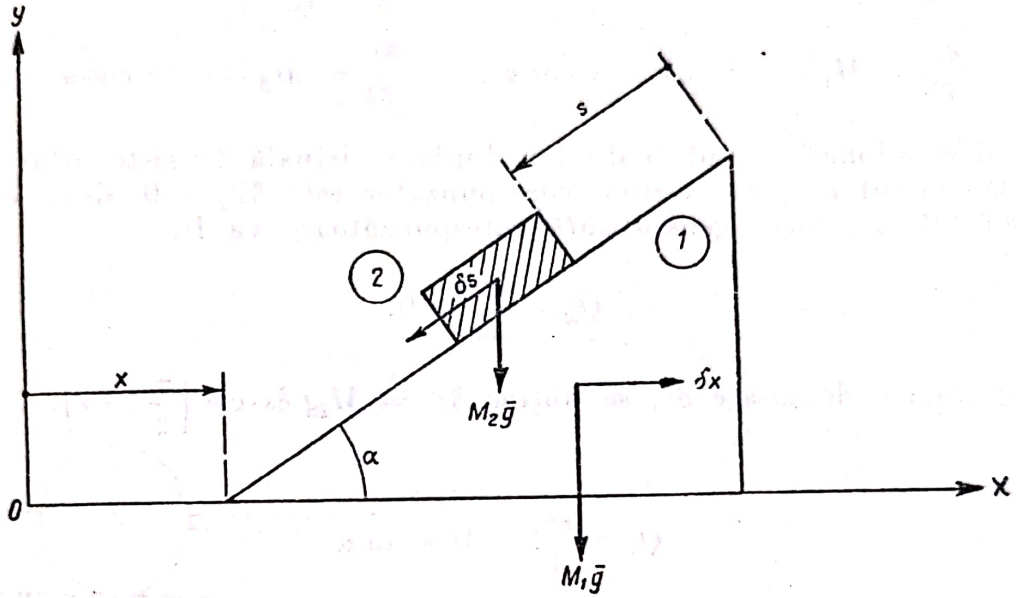


Fig. 34.7, *a*

iar viteza corpului *2* este dată de relația (17.3):

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -\dot{s}\cos\alpha\,\bar{i} - \dot{s}\sin\alpha\,\bar{j} + \dot{x}\bar{i}, \tag{2}$$

deoarece $v_r = \dot{s}$ și este dirijat în lungul feței înclinate a panei, viteza de transport fiind viteza panei $\bar{v}_t = \bar{v}_1$ (fig. 34.7, *b*).

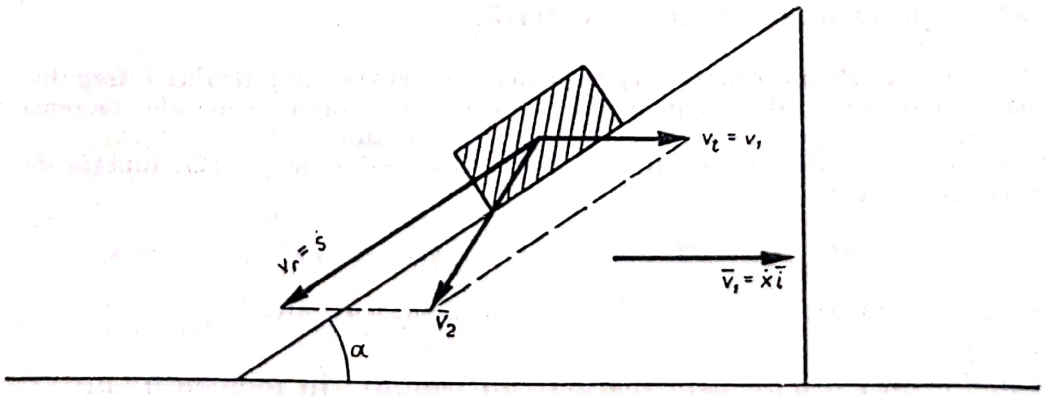


Fig. 3.47, *b*

Ecuațiile lui Lagrange (34.4) sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E}{\partial x} = Q_x \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s \tag{3}$$

Energia cinetică a sistemului (34.7) este:

$$E = \frac{1}{2}M_1 v_1^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2 = \frac{1}{2}M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}M_2 (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 - 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha),$$

deci:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = M_1\dot{x} + M_2(\dot{x} - \dot{s}\cos\alpha) \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} = M_2(\dot{s} - \dot{x}\cos\alpha). \tag{4}$$

Variind coordonata x, adică dînd o duplare virtuală δx sistemului pe orizontală, lucrul mecanic virtual corespunzător este $\delta\mathcal{L}_x = 0$, deci, conform relației (34.11), forța generalizată corespunzătoare va fi:

$$Q_x = \frac{\delta\mathcal{L}_x}{\delta x} = 0. \tag{5}$$

Analog dînd o deplasare δs, se obține $\delta\mathcal{L}_s = M_2 g\,\delta s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

deci:

$$Q_s = \frac{\delta\mathcal{L}_s}{\delta s} = M_2 g \sin\alpha \tag{6}$$

Înlocuind (4), (5) și (6) în (3) rezultă:

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - M_2\ddot{s}\cos\alpha = 0 \quad M_2(\ddot{s} - \ddot{x}\cos\alpha) = M_2 g \sin\alpha, \tag{7}$$

de unde:

$$\ddot{x} = \frac{M_2 \sin 2\alpha}{2(M_1 + M_2 \sin^2\alpha)} g \qquad \ddot{s} = \frac{(M_1 + M_2)\sin\alpha}{M_1 + M_2 \sin^2\alpha} g, \tag{8}$$

pana avînd o mișcare uniform variată.

Observații. 1. Prima ecuație (7) exprimă conservarea impulsului întregului sistem, problema putîndu-se rezolva și prin aplicarea a două teoreme generale, teorema impulsului și teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic.

2. Forțele generalizate se puteau calcula și cu relațiile (34.12), funcția de forță a celor două greutăți fiind:

$$U = -M_1 g y_1 - M_2 g y_2 = -M_1 g y_{10} - M_2 g(y_{20} - s\sin\alpha), \tag{9}$$

y_{10} și y_{20} fiind ordonatele centrelor de masă în momentul inițial.

34.8. Pe un cărucior este instalat un pendul. În momentul inițial căruciorul se află în repaus, firul pendulului fiind înclinat sub unghiul α față de verticală. Se cunoaște masa căruciorului împreună cu suportul pendulului M_1, masa celor patru roți M_2 (roțile se consideră drept discuri omogene), masa m și lungimea l a pendulului. Să se studieze mișcarea sistemului considerînd că roțile se rostogolesc fără alunecare și neglijînd frecările în articulații și de rostogolire.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate. Drept parametri se aleg deplasarea căruciorului față de poziția inițială y și unghiul de înclinare a pendulului θ (fig. 34.8).

Ecuațiile lui Lagrange (34.13) sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}. \tag{1}$$

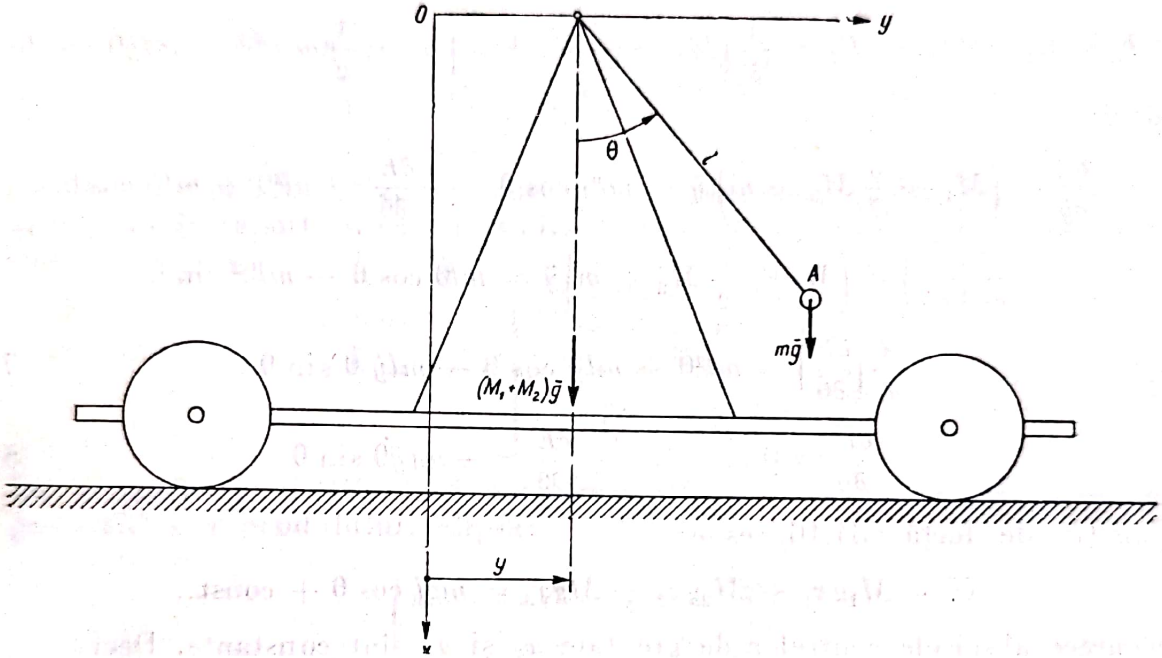


Fig. 34.8

Energia cinetică (34.7) a căruciorului și suportului pendulului este:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 \dot{y}^2. \tag{2}$$

Energia cinetică (34.9) a unei roți este:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{M_2}{4}\dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\omega}^2 = \frac{3}{16} M_2 \dot{y}^2, \tag{3}$$

deoarece momentul de inerție al unei roți de rază r și masă $\frac{M_2}{4}$ este $J = \frac{1}{2}\frac{M_2}{4} r^2$ și viteza ei unghiulară $\omega = \frac{\dot{y}}{r}$.

Energia cinetică a pendulului este:

$$E_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\,\dot{\theta}\cos\theta), \tag{4}$$

deoarece coordonatele punctului A sînt:

$$x_3 = l\cos\theta \qquad y_3 = y + l\sin\theta \tag{5}$$

iar componentele vitezei v_3 a punctului A sînt:

$$\dot{x}_3 = -l\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y}_3 = \dot{y} + l\dot{\theta}\cos\theta \tag{6}$$

Din (3), (4) și (5) rezultă expresia energiei cinetice a sistemului:

$$E = E_1 + 4E_2 + E_3 = \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m\right)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta,$$

deci:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = \left(M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m\right)\dot{y} + ml\dot{\theta}\cos\theta \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) = \left(M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m\right)\ddot{y} = ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\cos\theta - ml\dot{y}\,\dot{\theta}\sin\theta \tag{7}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} = -ml\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \tag{8}$$

Funcția de forță (34.16) este:

$$U = M_1 g x_1 + M_2 g x_2 + M g x_3 = mgl\cos\theta + \text{const.},$$

deoarece abscisele centrelor de greutate x_1 și x_2 sînt constante. Deci:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \tag{9}$$

și înlocuind (7), (8) și (9) în (1) rezultă:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m\right)\dot{y} + ml\dot{\theta}\cos\theta\right] = 0 \qquad ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{y}\cos\theta =$$

$$= -mgl\sin\theta \tag{10}$$

Integrînd prima ecuație (10) rezultă:

$$\left(M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m\right)\dot{y} + ml\dot{\theta}\cos\theta = C, \tag{12}$$

impulsul generalizat $\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}$ conservîndu-se; ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $y = 0$, $\theta = \alpha$, $\dot{y} = 0$ și $\dot{\theta} = 0$ rezultă $C = 0$, deci:

$$\dot{y} = -\frac{m\,l\,\dot{\theta}\cos\theta}{M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m} \qquad y = \frac{m\,l\,(\sin\alpha - \sin\theta)}{M_1 + \frac{3}{2}M_2 + m}. \tag{13}$$

Făcînd înlocuirile în a doua ecuație (10) se obține ecuația:

$$\ddot{\theta}\left(1-\frac{m\cos^2\theta}{M_1+\frac{3}{2}M_2+m}\right)+\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M_1+\frac{3}{2}M+m}\dot{\theta}^2+\frac{g}{l}\sin\theta=0, \quad (14)$$

care nu se poate integra prin integrale elementare decît în cazul micilor oscilații. Rezultă:

$$\ddot{\theta}\left(1-\frac{m}{M_1+\frac{3}{2}M_2+m}\right)+\frac{g}{l}\theta=0 \quad (15)$$

($\cos\theta\approx 1$, $\sin\theta\approx\theta$, iar termenii în θ, $\dot{\theta}$ și $\ddot{\theta}$ de grad superior lui unu se neglijează în raport cu cei de gradul întîi). Integrînd această ecuație se obține:

$$\theta=\alpha\cos\left|\sqrt{\frac{\left(M_1+\frac{3}{2}M_2+m\right)g}{\left(M_1+\frac{3}{2}M_2\right)l}}\,t. \quad (16)$$

Din ecuațiile (5) și (13) eliminînd parametrii y și θ se poate găsi traiectoria greutății A a pendulului, elipsa:

$$\frac{x_3^2}{l^2}+\frac{\left(y_3-\frac{m\,l\sin\alpha}{M_1+\frac{3}{2}M_2+m}\right)^2}{\left(\frac{M_1+\frac{3}{2}M_2}{M_1+\frac{3}{2}M_2+m}\,l\right)^2}=1.$$

34.9. Se dă sistemul format din două bare grele, omogene, de masă M și lungime l, prima bară A_1B_1 fiind articulată în mijlocul ei O, iar cea de-a doua bară A_2B_2 fiind legată de prima prin firele $A_1A_2=B_1B_2=a$ (fig. 34.9) Să se studieze mișcarea sistemului știind că barele rămîn într-un plan vertical.

Rezolvare. Poziția barelor din sistem depinde de doi parametri: unghiul θ_1 format de bara A_1B_1 cu orizontala și unghiul θ_2 format de direcția firelor cu verticala. Energia cinetică (34.8) a sistemului este:

$$E=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2=\frac{M\,l^2}{12}\,\dot{\theta}_1^2+\frac{M\,a^2}{2}\,\dot{\theta}_2^2, \quad (1)$$

deoarece momentele de inerție J_1 al barei A_1B_1 față de Oz și J_2 al barei A_2B_2 față de Cz sînt: $J_1=J_2=\frac{M\,l^2}{12}$, viteza unghiulară a barei A_2B_2 este tot $\dot{\theta}_1$ bara rămînînd paralelă cu A_1B_1, viteza centrului maselor C fiind $v_C=a\dot{\theta}_2$.

Expresia funcției de forță (34.16) este:

$$U = Mgx_0 + Mgx_C = Mga\cos\theta_2. \tag{2}$$

Ținînd seamă de expresia (34.15) a potențialului cinetic:

$$L = E + U = \frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}_1^2 + \frac{Ma^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + Mga\cos\theta_2 \tag{3}$$

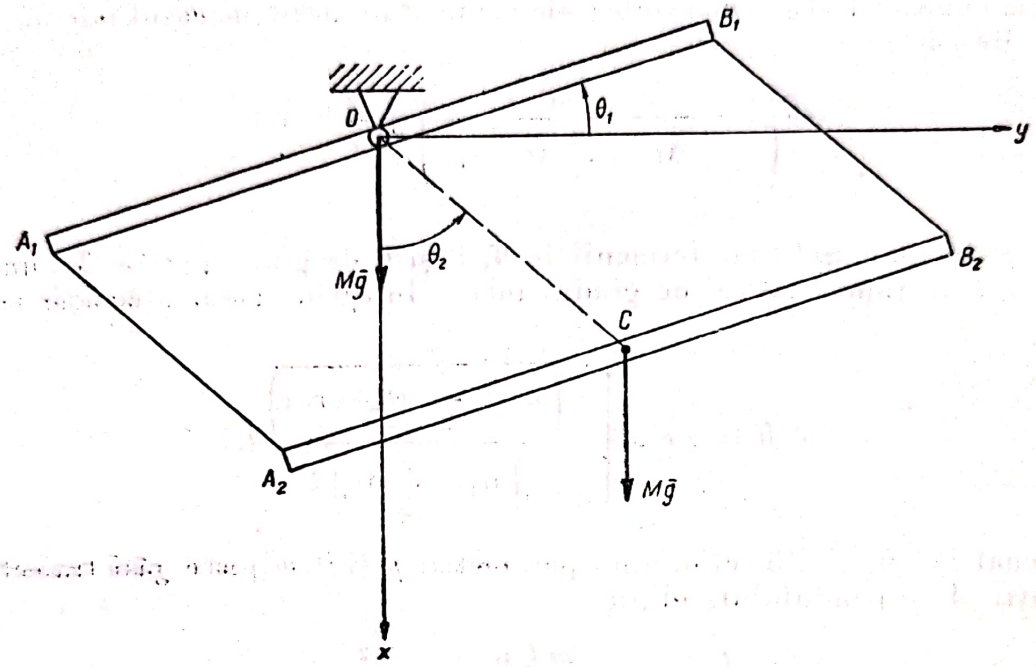


Fig. 34.9

ecuațiile lui Lagrange (34.14):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$$

devin:

$$\frac{Ml^2}{6}\ddot{\theta}_1 = 0 \qquad Ma^2\ddot{\theta}_2 + Mga\sin\theta_2 = 0, \tag{4}$$

deoarece din (3) rezultă:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} = \frac{Ml^2}{6}\dot{\theta}_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} = Ma^2\dot{\theta}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \text{ și } \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = -Mga\sin\theta_2.$$

Din prima ecuație (4) rezultă:

$$\dot{\theta}_1 = \text{const.} \qquad \theta_1 = \dot{\theta}_1 t + \theta_{10},$$

barele rotindu-se uniform în jurul centrelor maselor.

Din a doua ecuație (4) rezultă că centrul maselor C al barei A_2B_2 oscilează în jurul punctului O ca un pendul simplu de lungime $OC = a$, perioada micilor oscilații fiind $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Pentru mari oscilații se poate integra o dată această ecuație prin mijloace elementare. Se obține:

$$\dot{\theta}_2^2 = \frac{2g}{a}\cos\theta + C.$$

34.10. În interiorul unui cilindru de masă M și rază R, care se poate rostogoli pe un plan orizontal, se rostogolește un disc de masă m și rază r. Cunoscînd momentele de inerție în raport cu centrele $J_1 = MR^2$ și $J_2 = \frac{1}{2} mr^2$, să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate; drept parametri se aleg unghiul θ și deplasarea $y = OC_1$ a centrului cilindrului față de poziția în care C_1C_2 este verticală ($\theta = 0$), (fig. 34.10). Dacă A_0, A_0' și B_0 sînt punctele

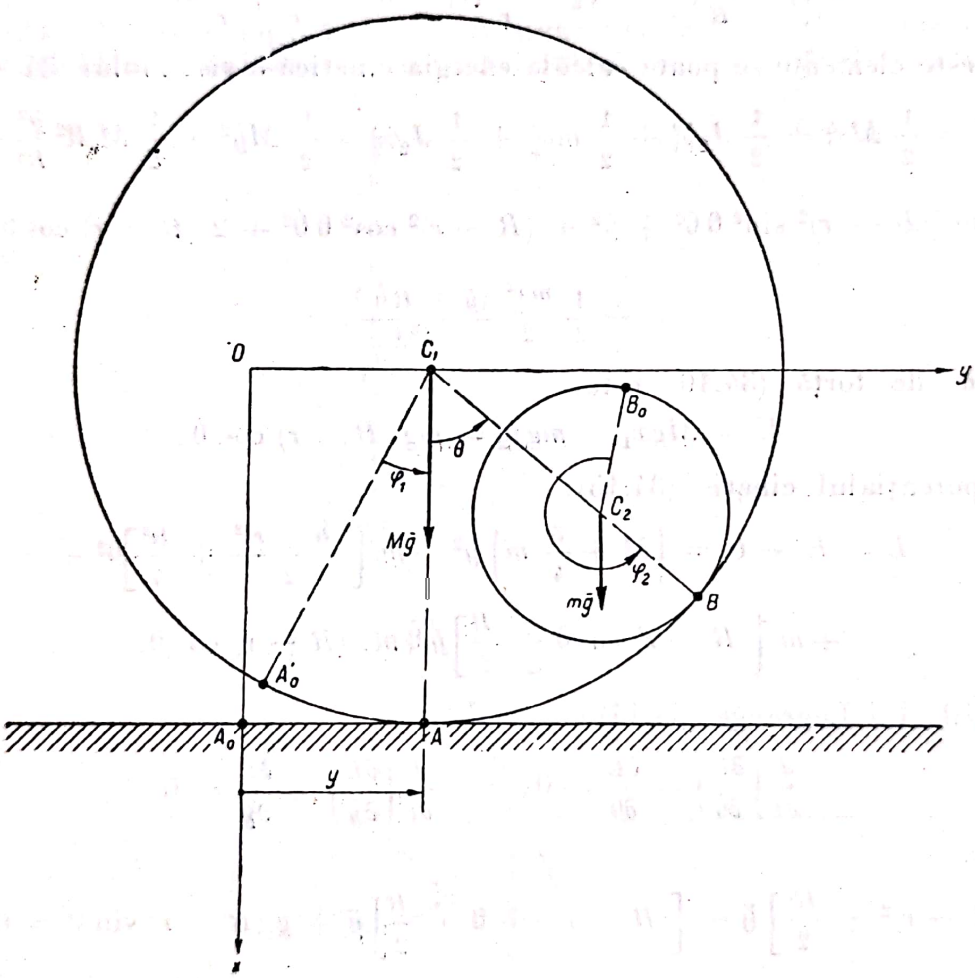


Fig. 34.10

în contact de pe cilindru, planul orizontal și disc pentru $\theta = 0$, $y = 0$, atunci, ținînd seamă de rostogolirea fără alunecare:

$$A_0A = \text{arc } A_0'A \qquad \text{arc } A_0'B = \text{arc } B_0B$$

sau:

$$y = R\varphi_1 \qquad R(\varphi_1 + \theta) = r\varphi_2 \tag{1}$$

φ_1 și φ_2 fiind unghiurile de rotație ale cilindrului și discului față de poziția $\theta = 0$, $y = 0$.

Coordonatele punctelor C_1 și C_2 fiind:

$$x_1 = 0; \quad y_1 = y; \quad x_2 = (R - r)\cos\theta; \quad y_2 = y + (R - r)\sin\theta, \tag{2}$$

coordonatele vitezelor $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ale acestor puncte sînt:

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = -(R - r)\sin\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + (R - r)\cos\theta\,\dot{\theta}, \tag{3}$$

și din (1) se obțin vitezele unghiulare:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{y}}{R}; \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{R}{r}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}) = \frac{\dot{y}}{r} + \frac{R}{r}\dot{\theta}. \tag{4}$$

Cu aceste elemente se poate calcula energia cinetică a sistemului (34.9):

$$E = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{\dot{y}^2}{R^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}m\left[(R - r)^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + (R - r)^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2(R - r)\cos\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{(\dot{y} + R\dot{\theta})^2}{r^2}. \tag{5}$$

Funcția de forță (34.16) este:

$$U = Mgx_1 + mgx_2 = mg(R - r)\cos\theta; \tag{6}$$

deci potențialul cinetic (34.15):

$$L = E + U = \left(M + \frac{3}{4}m\right)\dot{y}^2 + m\left[\frac{(R - r)^2}{2} + \frac{R^2}{4}\right]\dot{\theta}^2 +$$

$$+ m\left[(R - r)\cos\theta + \frac{R}{2}\right]\dot{y}\,\dot{\theta}\,mg(R - r)\cos\theta. \tag{7}$$

Ecuațiile lui Lagrange (34.14):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

devin:

$$\left[(R - r)^2 + \frac{R^2}{2}\right]\ddot{\theta} + \left[(R - r)\cos\theta + \frac{R}{2}\right]\ddot{y} + g(R - r)\sin\theta = 0 \tag{8}$$

$$\left(2M + \frac{3}{2}m\right)\dot{y} + m\left[(R - r)\cos\theta + \frac{R}{2}\right]\dot{\theta} = C. \tag{9}$$

Eliminînd pe y între ecuațiile (8) și (9) rezultă ecuația:

$$\left\{(R - r)^2 + \frac{R^2}{2} - \frac{m}{2M + \frac{3}{2}m}\left[(R - r)\cos\theta + \frac{R}{2}\right]^2\right\}\ddot{\theta} + g(R - r)\sin\theta = 0, \tag{10}$$

care în cazul micilor oscilații se reduce la o ecuație liniară de forma $A\ddot{\theta} + B\theta = 0$.

Din ecuația (9) rezultă că impulsul generalizat $\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ se conservă.

Pentru niște condiții inițiale $t = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{y} = 0$, din (9) rezultă prin integrare:

$$y = -\frac{m\left[(R-r)\sin\theta + \frac{R}{2}\theta\right]}{2M + \frac{3}{2}m}.$$

34.11. O bară omogenă AB, de lungime l și de masă M, se mișcă astfel încît capătul ei A culisează pe o bară verticală Oz, și capătul B rămîne pe

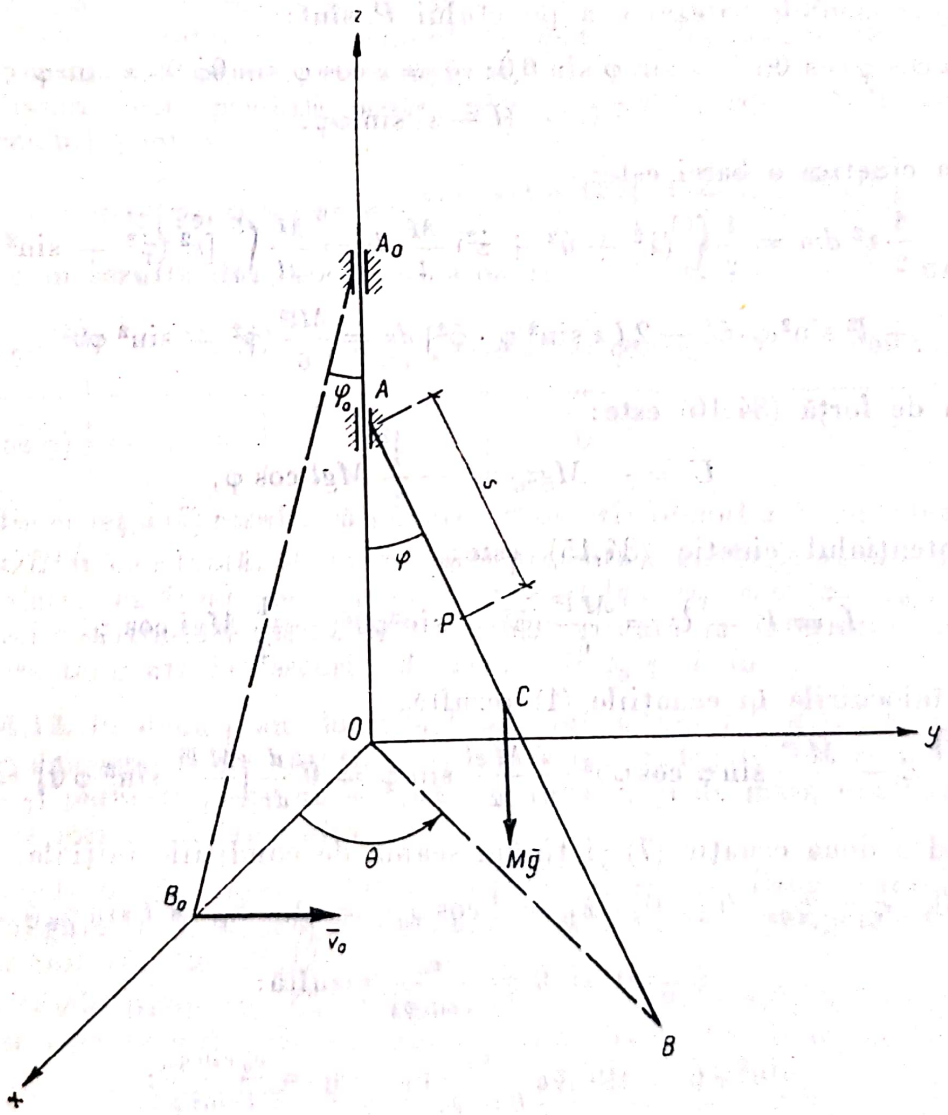


Fig. 34.11

un plan orizontal luciu xOy. Să se studieze mișcarea barei știind că în momentul inițial formează unghiul φ_0 cu verticala, capătul B al barei avînd o viteză inițială $\bar{v}_0$ normală pe planul determinat de AB și Oz (fig. 34.11).

Rezolvare. Bara AB are două grade de libertate; drept parametri se aleg unghiurile $\varphi = \sphericalangle OAB$ și $\theta = \sphericalangle xOB$ (planul xOz corespunzînd poziției inițiale a barei).

Se aplică ecuațiile lui Lagrange (34.14):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \tag{1}$$

Coordonatele unui punct oarecare P al barei situat la distanța $s = AP$ de capătul A sînt:

$$x = s \sin\varphi \cos\theta; \qquad y = s \sin\varphi \sin\theta; \qquad z = (l - s)\cos\varphi \tag{2}$$

deci componentele vitezei v a punctului P sînt:

$$\dot{x} = s\cos\varphi\cos\theta\dot{\varphi} - s\sin\varphi\sin\theta\dot{\theta}; \quad \dot{y} = s\cos\varphi\sin\theta\dot{\varphi} + s\sin\varphi\cos\theta\dot{\theta};$$
$$\dot{z} = -(l - s)\sin\varphi\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Energia cinetică a barei este:

$$E = \int_{AB} \frac{1}{2} v^2\, dm = \frac{1}{2}\int_0^l (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\frac{M}{l}\, ds = \frac{M}{2l}\int_0^l [s^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\cdot\dot{\theta}^2) +$$
$$+ l^2\sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - 2ls\sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2]\, ds = \frac{Ml^2}{6}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2). \tag{4}$$

Funcția de forță (34.16) este:

$$U = -Mgz_C = -\frac{1}{2}Mgl\cos\varphi, \tag{5}$$

deci potențialul cinetic (34.15) este:

$$L = E + U = \frac{Ml^2}{6}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}Mgl\cos\varphi. \tag{6}$$

Făcînd înlocuirile în ecuațiile (1) rezultă:

$$\frac{Ml^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{Ml^2}{3}\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 - \frac{Mgl}{2}\sin\varphi = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{Ml^2}{3}\sin^2\varphi\,\dot{\theta}\right) = 0. \tag{7}$$

Integrînd a doua ecuație (7) și ținînd seamă de condițiile inițiale,

$$t = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = 0, \quad \dot{x}_B = l\cos\varphi_0\dot{\varphi} = 0, \quad y_B = l\sin\varphi_0\dot{\theta} = v_0,$$

$\dot{\varphi} = 0$ și $\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{l\sin\varphi_0}$ rezultă:

$$\sin^2\varphi\,\dot{\theta} = \sin^2\varphi_0\frac{v_0}{l\sin\varphi_0}; \qquad \dot{\theta} = \frac{v_0\sin\varphi_0}{l\sin^2\varphi}; \tag{8}$$

Înlocuind în prima ecuație (7) amplificată cu $2\dot{\varphi}$, integrînd și ținînd seamă de condițiile inițiale, rezultă:

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{v_0^2\sin^2\varphi_0}{l^2\sin^2\varphi} + \frac{3g}{l}\cos\varphi = \frac{v_0^2}{l^2} + \frac{3g}{l^2}\cos\varphi_0$$

Scanned with OKEN Scanner

și după o serie de calcule elementare:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{P_3(\cos\varphi)}{l^2 \sin^2\varphi},$$

unde:

$$P_3(\cos\varphi) = (3gl\cos^2\varphi - v_0^2\cos\varphi - v_0^2\cos\varphi_0 - 3gl)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

este un polinom de gradul al treilea în $\cos\varphi$. Rădăcinile acestui polinom sînt:

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0 \text{ și } \cos\varphi_{2,3} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 12\, v_0^2 g l \cos\varphi_0 + 36\, g^2 l^2}}{6\, g\, l}.$$

Soluția cu semnul + în fața radicalului nu are sens, deoarece $\cos\varphi_3 > 1$ și soluția cu semnul — este totdeauna posibilă, deoarece $-1 \leqslant \cos\varphi_2 < 0$ pentru orice unghi φ_0.

Mișcarea este posibilă pentru $\dot{\varphi}^2 > 0$, deci $P_3(\cos\varphi) > 0$; acest lucru este posibil pentru:

$$\varphi \in \left[\varphi_0,\ \varphi_2 = \arccos\frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 + 12\, v_0^2 g l\cos\varphi_0 + 36\, g^2 l^2}}{6gl}\right],$$

după cum rezultă din tabela următoare:

$\cos\varphi$	-1		$\cos\varphi_2$		$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_0$		1		$\cos\varphi_3$
$P_3(\cos\varphi)$	—	—	— 0	+	0	—	—	0	+ +

Din ecuația (7) rezultă că punctul B descrie planul xOy cu viteză areolară $\Omega = OB^2\,\dot{\theta}$ constantă. Mișcarea barei prezintă o analogie cu mișcarea pendulului sferic, ea fiind posibilă în intervalul $[\varphi_0, \varphi_2]$ sau $[\varphi_2, \varphi_0]$, capătul B al barei descriind în planul xOy o curbă situată în interiorul unei coroane circulare tangentă la cercurile de rază $l\sin\varphi_0$ și $l\sin\varphi_2$.

34.12. Pe două plane lucii înclinate sub unghiurile α și β se găsesc două discuri omogene de greutăți G_1 și G_2 și raze r_1 și r_2 legate printr-un fir înfășurat pe ele și petrecut peste un scripete de rază r_3 și de masă neglijabilă. Să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Sistemul are trei grade de libertate. Drept parametri se vor alege unghiurile θ_1, θ_2 și θ_3 cu care se rotesc discurile și scripetele față de poziția lor inițială (fig. 34.12).

Vitezele punctelor C_1 și C_2 fiind $v_1 = r_3\dot{\theta}_3 + r_1\dot{\theta}_1$, $v_2 = -r_3\dot{\theta} + r_2\dot{\theta}_2$ (r_3 este raza scripetului), energia cinetică (34.9) a sistemului este

$$E = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}v_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2g}\left[\frac{3}{2}G_1 r_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{3}{2}G_2 r_2^2\dot{\theta}_2^2 + (G_1+G_2)r_3^2\dot{\theta}_3^2 + \right.$$

$$\left. + 2G_1 r_1 r_3\theta_1\theta_3 - 2G_2 r_2 r_3\theta_2\theta_3\right]. \qquad (1)$$

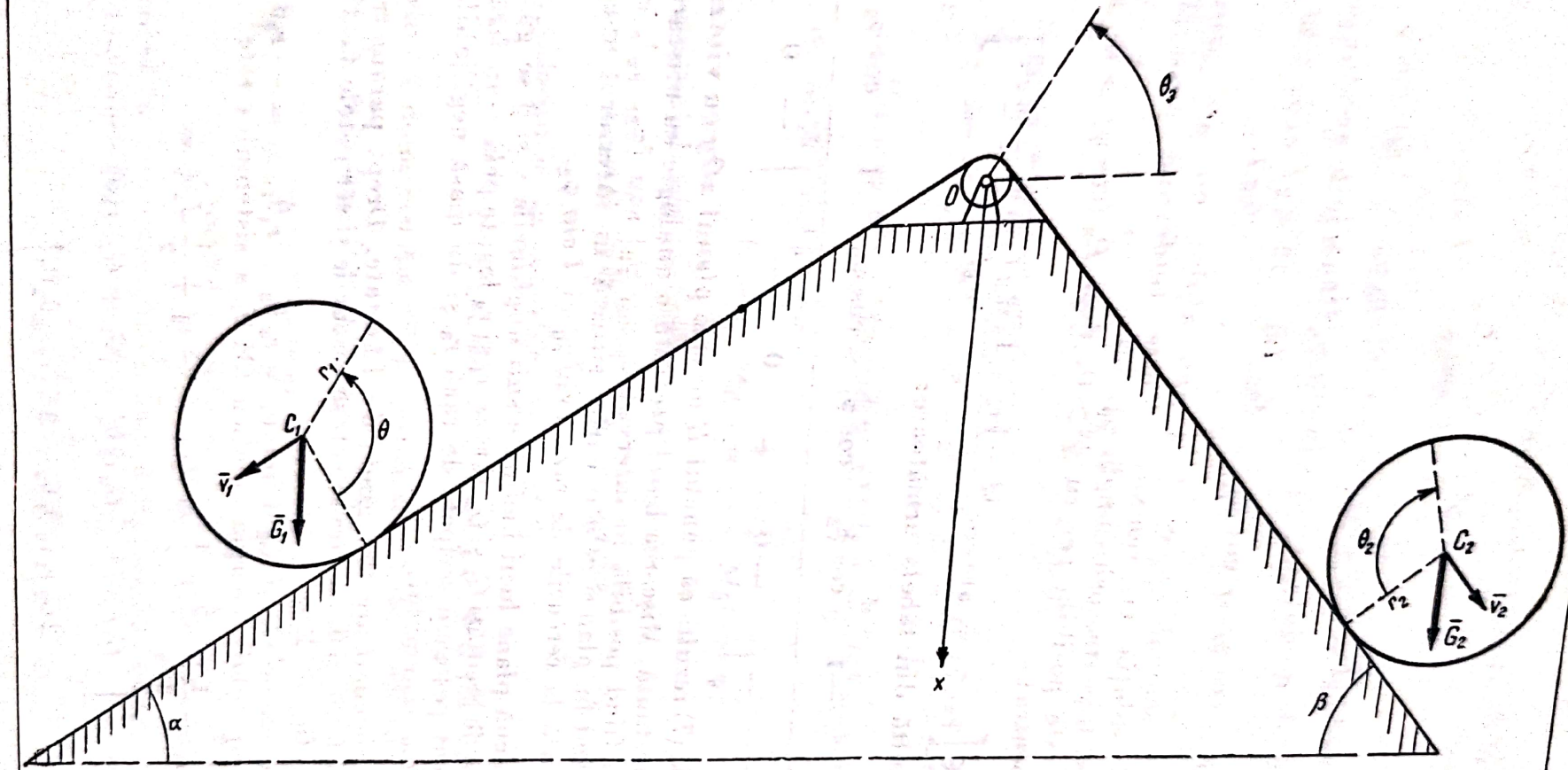

θ_3
O
r_1
C_1
θ
$\bar{v}_1$
$\bar{G}_1$
x
θ_2
C_2
r_2
$\bar{v}_2$
$\bar{G}_2$
α
β

Fig. 34.12

deoarece momentele de inerție ale discurilor față de centrele lor sînt $J_1 = \frac{G_1 r_1^2}{2g}$ și $J_2 = \frac{G_2 r_2^2}{2g}$. Funcția de forță (34.16) este:

$$U = G_1 x_1 + G_2 x_2 = G_1 [x_{10} + (r_3 \theta_3 + r_1 \theta_1) \sin \alpha] + \\ + G_2 [x_{20} + (- r_3 \theta_3 + r_2 \theta_2) \sin \beta]. \tag{2}$$

Ecuațiile lui Lagrange (34.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_k} = \frac{\partial U}{\partial \theta_k} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

capătă, ținînd seamă de (1) și (2), expresiile:

$$\frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{G_1}{g} r_1 r_3 \ddot{\theta}_3 = G_1 r_1 \sin \alpha$$

$$\frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_2^2 \ddot{\theta}_2 - \frac{G_2}{g} r_2 r_3 \ddot{\theta}_3 = G_2 r_2 \sin \beta \tag{4}$$

$$\frac{G_1}{g} r_1 r_3 \ddot{\theta}_1 - \frac{G_2}{g} r_2 r_3 \ddot{\theta}_2 + \frac{G_1 + G_2}{g} r_3^2 \ddot{\theta}_3 = r_3 (G_1 \sin \alpha - G_2 \sin \beta).$$

Rezolvînd sistemul (4) rezultă:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{2 G_2 (\sin \alpha + \sin \beta) g}{3 (G_1 + G_2) r_1}; \qquad \ddot{\theta}_2 = \frac{2 G_1 (\sin \alpha + \sin \beta) g}{3 (G_1 + G_2) r_2};$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{(G_1 \sin \alpha - G_2 \sin \beta) g}{(G_1 + G_2) r_3};$$

accelerațiile punctelor C_1 și C_2 și accelerațiile unghiulare ale discurilor fiind constante. Scripetele are o mișcare de rotație uniformă sau stă pe loc pentru $\ddot{\theta}_3 = 0$, adică $G_1 \sin \alpha = G_2 \sin \beta$.

34.13. Se consideră sistemul din figura 34.13, format din patru scripeți, discuri omogene de greutate G și rază r și dintr-o greutate G. Să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Sistemul are patru grade de libertate; se aleg drept parametri unghiurile θ_1, θ_2, θ_3 și θ_4 cu care se rotesc scripeții față de poziția din momentul inițial. Abscisele centrelor de greutate C_1, C_2, ..., C_5 fiind:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = x_{20} - r\theta_1 + r\theta_2; \quad x_3 = x_{30} + r\theta_3;$$

$$x_4 = x_{40} + r\theta_1 - r\theta_3 + r\theta_4; \quad x_5 = x_{50} + r\theta_1 + r\theta_3, \tag{1}$$

vitezele acestor puncte sînt:

$$\dot{x}_1 = 0; \ \dot{x}_2 = r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2); \ \dot{x}_3 = r\dot{\theta}_1; \ \dot{x}_4 = r(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4); \ \dot{x}_5 = r(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \tag{2}$$

Energia cinetică (34.7), (34.8) și (34.9) este:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g} \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g} \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g} \dot{x}_4^2 + \\ + \frac{1}{2} J_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g} \dot{x}_5^2, \tag{3}$$

în care $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = \frac{Gr^2}{2g}$. Ținînd seamă de (2), (3) devine:

$$E = \frac{Gr^2}{4g}(9\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_2^2 + 5\dot{\theta}_3^2 + 3\dot{\theta}_4^2 - 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 - 4\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4). \qquad (4)$$

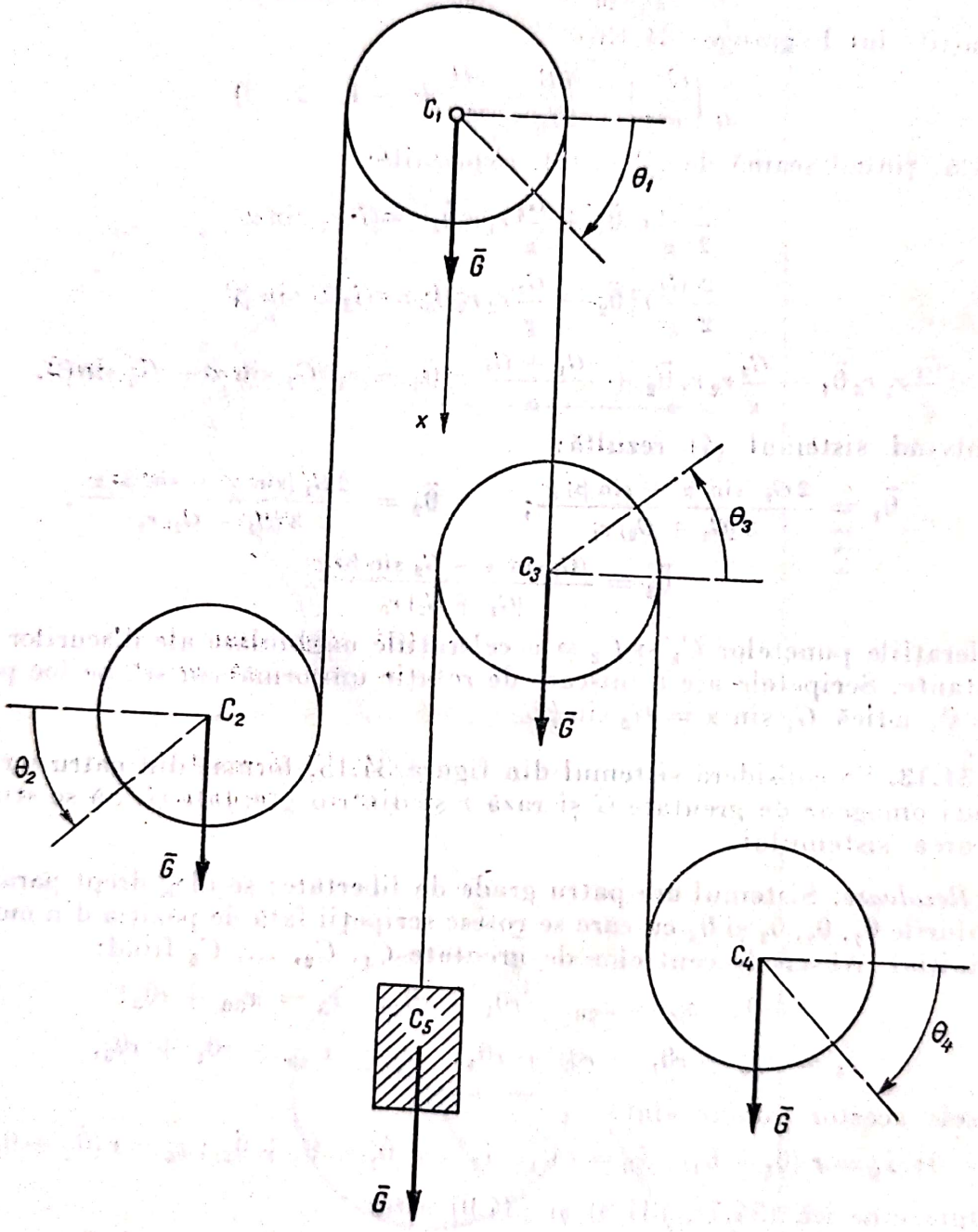


Fig. 34.13

Funcția de forță (34.16) este, ținînd seamă de (1):

$$U = Gx_1 + Gx_2 + Gx_3 + Gx_4 + Gx_5 = Gr\,(2\,\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) + \text{const.} \qquad (5)$$

Ecuațiile lui Lagrange (34.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \dot{\theta}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_k} = \frac{\partial U}{\partial \theta_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

iau, după simplificări, ținînd seamă de (4) și (5), expresiile:

$$\begin{aligned} 9\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{\theta}_2 + 2\ddot{\theta}_4 &= \frac{4g}{r} \\ -2\ddot{\theta}_1 + 3\ddot{\theta}_2 &= \frac{2g}{r} \\ 5\theta_3 - 2\ddot{\theta}_4 &= 0 \\ 2\ddot{\theta}_1 - 2\ddot{\theta}_3 + 3\ddot{\theta}_4 &= \frac{2g}{r}, \end{aligned} \tag{6}$$

de unde:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{116\,g}{193\,r}; \qquad \ddot{\theta}_2 = \frac{206\,g}{193\,r}; \qquad \ddot{\theta}_3 = \frac{28\,g}{193\,r}; \qquad \ddot{\theta}_4 = \frac{70\,g}{193\,r}.$$

Accelerațiile unghiulare ale discurilor și accelerațiile centrelor C_i:

$$\ddot{x}_1 = 0; \quad \ddot{x}_2 = \frac{90}{193}g; \quad \ddot{x}_3 = \frac{116}{193}g; \quad \ddot{x}_4 = \frac{158}{193}g; \quad \ddot{x}_5 = \frac{144}{193}g$$

sînt constante, mișcările punctelor C_i fiind uniform variate.

34.14. O bară omogenă AB de masă M și lungime l este prinsă printr-o articulație în capătul A de o scîndură care alunecă într-un ghidaj vertical, după legea:

$$x_A = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0. \tag{1}$$

Să se studieze mișcarea pendulului.

Rezolvare. Sistemul are un singur grad de libertate, fiind însă supus la legături reonome (34.2), abscisa (1) a punctului A depinzînd expli-

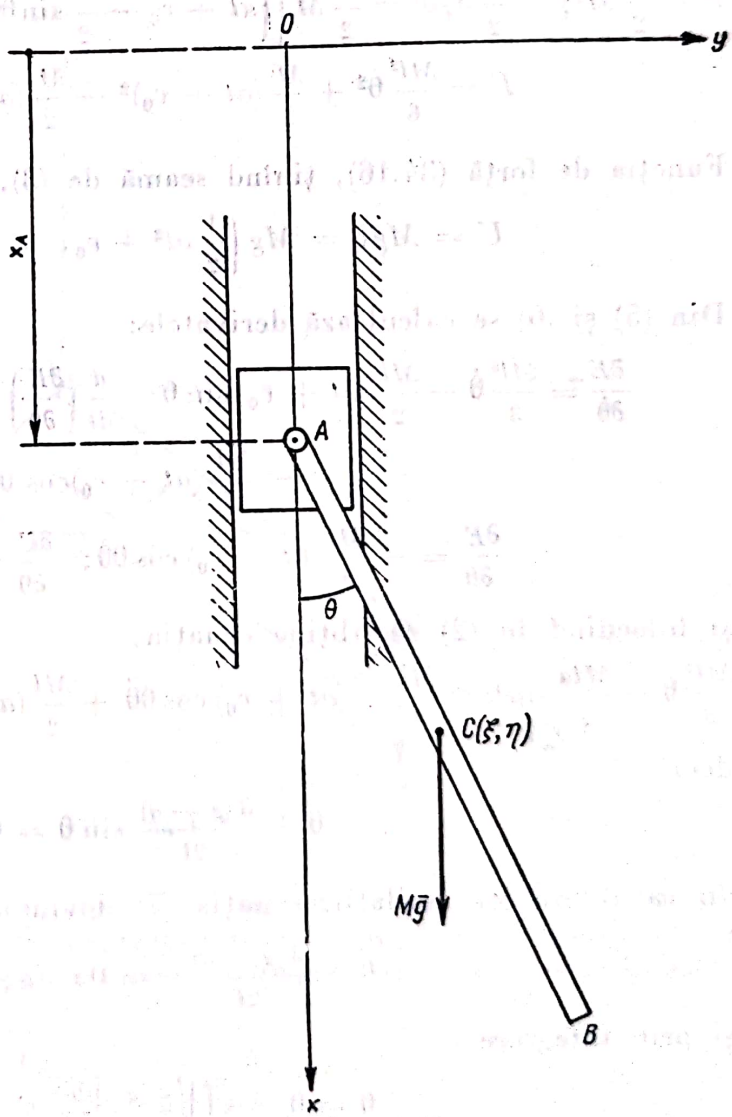


Fig. 34.14

cit de timp. Alegînd drept parametru unghiul θ dintre bară și verticală, ecuația lui Lagrange (34.13) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}; \tag{2}$$

coordonatele centrului de masă C al barei sînt:

$$\xi = x_A + \frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 + \frac{l}{2}\cos\theta \qquad \eta = \frac{l}{2}\sin\theta; \tag{3}$$

deci viteza punctului C este:

$$\bar{v}_C = \dot{\xi}\,\bar{i} + \dot{\eta}\bar{j} = \left(at + v_0 - \frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\bar{i} + \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\bar{j}. \tag{4}$$

Din (34.9) și (4) rezultă energia cinetică a barei:

$$E = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left[\left(at + v_0 - \frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{Ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}(at + v_0)^2 - \frac{M}{2}(at + v_0)\sin\theta\dot{\theta}. \tag{5}$$

Funcția de forță (34.16), ținînd seamă de (3), este:

$$U = Mg\xi = Mg\left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 + \frac{l}{2}\cos\theta\right). \tag{6}$$

Din (5) și (6) se calculează derivatele:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Ml^2}{3}\dot{\theta} - \frac{Ml}{2}(at + v_0)\sin\theta; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{Ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{Mla}{2}\sin\theta -$$

$$- \frac{Ml}{2}(at + v_0)\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = -\frac{Ml}{2}(at + v_0)\cos\theta\dot{\theta}; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{Mgl}{2}\sin\theta$$

și înlocuind în (2) se obține ecuația:

$$\frac{Ml^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{Mla}{2}\sin\theta - \frac{Ml}{2} - (at + v_0)\cos\theta\dot{\theta} + \frac{Ml}{2}(at + v_0)\cos\theta\dot{\theta} = -\frac{Mgl}{2}\sin\theta;$$

deci:

$$\ddot{\theta} + \frac{3(g - a)}{2l}\sin\theta = 0. \tag{7}$$

În cazul micilor oscilații, ecuația (7) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{3(g - a)}{2l}\theta = 0; \quad (a < g) \tag{8}$$

și prin integrare:

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{3(g - a)}{2l}}\,t - \varphi\right), \tag{9}$$

perioada micilor oscilații fiind:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3\,(g - a)}}\,.$$

Pentru $a > g$ micile oscilații au loc în jurul poziției de echilibru $\theta = \pi$, perioada micilor oscilații fiind $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3\,(a - g)}}$, calculul fiind asemănător cu cel din problema (25.4). Pentru $a = g$ din (7) rezultă $\ddot{\theta} = 0$, bara rotindu-se uniform.

34.15. O sferă A de masă m se poate mișca în interiorul unui tub orizontal luciu OB care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul verticalei Oz_1. Să se studieze mișcarea sferei A în tub.

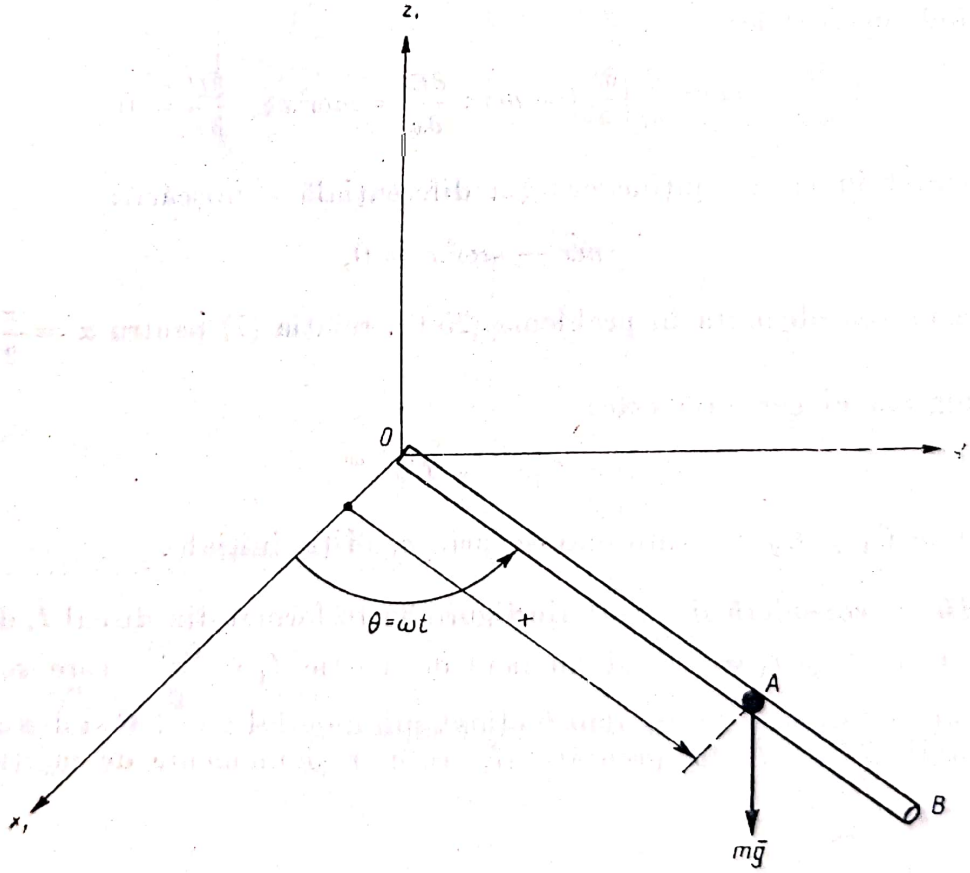


Fig. 34.15

Rezolvare. Punctul A este supus la o legătură reonomă (34.2), poziția tubului fiind determinată prin unghiul $\sphericalangle x_1 OB = \theta = \omega t$. Punctul are un singur grad de libertate; drept parametru se alege distanța $OA = x$. Ecuația lui Lagrange (34.13) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\,. \qquad (1)$$

Coordonatele punctului A față de sistemul de referință fix $Ox_1y_1z_1$ sînt:

$$x_1 = x\cos\omega t \qquad y_1 = x\sin\omega t \qquad z_1 = 0 \tag{2}$$

Energia cinetică a punctului (34.7) este, ținînd seamă de (2):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}_1^2\right) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}\cos\omega t - \omega x\sin\omega t)^2 + \right.$$
$$\left. + (\dot{x}\sin\omega t - \omega x\cos\omega t)^2\right] = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2x^2). \tag{3}$$

Funcția de forță (34.16) este:

$$U = -mgz_1 = 0. \tag{4}$$

Calculînd derivatele:

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{x}} = m\dot{x};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{x}}\right) = m\ddot{x};\quad \frac{\partial E}{\partial x} = m\omega^2x;\quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

și înlocuind în (1) se obține ecuația diferențială a mișcării:

$$m\ddot{x} - m\omega^2x = 0, \tag{5}$$

identică cu cea obținută în problema (25.6), relația (7) pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Integrala ei generală este:

$$x = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t},$$

constantele C_1 și C_2 determinîndu-se prin condiții inițiale.

34.16. Se consideră sistemul din figura 34.16 format din discul *1*, de greutate $2G$, raze R_1 și $r_1 = \frac{3R_1}{4}$ și moment de inerție $J_1 = \frac{GR_1^2}{g}$, care se rostogolește fără să alunece pe un plan înclinat sub unghiul $\alpha = 30°$ și din discul *2* și scripeții *3* și *4* de greutăți G, raze r și momente de inerție $J_2 = J_3 = J_4 = \frac{Gr^2}{2g}$.

Capătul A este tras în jos cu accelerația constantă a.
Să se studieze mișcarea sistemului.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, poziția corpurilor din sistem depinzînd de unghiurile θ_1, și θ_2 de rotire ale discurilor *1* și *2*. Sistemul este supus la o legătură reonomă, deoarece abscisa capătului A al firului este:

$$x_A = x_{AO} + v_0t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1}$$

Unghiurile de rotire ale scripeților *3* și *4* se pot exprima ca funcție de x_A, θ_1 și θ_2. Cînd discul *1* s-a rotit cu unghiul θ_1 centrul său C_1 s-a deplasat pe planul înclinat cu distanța $s_1 = R_1\theta_1$ și de pe discul de rază r_1 s-a desfășurat

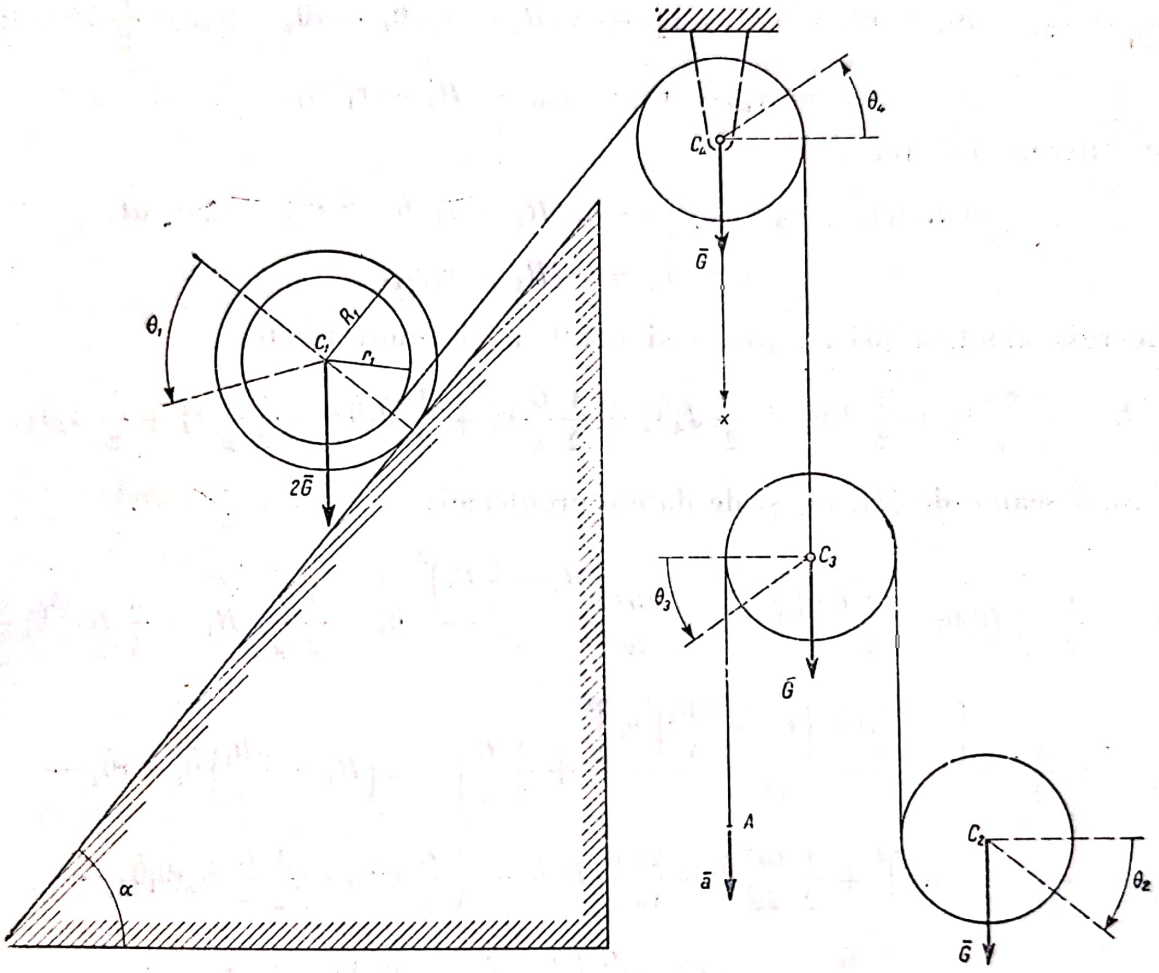


Fig. 34.16

o lungime $r_1\theta_1$ de fir. Capătul C_3 al firului se va ridica deci cu distanța $R_1\theta_1 - r_1\theta_1 = (R_1 - r_1)\,\theta_1$, și scripetele *4* se rotește cu unghiul:

$$\theta_4 = \frac{R_1 - r_1}{r}\theta_1. \tag{2}$$

Expresia abscisei x_A în funcție de unghiurile de rotire fiind:

$$x_A = x_{AO} - r\theta_4 + r\theta_3 = x_{AO} - (R_1 - r_1)\,\theta_1 + r\theta_3, \tag{3}$$

din (1) și (3) rezultă:

$$\theta_3 = \frac{v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + (R_1 - r_1)\,\theta_1}{r} \tag{4}$$

Abscisele centrelor de masă C_1, C_2 și C_3 sînt:

$$x_1 = x_{10} + R_1\theta_1 \sin\alpha;$$

$$x_2 = x_{20} - r\theta_4 - r\theta_3 + r\theta_2 = x_{20} - 2(R_1 - r_1)\theta_1 + r\theta_2 - v_0 t - \frac{1}{2}at^2; \quad (5)$$

$$x_3 = x_{30} - r\theta_4 = x_{30} - (R_1 - r_1)\theta_1,$$

și vitezele lor sînt:

$$v_1 = R_1\dot{\theta}_1; \qquad v_2 = \dot{x}_2 = -2(R_1 - r_1)\dot{\theta}_1 + r\dot{\theta}_2 - v_0 - at;$$

$$v_3 = \dot{x}_3 = -(R_1 - r_1)\theta_1. \quad (6)$$

Energia cinetică (34.7), (34.8) și (34.9) a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}\frac{2G}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_4\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_3^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_2^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2.$$

Ținînd seamă de (2), (4) și de datele problemei:

$$E = \frac{1}{2}\frac{2G}{g}R_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{GR_1^2}{g}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{Gr^2}{2g}\frac{\left(R_1 - \frac{3}{4}R_1\right)^2}{r^2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\left(R_1 - \frac{3}{4}R_1\right)^2\dot{\theta}_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{Gr^2}{2g}\frac{\left[v_0 + at + \left(R_1 - \frac{3R_1}{4}\right)\dot{\theta}_1\right]^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\left[-2\left(R_1 - \frac{3R_1}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + r\dot{\theta}_2 - \right.$$

$$\left. - v_0 - at\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{Gr^2}{2g}\dot{\theta}_2^2 = \frac{27}{16}\frac{G}{g}R_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{3}{4}\frac{G}{g}r^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}\frac{G}{g}R_1 r\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 +$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{G}{g}(v_0 + at)^2 + \frac{G}{g}\left(\frac{5}{8}R_1\dot{\theta}_1 - r\dot{\theta}_2\right)(v_0 + at),$$

deci:

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_1} = \frac{GR_1}{8g}[27\,R_1\dot{\theta}_1 - 4r\dot{\theta}_2 + 5(v_0 + at)]$$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_2} = \frac{Gr}{2g}[-R_1\dot{\theta}_1 + 3\,r\dot{\theta}_2 - 2(v_0 + at)]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{GR_1}{8g}(27\,R_1\ddot{\theta}_1 - 4r\ddot{\theta}_2 + 5a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = \frac{Gr}{2g}(-R_1\ddot{\theta}_1 + 3r\ddot{\theta}_2 - 2a) \quad (7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial\theta_1} = 0; \qquad \frac{\partial E}{\partial\theta_2} = 0. \quad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția de forță (34.16) este, ținînd seamă de (5):

$$U = 2Gx_1 + Gx_2 + Gx_3 + Gx_4 = G\left(2R_1\theta_1 \sin\alpha - \frac{3}{4}R_1\theta_1 + r\theta_2 - v_0 t - \frac{1}{2}at^2\right) + \text{const.},$$

deci:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{GR_1}{4}(8\sin\alpha - 3) = \frac{GR_1}{4}; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = Gr. \tag{9}$$

Înlocuind relațiile (7), (8) în ecuațiile lui Lagrange (34.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_1}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = \frac{\partial U}{\partial \theta_2}$$

se obține, după simplificări:

$$27R_1\ddot\theta_1 - 4r\ddot\theta_2 + 5a = 2g; \qquad -R_1\ddot\theta_1 + 3r\ddot\theta_2 - 2a = 2g,$$

de unde:

$$\ddot\theta_1 = \frac{2g - a}{11R_1}; \quad \ddot\theta_2 = \frac{8g + 7a}{11r}.$$

Accelerațiile centrelor de masă se obțin prin derivarea vitezelor (6):

$$a_1 = R_1\ddot\theta_1 = \frac{2g - a}{11}; \quad a_2 = -2\left(R_1 - \frac{R_1}{4}\right)\ddot\theta_1 + r\ddot\theta_2 - a = \frac{14g - 7a}{22};$$

$$a_3 = -\left(R - \frac{3R_1}{4}\right)\ddot\theta_1 = \frac{a - 2g}{44};$$

ele fiind constante, centrele de masă C_1, C_2 și C_3 au mișcări uniform variate.

34.17. Un regulator de viteze este format din barele omogene $AB = AB' = 2l$ de greutate $2G$ și barele $CD = C'D = l$ de greutate G ($AC = AC' = l$) articulate ca în figura 34.17, din greutățile P și din supapa D de greutate Q. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale acestui sistem, în ipoteza că articulațiile A și D pot aluneca pe verticală. Ce devin aceste ecuații dacă articulația A este fixă? Presupunînd, în acest caz, că regulatorul se rotește în jurul verticalei cu viteza unghiulară constantă ω, să se studieze mișcarea regulatorului determinîndu-se pozițiile de repaus relativ și perioada micilor oscilații în jurul acestor poziții.

Rezolvare. Sistemul are trei grade de libertate, poziția lui fiind determinată prin cota $z = OA$ a articulației A, prin unghiul de rotire θ al pla-

nului vertical în care se găsesc barele regulatorului în raport cu planul vertical fix xOz și prin unghiul φ format de barele AB și AB' cu verticala.

Coordonatele unui punct M de pe bara AB fiind:

$$x_M = \lambda \sin\varphi \cos\theta; \qquad y_M = \lambda \sin\varphi \sin\theta; \qquad z_M = z + \lambda \cos\varphi,$$

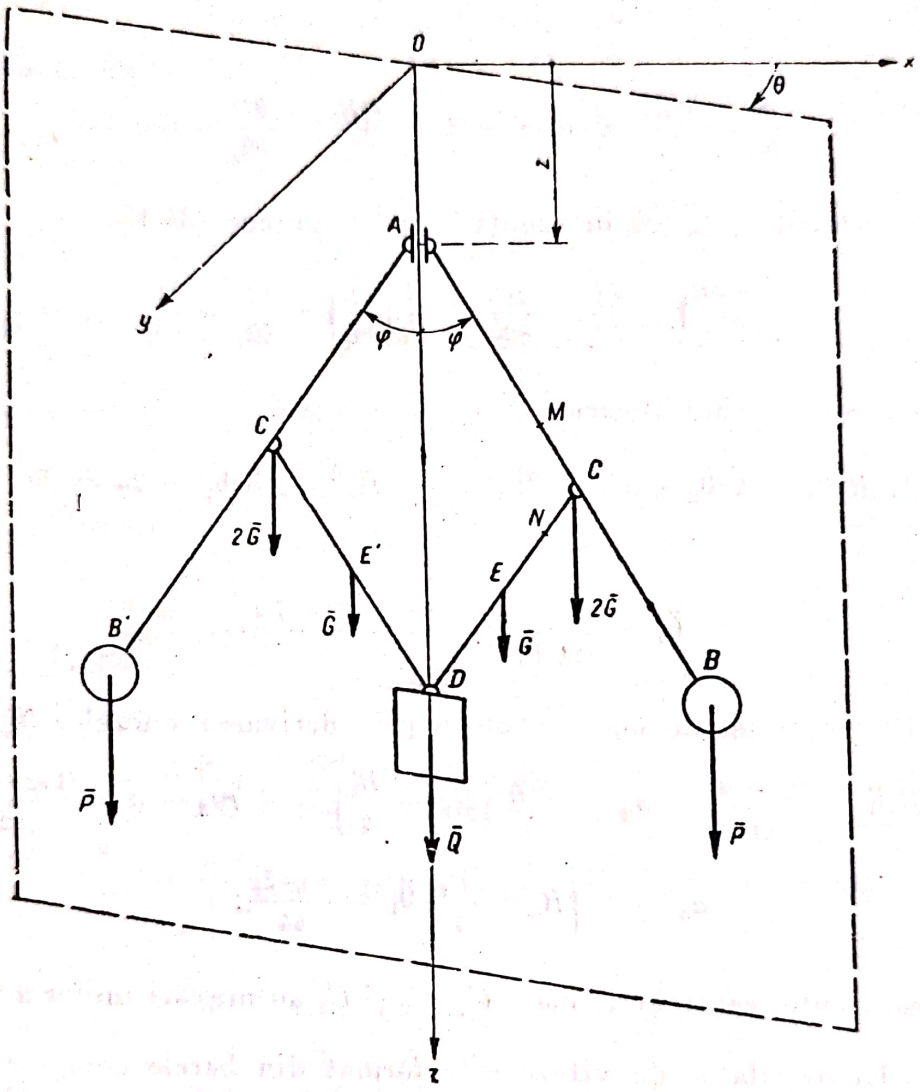


Fig. 34.17

unde $AM = \lambda$, componentele vitezei lui sînt:

$$\dot{x}_M = \lambda\cos\varphi\cos\theta\dot{\varphi} - \lambda\sin\varphi\sin\theta\dot{\theta}; \quad \dot{y}_M = \lambda\cos\varphi\sin\theta\dot{\varphi} + \lambda\sin\varphi\cos\theta\dot{\theta};$$

$$\dot{z}_M = \dot{z} - \lambda\sin\varphi\dot{\varphi},$$

deci:

$$v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2 = \lambda^2\dot{\varphi}^2 + \lambda^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - 2\lambda\dot{z}\sin\varphi\dot{\varphi}.] \qquad (1)$$

Energia cinetică a barei AB este:

$$E_1 = \int_{AB} \frac{1}{2} v_M^2 \, dm = \frac{1}{2} \frac{2G}{2gl} \int_0^{2l} (\lambda^2 \dot{\varphi}^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - 2\lambda \dot{z} \sin \varphi \dot{\varphi}) \, d\lambda$$

$$E_1 = \frac{G}{g}\left[\frac{4}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3} l^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - 2l\dot{z} \sin \varphi \dot{\varphi}\right]. \tag{2}$$

Coordonatele unui punct N de pe bara CD fiind:

$$x_N = \lambda \sin \varphi \cos \theta; \quad y_N = \lambda \sin \varphi \sin \theta; \quad z_N = z + (2l - \lambda) \cos \varphi,$$

unde $DN = \lambda$, componentele vitezei lui sînt:

$$\dot{x}_N = \lambda \cos \varphi \cos \theta \, \dot{\varphi} - \lambda \sin \varphi \sin \theta \, \dot{\theta}; \quad \dot{y}_N = \lambda \cos \varphi \sin \theta \, \dot{\varphi} + \lambda \sin \varphi \cos \theta \, \dot{\theta}; \quad \dot{z}_N = \dot{z} - (2l - \lambda) \sin \varphi \, \dot{\varphi},$$

deci:

$$v_N^2 = \dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2 + \dot{z}_N^2 = \lambda^2 \dot{\varphi}^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 4l(l-\lambda) \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 - 2(2l - \lambda) \dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}. \tag{3}$$

Energia cinetică a barei CD este:

$$E_2 = \int_{CD} \frac{1}{2} v_N^2 \, dm = \frac{1}{2} \frac{G}{gl} \int_0^{l} [\lambda^2 \dot{\varphi}^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 4l(l - \lambda) \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 - 2(2l - \lambda) \dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}] \, d\lambda$$

$$E_2 = \frac{G}{2g}\left[\frac{1}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 + 2l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 - 3l\dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}\right]. \tag{4}$$

Din (1) și (3) rezultă vitezele:

$$v_B^2 = (v_M)_{\lambda = 2l} = 4l^2 \dot{\varphi}^2 + 4l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - 4l\dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}$$

$$v_0^2 = (v_N)_{\lambda = 0} = \dot{z}^2 + 4l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\varphi}^2 - 4l\dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}. \tag{5}$$

Energia cinetică a întregului sistem este:

$$E = 2E_1 + 2E_2 + 2\frac{1}{2}\frac{P}{g} v_B^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g} v_0^2,$$

ținînd seamă de (2), (4) și (5):

$$E = \frac{1}{g}\left[\left(3G + P + \frac{1}{2}Q\right)\dot{z}^2 + (3G + 4P) l^2 \sin^2 \varphi \, \dot{\theta}^2 + (3G + 4P + 2G \sin^2 \dot{\varphi} + 2Q \sin^2 \varphi) l^2 \dot{\varphi}^2 - (7G + 4P + 2Q) l \, \dot{z} \sin \varphi \, \dot{\varphi}\right]. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia de forţă (34.16) este:

$$U = 2G(z_C + z_{C'}) + G(z_E + z_{E'}) + P(z_B + z_{B'}) + Qz_D$$

$$U = (6G + 2P + Q)z + (7G + 4P + 2Q)l\cos\varphi. \tag{7}$$

Ecuaţiile lui Lagrange (34.13) sînt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{8}$$

Din (6) şi (7) avem:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot z} = \frac{1}{g}[(6G + 2P + Q)\dot z - (7G + 4P + 2Q)l\sin\varphi\,\dot\varphi] = \frac{d}{dt}\frac{6G + 2P + Q}{g}\xi,$$

unde:

$$\xi = z + \frac{7G + 4P + 2Q}{6G + 2P + Q}l\cos\varphi$$

este cota centrului de mase al sistemului:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot\theta} = \frac{(6G + 8P)}{g}l^2\sin^2\varphi\,\dot\theta;\ \frac{\partial E}{\partial \dot\varphi} = \frac{6G + 8P + 4(G + Q)\sin^2\varphi}{g}l^2\dot\varphi -$$

$$- \frac{7G + 4P + 2Q}{g}lz\sin\varphi;\ \frac{\partial E}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{1}{g}[(6G + 8P)l^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\theta^2 + 4(G + Q)l^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - (7G +$$

$$+ 4P + 2Q)\dot z\cos\varphi\,\dot\varphi]$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 6G + 2P + Q;\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -(7G + 4P + 2Q)l\sin\varphi.$$

Înlocuind în ecuaţiile (8) rezultă:

$$\ddot\xi = \ddot z - \frac{7G + 4P + 2Q}{6G + 2P + Q}l(\sin\varphi\,\ddot\varphi + \cos\varphi\,\dot\varphi^2) = g \tag{9}$$

$$\sin^2\varphi\,\dot\theta = C \tag{10}$$

$$[6G + 8P + 4(G + Q)\sin^2\varphi]\ddot\varphi + 4(G + Q)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi^2 -$$

$$- (7G + 4P + 2Q)\frac{\ddot z}{l}\sin\varphi - (6G + 8P)\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\theta^2 =$$

$$= -(7G + 4P + 2Q)\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{11}$$

Din ecuaţia (5) rezultă că centrul maselor sistemului are o mişcare de cădere liberă. Din (10) rezultă că punctele sistemului se mişcă cu viteză areolară constantă în raport cu axa verticală Oz. În sfîrşit, din sistemul de ecuaţii (9) — (11) se mai poate obţine o integrală primă, deoarece energia mecanică a sistemului $E - U = \text{const}$.

Dacă articulația A este fixă, $z = 0$, sistemul are două grade de libertate, ecuația (9) nu mai are sens, mișcarea fiind dată de ecuațiile:

$$\sin^2 \varphi \, \dot{\theta} = C \tag{10}$$

$$[6G + 8P + 4(G + Q) \sin^2 \varphi]\ddot{\varphi} + 4(G + Q) \sin \varphi \cos \varphi \, \dot{\varphi}^2 -$$

$$- (6G + 8P) \sin \varphi \cos \varphi \, \dot{\theta}^2 = - (7G + 4P + 2Q) \frac{g}{l} \sin \varphi. \tag{11'}$$

Aplicînd ecuația (11') cu $\dot{\varphi}$ și ținînd seamă de (10) se obține prin integrare:

$$[3G + 4P + 2(G + Q) \sin^2 \varphi] \, \dot{\varphi}^2 + \frac{(3G + 4P) C^2}{\sin^2 \varphi} -$$

$$- (7G + 4P + 2Q) \frac{g}{l} \cos \varphi = C_1, \tag{12}$$

deci:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{P_3 (\cos \varphi)}{[3 G + 4P + 2(G + Q) \sin^2 \varphi] \sin^2 \varphi}, \tag{13}$$

unde:

$$P_3 (\cos \varphi) = (1 - \cos^2 \varphi) \left[C_1 + (7G + 4P + 2Q) \frac{g}{l} \cos \varphi\right] -$$

$$- (3G + 4P) C^2. \tag{14}$$

Mișcarea este posibilă pentru $\dot{\varphi}^2 > 0$, adică pentru $P_3 (\cos \varphi) > 0$. Cum pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$, $P_3 (\cos \varphi) = - (3G + 4P) C^2 < 0$, și pentru $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ (în momentul inițial), $\dot{\varphi}^2 \geqslant 0$, rezultă că $P_3 (\cos \varphi)$ are o rădăcină $\varphi_1 \in (0, \varphi_0)$ și una $\varphi_2 \in (\varphi_0, \pi)$, mișcarea avînd loc pentru:

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2. \tag{15}$$

Traiectoriile punctelor sistemului se găsesc între două arcuri paralele definite de valorile $\varphi = \varphi_1$ și $\varphi = \varphi_2$ și sînt tangente la aceste cercuri paralele, deoarece pentru $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ rezultă $\dot{\varphi} = 0$. În plus, punctele respective respectă legea ariilor în raport cu axa Oz, așa cum reiese din ecuația (10). Se vede astfel analogia între această mișcare și aceea a pendulului sferic.

În ultimul caz, $z = 0$ și $\theta = \omega t + \theta_0$, $\dot{\theta} = \omega$, legătura fiind reonomă. Sistemul are un singur grad de libertate, ecuația (10) nu are sens și ecuația (11') devine:

$$[6G + 8P + 4(G + Q) \sin^2 \varphi]\ddot{\varphi} + 4(G + Q) \sin \varphi \cos \varphi \, \dot{\varphi}^2 -$$

$$- (6G + 8P) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = - (7G + 4P + 2Q) \frac{g}{l} \sin \varphi. \tag{11''}$$

În pozițiile de repaus relativ $\varphi = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$; deci din (11'') rezultă soluțiile:

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{și} \quad \varphi_2 = \arccos \frac{(7G + 4P + 2Q) g}{(6G + 8P) \omega^2 l}, \tag{16}$$

soluția $\varphi = \pi$ neavînd sens fizic și soluția φ_2 fiind posibilă pentru $\omega^2 \geqslant \frac{(7G + 4P + 2Q)g}{(6G + 8P)l}$. Pentru mici oscilații în jurul poziției $\varphi_1 = 0$, ecuația (11″) devine:

$$(6G + 8P)\ddot{\varphi} + \left[(7G + 4P + 2Q)\frac{g}{l} - (6G + 8P)\omega^2\right]\varphi = 0, \qquad (17)$$

mici oscilații avînd perioada și pulsația:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}; \qquad \nu_1^2 = \frac{(7G + 4P + 2Q)g}{(6G + 8P)l} - \omega^2, \qquad (18)$$

ele fiind posibile pentru $\omega^2 \leqslant \frac{(7G + 4P + 2Q)g}{(6G + 8P)l}$. Dacă această condiție nu este îndeplinită, micile oscilații au loc în jurul poziției φ_2. Notînd $\varphi = \varphi_2 + \varepsilon$, ecuația (11″) devine:

$$[6G + 8P + 4(G + Q)\sin^2\varphi_2]\ddot{\varepsilon} + \left[(6G + 8P)\omega^2 - \frac{(7G + 4P + 2Q)^2 g^2}{(6G + 8P)\omega^2 l^2}\right]\varepsilon = 0 \qquad (19)$$

perioada și pulsația micilor oscilații fiind:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\nu_2}; \qquad \nu_2^2 = \frac{(6G + 8P)^2\omega^4 l^2 - (7G + 4P + 2Q)^2 g^2}{(6G + 8P)\left[(6G + 8P) + 4(G + Q)\sin^2\varphi_2\right]\omega^2 l^2}. \qquad (20)$$

34.18. Să se studieze mișcarea unei patine pe o suprafață orizontală lucie, presupunînd patina acționată de forțe verticale constante. În momentul inițial viteza centrului patinei este v_0 și viteza lui unghiulară ω_0.

Rezolvare. Contactul dintre patină și gheață se face în lungul dreptei AB, a cărei poziție în plan este determinată prin coordonatele ξ și η ale centrului său C și prin unghiul θ (fig. 34.18, *a*). Coordonatele generalizate ξ, η, θ nu sînt independente, deoarece patina poate aluneca doar în lungul ei, neputînd avea deplasări laterale; deci:

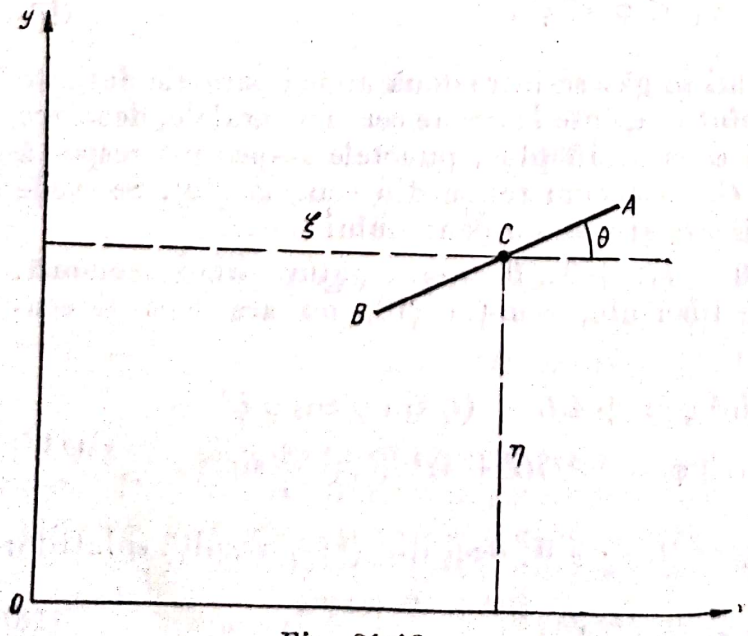


Fig. 34.18, *a*

$$d\eta = d\xi \operatorname{tg}\theta. \qquad (1)$$

Relația (1) este neolonomă, adică nu poate fi pusă sub o formă întreagă (34.2):

$$f(\xi, \eta, \theta) = 0,$$

deoarece, în acest caz, ar rezulta că pentru o anumită poziție C_1 (ξ_1, η_1) ar corespunde un unghi θ_1 bine determinat. Acest lucru nu este posibil, deoarece pornind

dintr-o poziție C_0 (ξ_0, η_0, θ_0) urmînd două curbe diferite Γ și Γ' se poate ajunge în C_1 sub unghiurile θ_1 sau $\theta_1' \neq \theta_1$ (fig. 34.18, *b*).

Sistemul are deci două grade de libertate și este supus legăturii neolonome:

$$d\xi \operatorname{tg}\theta - d\eta = 0, \tag{2}$$

legătură de tipul (34.1), avînd coeficienții:

$$c_{1\xi} = \operatorname{tg}\theta; \qquad c_{1\eta} = -1; \qquad c_{1\theta} = 0. \tag{3}$$

Energia cinetică (34.9) a patinei este:

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2, \tag{4}$$

unde M este masa patinei, și J_c — momentul de inerție față de o axă trecînd prin C normală pe planul xOy.

Pentru orice deplasare a patinei, lucrul mecanic virtual (34.10) al forțelor verticale este nul $\delta L = Q_\xi \delta\xi + Q_\eta \delta\eta + Q_\theta \delta\theta$, deci forțele generalizate sînt nule:

$$Q_\xi = 0 \qquad Q_\eta = 0 \qquad Q_\theta = 0. \tag{5}$$

Ecuațiile lui Lagrange (34.18):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \xi} = Q_\xi + \lambda_1 c_{1\xi} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \eta} = Q_\eta + \lambda_1 c_{1\eta};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = Q_\theta + \lambda_1 c_{1\theta}$$

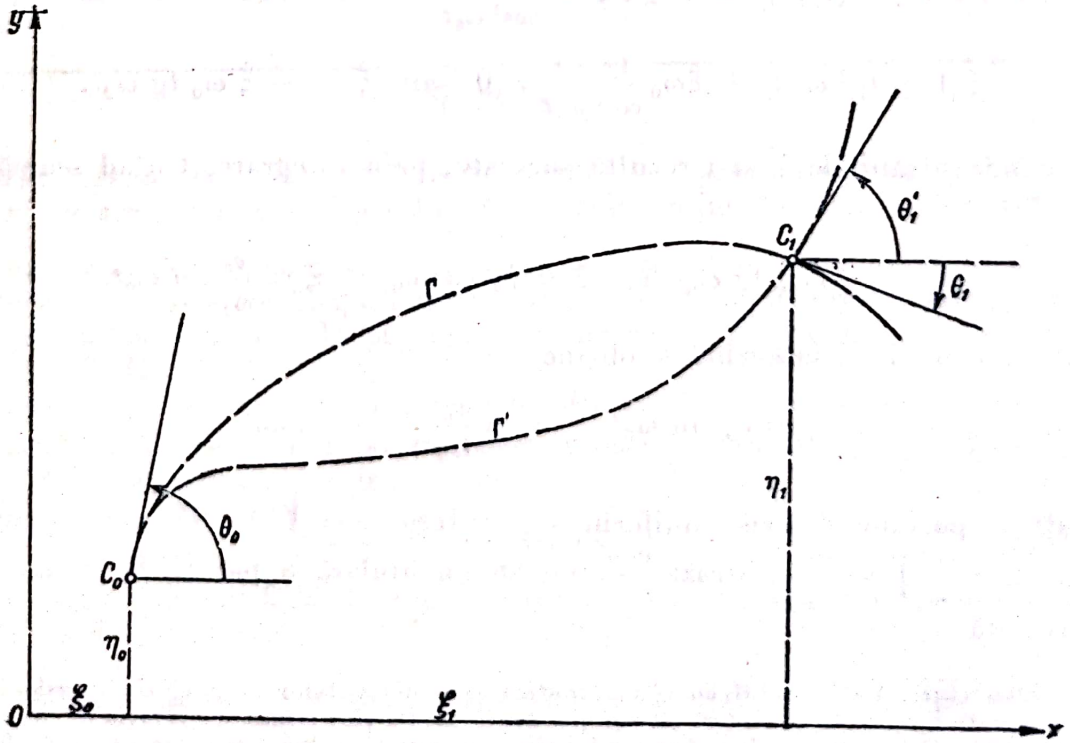


Fig. 34.18, *b*

devin, ținînd seamă de (3), (5) și de expresiile derivatelor:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}} = M\dot{\xi};\quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}} = M\dot{\eta};\quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = J_c\dot{\theta};\quad \frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$$

$$M\ddot{\xi} = \lambda_1 \operatorname{tg}\theta;\qquad M\ddot{\eta} = -\lambda_1;\qquad J_c\ddot{\theta} = 0. \tag{6}$$

Din relațiile (6) și din relația (34.19) dintre vitezele generalizate:

$$\dot{\eta} = \dot{\xi}\operatorname{tg}\theta \tag{7}$$

care se obține împărțind relația (1) la dt se pot determina cele patru necunoscute ale problemei ξ, η, θ și multiplicatorul lui Lagrange λ_1. Ținînd seamă de condițiile inițiale:

$$t = 0;\ \dot{\xi} = v_0,\ \dot{\eta} = 0,\ \dot{\theta} = \omega_0,\quad \xi = 0,\ \eta = 0,\ \theta = 0 \tag{8}$$

(alegerea originii O în poziție inițială și a axei Ox pe direcția inițială a patinei nu particularizează prin nimic problema), din ultima ecuație (6) rezultă:

$$\ddot{\theta} = 0,\qquad \dot{\theta} = \omega_0,\qquad \theta = \omega_0 t. \tag{9}$$

Se elimină multiplicatorul λ_1 între primele ecuații (6), $M\ddot{\xi} = -M\ddot{\eta}\operatorname{tg}\theta$; deci:

$$\ddot{\xi} + \ddot{\eta}\operatorname{tg}\omega_0 t = 0. \tag{10}$$

Derivînd relația (7), $\ddot{\eta} = \ddot{\xi}\operatorname{tg}\omega_0 t + \dfrac{\dot{\xi}\omega_0}{\cos^2\omega_0 t}$ și înlocuind în (10) se obține:

$$\ddot{\xi}(1 + \operatorname{tg}^2\omega_0 t) + \dot{\xi}\omega_0\frac{\operatorname{tg}\omega_0 t}{\cos^2\omega_0 t} = 0 \quad\text{sau}\quad \ddot{\xi} = -\dot{\xi}\,\omega_0\operatorname{tg}\omega_0 t.$$

Separînd variabilele $\dot{\xi}$ și t rezultă succesiv, prin integrare, ținînd seamă și de (8):

$$\frac{d\dot{\xi}}{\dot{\xi}} = -\omega_0\operatorname{tg}\omega_0 t\,dt;\quad \dot{\xi} = \dot{v}_0\cos\omega_0 t;\quad \xi = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{11}$$

Înlocuind în (7) și integrînd se obține:

$$\dot{\eta} = v_0\sin\omega_0 t\qquad \eta = \frac{v_0}{\omega_0}(1 - \cos\omega t). \tag{12}$$

Centrul patinei descrie uniform cu viteza $v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = v_0$, cercul $\xi^2 + \left(\eta - \dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)$ de rază $\dfrac{v_0}{\omega_0}$, viteza unghiulară a patinei $\dot{\theta} = \omega_0$ fiind constantă.

Observație. La calculul energiei cinetice și a derivatelor ei parțiale coordonatele generalizate ξ, η, θ se consideră ca independente fără a ține seamă de relația de legătură neolonomă (2) sau (7). Abia după înlocuirea în ecuațiile lui Lagrange se poate folosi relația (7).

Scanned with OKEN Scanner

34.19. Un car cu două roți care stătea în repaus este acționat de o forță constantă F aplicată la distanța e de axa longitudinală Δ a carului (fig. 34.19,*a*). Să se studieze mișcarea carului cunoscînd masa lui M, momentul lui de inerție J, față de o axă verticală trecînd prin centrul lui C, masele roților m, discuri omogene de rază r, precum și dimensiunile $2a$ și $2b$. Roțile se rostogolesc fără

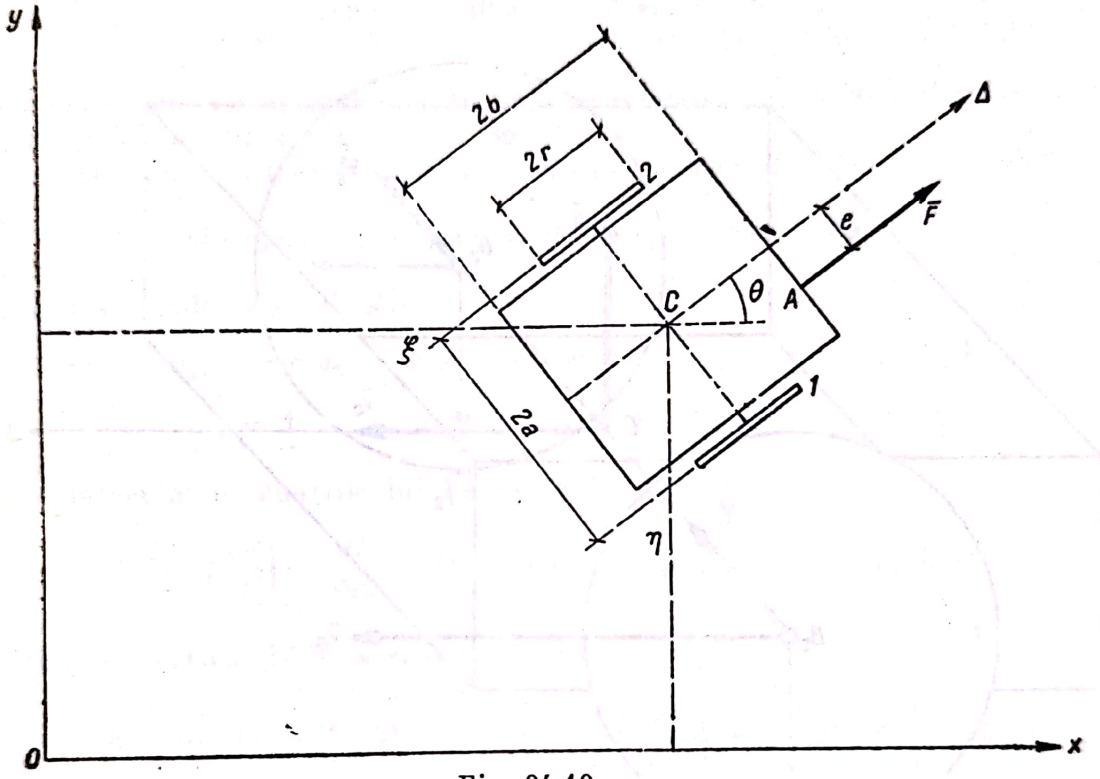


Fig. 34.19, *a*

să alunece și se neglijează frecările de rostogolire, precum și cele din fusul roților. De asemenea se neglijează rotirea carului în jurul axelor roților.

Rezolvare. Poziția carului la un moment dat este determinată prin cinci parametri, coordonatele ξ, η ale centrului C al carului, unghiul θ dintre axa longitudinală a carului și Ox, și unghiurile de rotire proprii φ_1 și φ_2 ale roților *1* și *2* (fig. 34.19, *a*).

Acești parametri nu sînt independenți din următoarele motive:

Carul nu poate luneca lateral, deci viteza centrului C, $\bar{v}_c = \dot{\xi}\bar{i} + \dot{\eta}\bar{j}$ are direcția axei longitudinale Δ adică:

$$\dot{\xi} \sin \theta - \dot{\eta} \cos \theta = 0. \tag{1}$$

Roțile se rostogolesc fără să lunece, deci vitezele punctelor de contact cu solul I_1 și I_2 sînt nule:

$$\bar{v}_{I_1} = \bar{v}_{B_1} + (\bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}}_1) \times \overline{B_1 I_1} = \bar{v}_c + (\bar{\dot{\theta}} \times \overline{CB_1}) + (\bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}}_1) \times \overline{B_1 I_1} = 0$$

$$\bar{v}_{I_2} = \bar{v}_{B_2} + (\bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\varphi}}_2) \times \overline{B_2 I_2} = \bar{v}_c + (\dot{\theta} \times \overline{CB_2}) + (\dot{\theta} + \bar{\dot{\varphi}}_2) \times \overline{B_2 I_2} = 0$$

unde

$$\dot{\bar{\theta}} \times \overline{CB_1} = a\dot{\theta}\bar{u}, \quad \dot{\theta} \times \overline{CB_2} = -a\dot{\theta}\bar{u}, \quad \dot{\bar{\theta}} \times \overline{B_1I_1} = \dot{\bar{\theta}} \times \overline{B_2I_2} = 0$$

$$\dot{\bar{\varphi}}_1 \times \overline{B_1I_1} = -r\dot{\varphi}_1\bar{u}, \quad \dot{\bar{\varphi}}_2 \times \overline{B_2I_2} = -r\dot{\varphi}_2\bar{u}$$

$$(\bar{u} = \text{vers}\,\Delta = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}).$$

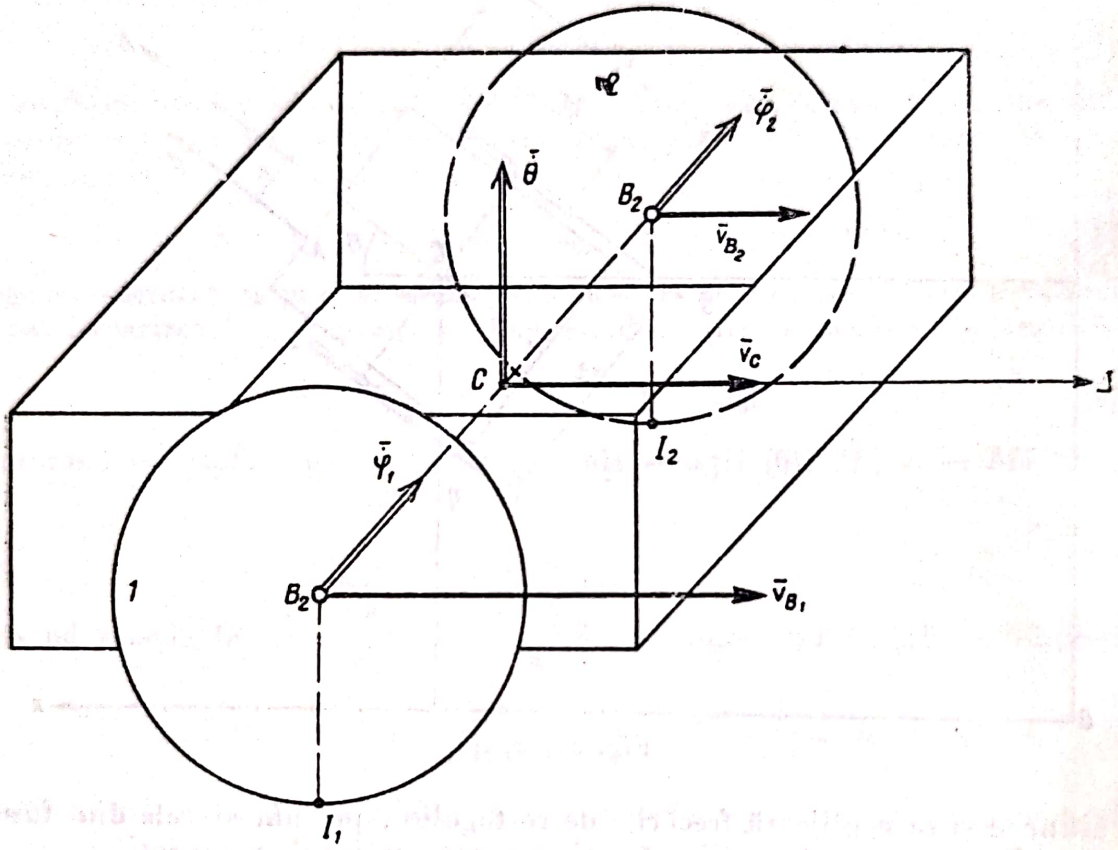


Fig. 34.19, *b*

Proiectînd aceste relații pe axele x și y rezultă:

$$\dot{\xi} + a\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\varphi}_1\cos\theta = 0 \qquad \dot{\xi} - a\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}_2\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{\eta} + a\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\varphi}_1\sin\theta = 0 \qquad \dot{\eta} - a\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\varphi}_2\sin\theta = 0. \qquad (3)$$

Dintre cele cinci relații de legătură (1), (2) și (3) numai trei sînt independente, deoarece din (1) și (3) rezultă relațiile (2). Să se scadă relațiile (2). Se obține:

$$2a\dot{\theta} - r(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0, \qquad (4)$$

relație olonomă, deoarece prin integrare se poate pune sub forma întreagă (34.2):

$$2a\theta - r(\varphi_1 - \varphi_2) + C = 0.$$

Înseamnă deci că poziția sistemului se poate exprima în funcție doar de patru din cei cinci parametri. Drept coordonate generalizate se aleg pe $\xi = q_1$, $\eta = q_2$, $\theta = q_3$, $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = q_4$. Între aceste coordonate vor fi relațiile de neolonomie (1) și (2) care devin, în noile notații:

$$\dot{q}_1 \sin q_3 - \dot{q}_2 \cos q_3 = 0 \qquad \dot{q}_1 - r\dot{q}_4 \cos q_3 = 0. \tag{5}$$

A doua relație s-a obținut prin însumarea relațiilor (2). Sistemul va avea deci două grade de libertate.

Sub forma diferențială (34.1′) aceste relații de neolonomie sînt:

$$\sin q_3 dq_1 - \cos q_3 dq_2 = 0 \qquad dq_1 - r \cos q_3 dq_4 = 0 \tag{6}$$

din care rezultă coeficienții:

$$c_{11} = \sin q_3 \qquad c_{12} = -\cos q_3 \qquad c_{13} = 0 \qquad c_{14} = 0 \tag{7}$$

$$c_{21} = 1 \qquad c_{22} = 0 \qquad c_{23} = 0 \qquad c_{24} = -r \cos q_3$$

care intervin în ecuațiile lui Lagrange (34.18):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k + \lambda_1 c_{1k} + \lambda_2 c_{2k} \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Energia cinetică (34.9) a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} m v_B^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2\right).$$

Pentru calculul energiei cinetice a unei roți în mișcarea față de centrul maselor B_i s-a folosit relația (29). $E = \frac{1}{2}(J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2)$, cunoscută de la mișcarea solidului cu un punct fix. În cazul nostru, axele principale de inerție ale roților sînt (1) $\equiv B_iC$, $\omega_1 = \dot{\varphi}_i$, $J_1 = \frac{mr^2}{2}$; (2) $\equiv B_iJ_i$, $J_2 = \frac{mr^2}{4}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$; (3) $\equiv B_i\Delta$, $J_3 = \frac{mr^2}{4}$, $\omega_3 = 0$. Cum $v_C^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$, $\dot{\theta}^2 = \dot{q}_3^2$, $\bar{v}_{B1} = \bar{v}_C + \dot{\theta} \times \overline{CB_1} = (\dot{q}_1 + a\dot{q}_3 \cos \dot{q}_3)\vec{i} + (\dot{q}_2 + a\dot{q}_3 \sin q_3)\vec{j}$, $\bar{v}_{B2} = (\dot{q}_1 - a\dot{q}_3 \cos q_3)\vec{i} + (\dot{q}_2 + a\dot{q}_3 \sin q_3)\vec{j}$,

$$\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}[(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2] = 2\dot{q}_4 + 2\frac{a^2}{r^2}\dot{q}_3^2, \text{ deoarece } \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 =$$

$$= \frac{2a}{r}\dot{\theta} = \frac{2a}{r}\dot{q}_3.$$

înlocuind în (9) expresia energiei cinetice este:

$$E = \frac{1}{2}(M + 2m)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}\left(J + 3ma^2 + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{q}_4^2. \quad (10)$$

Lucrul mecanic virtual (34.10) al forțelor efectiv aplicate carului este:

$$\delta\mathfrak{L} = \bar{F}\delta\bar{r}_A = F\cos\theta\,\delta x_A + F\sin\theta\;\delta y_A = F\cos q_3\delta x_A + F\sin q_3\delta y_A \quad (11)$$

forțele verticale având lucrul mecanic nul.

Cum $x_A = \xi + b\cos\theta + e\sin\theta = q_1 + b\cos q_3 + e\sin q_3$

$$y_A = \eta + b\sin\theta - e\cos\theta = q_2 + b\sin q_3 - e\cos q_3$$

$$\delta x_A = \delta q_1 - b\sin q_3\delta q_3 + e\cos q_3\delta q_3 \quad \delta y_A = \delta q_2 + b\cos q_3\delta q_3 + e\sin q_3\delta q_3$$

relația (11) devine:

$$\delta\mathfrak{L}_A = F\cos q_3\delta q_1 + F\sin q_3\delta q_3 + Fe\delta q_3 \quad (12)$$

forțele generalizate (34.11) fiind:

$$Q_1 = F\cos q_3 \qquad Q_2 = F\sin q_3 \qquad Q_3 = Fe \qquad Q_4 = 0. \quad (13)$$

Înlocuind în ecuațiile lui Lagrange (8) și ținînd seamă de derivatele

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = (M + 2m)\dot{q}_1 \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = (M + 2m)\dot{q}_2 \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_3} = \left(J + 3ma^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\dot{q}_3$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_4} = mr^2\dot{q}_4, \quad \frac{\partial E}{\partial q_1} = \frac{\partial E}{\partial q_2} = \frac{\partial E}{\partial q_3} = \frac{\partial E}{\partial q_4} = 0$$

se obține sistemul:

$$\begin{aligned}
(M + 2m)\ddot{q}_1 &= F\cos q_3 + \lambda_1\sin q_3 + \lambda_2 \\
(M + 2m)\ddot{q}_2 &= F\sin q_3 - \lambda_1\cos q_3 \\
\left(J + 3ma^2 + \frac{1}{2}mr^2\right)\ddot{q}_3 &= Fe \\
mr^2\ddot{q}_4 &= -\lambda_2 r\cos q_3.
\end{aligned} \quad (14)$$

Din aceste ecuații și cele două ecuații (5) se determină cele șase necunoscute, coordonatele q_1, q_2, q_3 și q_4 și multiplicatorii lui Lagrange λ_1 și λ_2. Amplificînd prima ecuație (14) cu $\cos q_3$, a doua ecuație cu $\sin q_3$ și a patra cu $\frac{1}{r}$ și însumîndu-le rezultă:

$$(M + 2m)(\ddot{q}_1\cos q_3 + q_2\sin q_3) + mr\ddot{q}_4 = F. \quad (15)$$

Derivînd relațiile (5) se obține, după calcule elementare:

$$\ddot{q}_1 = r\ddot{q}_4 \cos q_3 - r\dot{q}_3\dot{q}_4 \sin q_3 \qquad \ddot{q}_2 = r\ddot{q}_4 \sin q_3 + r\dot{q}_3\dot{q}_4 \cos q_3$$

și înlocuind în (15) rezultă:

$$(M + 3m)\, r\ddot{q}_4 = F \qquad \ddot{q}_4 = \frac{F}{r\,(M + 3m)}$$

și prin integrare ținînd seamă de condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad \xi = q_1 = 0, \quad \eta = q_2 = 0, \quad \theta = q_3 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad q_4 = 0,$$
$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0, \tag{16}$$

deoarece sistemul era în repaus:

$$\dot{q}_4 = \frac{Ft}{r\,(M + 3m)} \qquad q_4 = \frac{Ft^2}{2r\,(M + 3m)}\,. \tag{17}$$

Integrînd a treia ecuație (14) rezultă:

$$\dot{\theta} = q_3 = \frac{Fet}{J + 3ma^2 + \frac{1}{2}mr^2} \qquad \theta = q_3 = \frac{Fet^2}{2J + 6ma^2 + mr^2}\,. \tag{18}$$

În sfîrșit, înlocuind în (5) după calcule elementare se obține:

$$\xi = q_1 = \frac{2J + 6ma^2 + mr^2}{2\,(M + 3m)\,e} \sin \frac{Fet^2}{2J + 6ma^2 + mr^2}$$
$$\eta = q_2 = \frac{2J + 6ma^2 + mr^2}{2\,(M + 3m)\,e} \left(1 - \cos \frac{Fet^2}{2J + 6ma^2 + mr^2}\right). \tag{19}$$

Punctul C descrie cercul $\xi^2 + (\eta - R)^2 = R^2$ de rază:

$R = \dfrac{2J + 6ma^2 + mr^2}{2\,(M + 3m)\,e}$, mișcarea fiind uniform accelerată cu viteza $v_c = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \dfrac{Ft}{M + 3m}$ și accelerația tangențială $a_{c\tau} = \dfrac{F}{M + 3m}$. Accelerațiile unghiulare $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ și $\ddot{\varphi}_2$ sînt și ele constante.

Observație. La calculul energiei cinetice, al derivatelor ei parțiale și al forțelor generalizate, se presupun coordonate generalizate q_1, q_2, q_3 și q_4 ca fiind independente fără să se țină seamă de relațiile neolonome de legătură (5) sau (6). Se folosește în schimb de relația de legătură olonomă (4).

După înlocuirea în ecuațiile lui Lagrange se folosesc relațiile de legătură neolonome (5).

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME NEREZOLVATE

34.20. Să se studieze mișcarea unui pendul simplu format dintr-un punct A de masă m, legat printr-un fir de lungime l de punctul fix O (problema pendulului sferic).

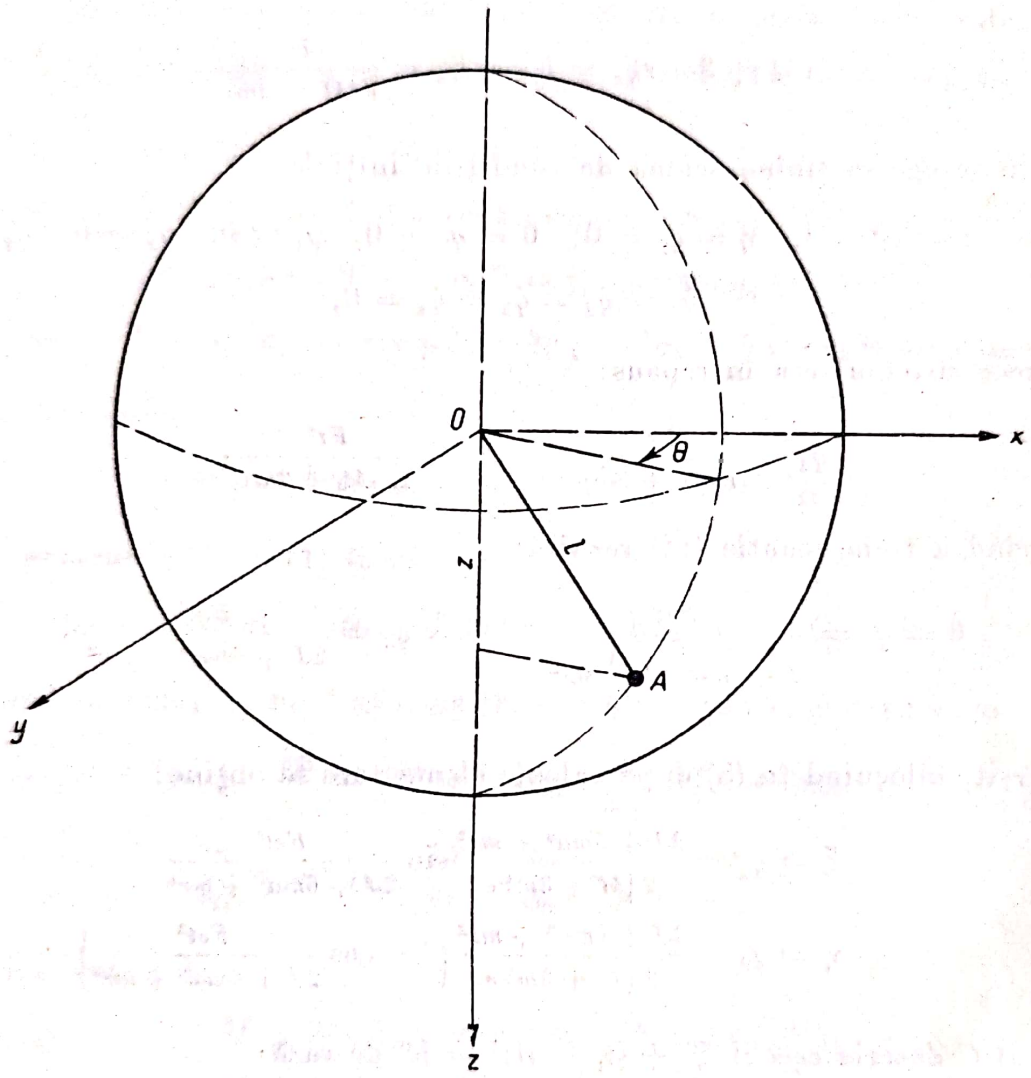


Fig. 34.20

Răspuns. Alegînd drept parametru cota z a punctului A și unghiul θ (fig. 34.20), ecuațiile diferențiale de mișcare sînt:

$$\frac{l^2\ddot{z}}{l^2-z^2}+\frac{l^2 z\dot{z}^2}{(l^2+z^2)^2}+z\dot{\theta}^2=g \qquad \frac{d}{dt}(l^2-z^2)\,\dot{\theta}=0;$$

deci prin integrare:

$$(l^2-z^2)\,\theta=C$$

$$\dot{z}^2=\frac{(2gz+C_1)(l^2-z^2)-C^2}{l^2},$$

unde C și C_1 sînt constante de integrare care depind de condițiile inițiale. Mișcarea pendulului este posibilă doar pentru $\dot{z}^2 > 0$, și va avea un caracter oscilatoriu între cercurile paralele $z = z_1$ și $z = z_2$, unde $-l < z_1 < z_2 < l$ sînt rădăcini ale polinomului de la numărătorul expresiei lui z^2.

34.21. Cunoscînd greutățile P a panei și Q a barei, precum și unghiul α, și neglijînd frecările, să se studieze mișcarea sistemului din figura 34.21.

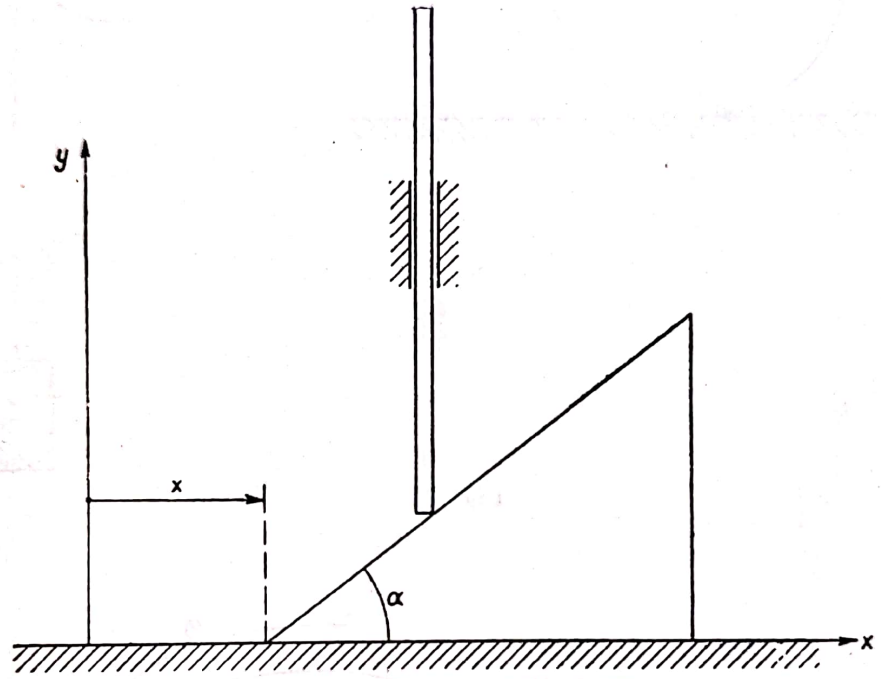


Fig. 34.21

Răspuns. Mișcările sînt uniform variate, accelerația panei fiind:

$$\ddot{x} = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha} g \text{ și cea a barei } \ddot{x} \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q \operatorname{tg}^2 \alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

34.22. Se consideră sistemul din figura 34.22 alcătuit din discul omogen *1* de greutate $20\,G$ și rază R care se rostogolește fără să alunece pe un plan orizontal, scripetele *2*, disc omogen de greutate G și raza r și *3* greutatea $2\,G$. Să se studieze mișcarea sistemului.

Răspuns. Mișcarea greutății *3* este uniform variată cu accelerația $\ddot{x} = \frac{g}{5}$.

34.23. Discul *1* de rază R_1 se rotește în jurul unei axe verticale trecînd prin centrul său. Pe periferia lui este montat axul în jurul căruia se rotește discul *2*. Să se studieze mișcarea sistemului.

Răspuns. Discurile se rotesc uniform $\ddot{\theta}_1 = 0$ și $\ddot{\theta}_2 = 0$, unde θ_1 și θ_2 sînt unghiurile de rotație absolute ale discurilor (fig. 34.23).

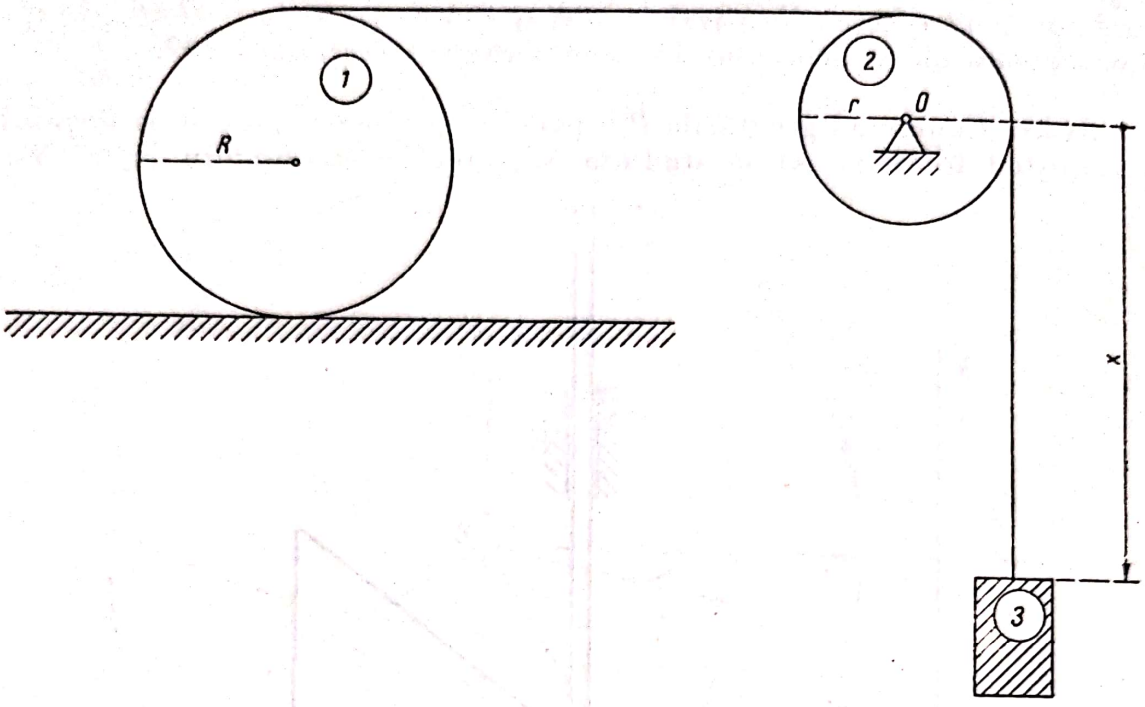


Fig. 34.22

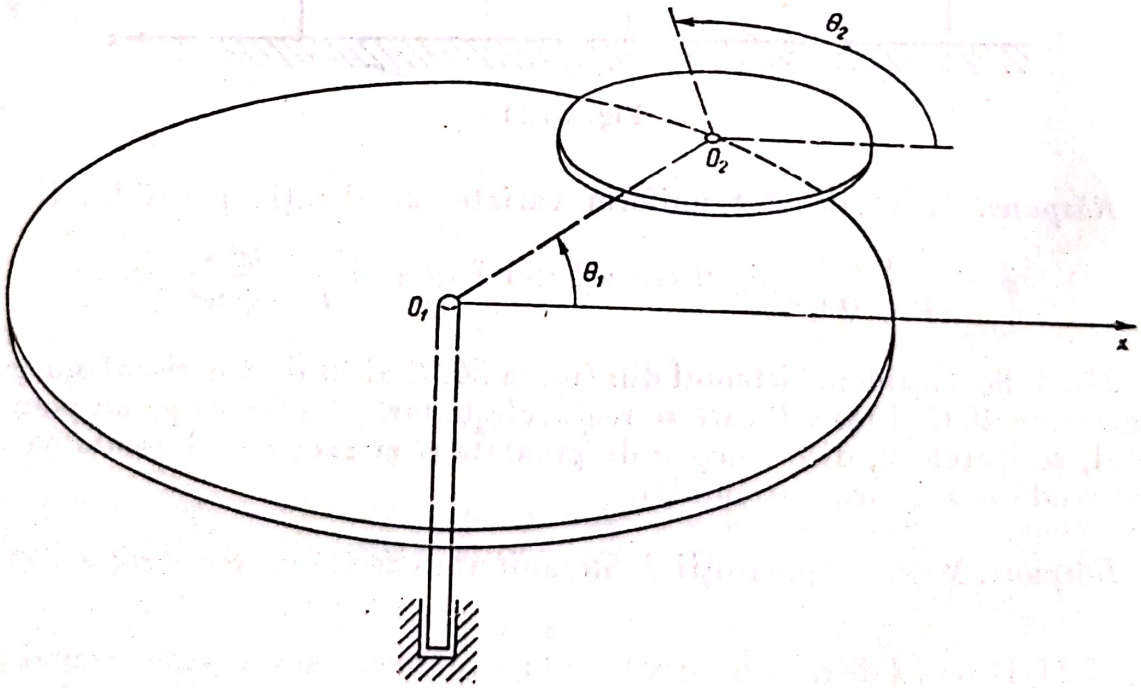


Fig. 34.23

Scanned with OKEN Scanner

34.24. Să se studieze mișcarea sistemului din figura 34.24 alcătuit dintr-un disc omogen de greutate P și rază R, legat printr-un fir petrecut peste un scripete de masă neglijabilă, de greutate Q. Discul se găsește pe un plan luciu, înclinat sub unghiul α față de orizontală.

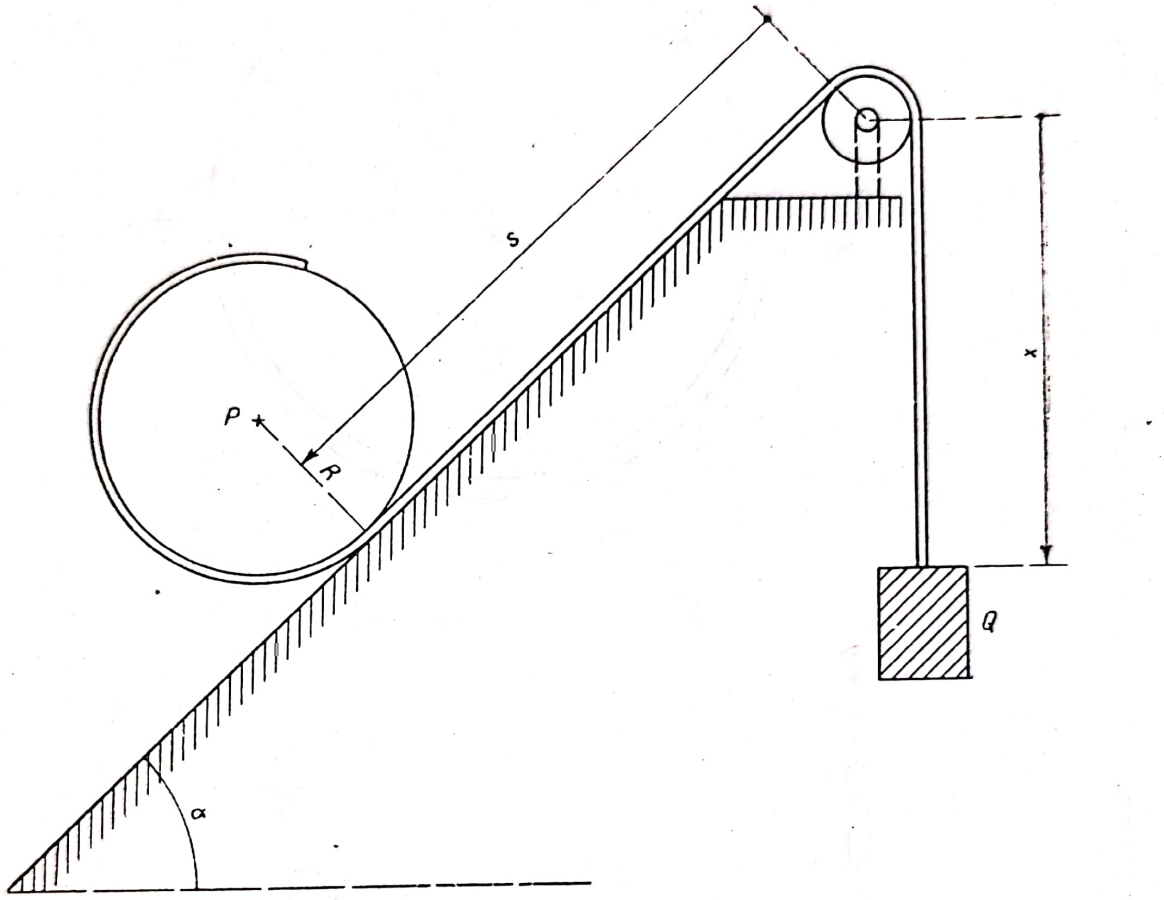


Fig. 34.24

Răspuns. Alegînd drept parametri distanțele x și s, accelerațiile $\ddot{x} = \frac{3Q - P\sin\alpha}{3Q + P} g$ și $\ddot{s} = \frac{(2Q + P)\sin\alpha - Q}{3Q + P} g$ sînt constante, iar accelerația unghiulară a discului este $\ddot{\theta} = \frac{2Q(1 + \sin\alpha)}{3Q + P} \frac{g}{R}$.

34.25. Bara AB de masă M și lungime l este articulată de culisorul A de masă m care poate aluneca pe o bară lucie (fig. 34.25).

Să se studieze mișcarea sistemului.

Răspuns: Alegînd parametrii y și θ ($\theta = 0 \to y = 0$), ecuațiile diferențiale de mișcare sînt:

$$\frac{d}{dt}\left[(M + m)\dot{y} + \frac{1}{2} Ml\cos\theta\,\dot{\theta}\right] = 0 \qquad 2l\ddot{\theta} + 3\dot{y}\cos\theta = -3g\sin\theta$$

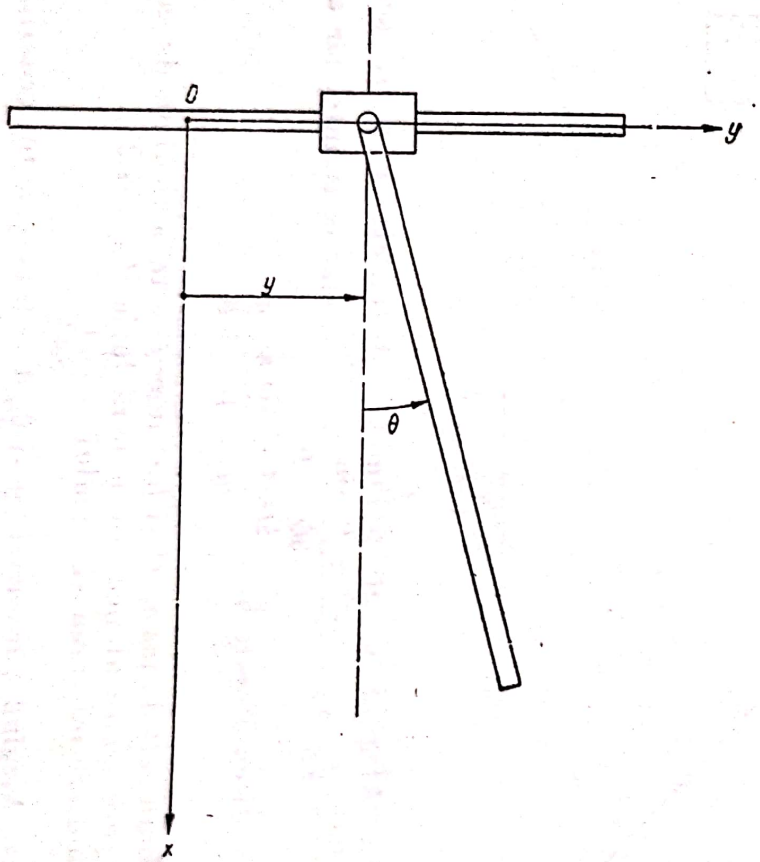


Fig. 34.25

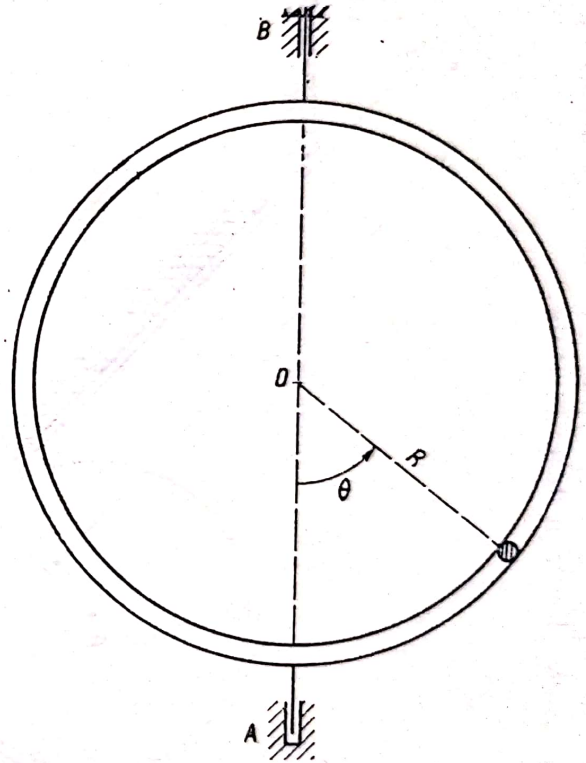


Fig. 34.26

Scanned with OKEN Scanner

și prin integrare pentru condițiile inițiale $t = 0$, $\dot{y} = 0, \dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_0$ rezultă:

$$y = -\frac{M\, l \sin\theta}{2\,(M + m)}$$

centrul de mase al sistemului rămînînd fix și:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12\,(M + m)\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}{4\,(M + m) - 3M\cos^2\theta} \cdot \frac{g}{l}.$$

În cazul micilor oscilații perioada lor este $T = 2\pi\sqrt{\frac{(M + 4m)l}{6(M + m)g}}$.

34.26. Să se studieze mișcarea unui punct greu A de masă m în interiorul unui cerc luciu de rază R, care se rotește cu viteza unghiulară constantă ω în jurul diametrului vertical AB (fig. 34.26). Care sînt pozițiile de repaus relativ și care este perioada micilor oscilații?

Răspuns. Ecuația diferențială a mișcării este:

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

pozițiile de echilibru (relativ) sînt:

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \pi$$

$$\theta_3 = \arccos\frac{g}{R\omega^2}.$$

Pentru $\omega^2 < \frac{g}{R}$ micile oscilații au loc în jurul poziției θ_1 perioada micilor oscilații fiind $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g - \omega^2 R}}$ și pentru $\omega^2 > \frac{g}{R}$ micile oscilații au loc în jurul lui θ_3, perioada micilor oscilații fiind $T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 - g^2}}}$.

34.27. Pe o pană *1* de masă M poate aluneca fără frecare corpul *2* de masă m (fig. 34.27). Știind că pana se mișcă după legea $x = \frac{1}{2}at^2$ și cunoscînd unghiul α,

să se studieze mişcarea relativă a corpului *2* şi să se determine pentru care valoare a acceleraţiei a corpul *2* rămîne în repaus relativ.

Răspuns: $s = \frac{1}{2}(g \sin \alpha - a \cos \alpha)^2 + v_0 t + s_0$; $a = g \operatorname{tg} \alpha$, unde v_0 este viteza relativă iniţială a corpului *2*.

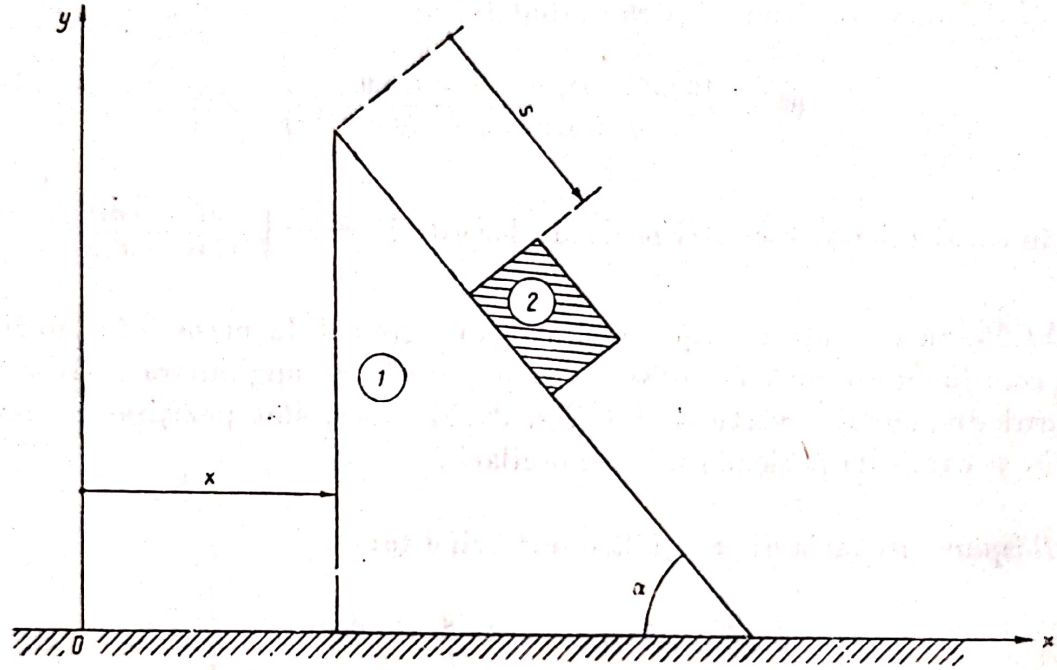


Fig. 34.27

Capitolul XXXV

STABILITATEA ECHILIBRULUI. MICI OSCILAŢII ÎN JURUL POZIŢIEI DE ECHILIBRU

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

Se consideră o poziţie de echilibru a unui sistem de puncte materiale, determinată prin valorile $q_k = q_{k0}$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$ ale coordonatelor generalizate q_k, căreia în spaţiul configuraţiilor $\{q_k\}$ îi corespunde un „punct" A_0. Configuraţia aceasta de echilibru A_0 este *stabilă*, dacă fiind dată o „sferă" S din spaţiul configuraţiilor cu centrul în A_0 şi de „rază" arbitrar de mică ε, există un punct A, diferit de A_0, situat în interiorul sferei S şi o valoare ε' a energiei cinetice a sistemului, astfel încît dacă sistemul este lansat din A cu energia cinetică iniţială $E_0 < \varepsilon'$, „traiectoria" punctului din spaţiul configuraţiilor rămîne interioară sferei.

Poziţiile de echilibru corespund valorilor staţionare ale funcţiei de forţă U, adică acelora pentru care:

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{35.1}$$

Teorema *Lejeune-Dirichlet* arată că poziţia corespunzătoare unui maxim al funcţiei U, adică unui minim al energiei potenţiale $V = -U$, este stabilă.

Într-un astfel de punct, afară de condiţia (35.1), trebuie îndeplinite condiţiile:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0, \tag{35.2}$$

pentru sisteme cu un singur grad de libertate;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0 \tag{35.3}$$

pentru sistemele cu două grade de libertate, şi pentru sistemele cu mai multe grade de libertate — expresia:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} q_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial q_h} q_h\right)^2 U \tag{35.4}$$

trebuie să fie negativ definită.

Pentru studiul micilor oscilaţii în jurul unei poziţii de echilibru nu se particularizează problema presupunînd în acest punct coordonatele generalizate nule $q_{k0} = 0$.

Pentru legături scleronome energia cinetică este o formă pătratică de vitezele generalizate $E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ şi dezvoltînd în serie Mac-Laurin coeficienţii A_{ij} $(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ se pot păstra într-o primă aproximaţie doar termenii constanţi:

$$a_{ij} = A_{ij} \ (0, 0, \ldots, 0), \tag{35.5}$$

de unde:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{35.6}$$

Analog dezvoltînd în serie forţa generalizată $Q_k = Q_k(q_1, q_2, \ldots, q_h)$, cum $Q_k(0, 0, \ldots, 0) = 0$ (poziţie de echilibru), se vor păstra doar termenii liniari în q_i, adică:

$$Q_k = b_{k1} q_1 + b_{k2} q_2 + \ldots + b_{kh} q_h,$$

unde

$$b_{ki} = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right)_{A_0}. \tag{35.7}$$

În cazul cînd forţele derivă dintr-o funcţie de forţă $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ dezvoltînd-o în serie, cum termenii liniari sînt nuli $\left(\frac{\partial U}{\partial q_h} = 0\right)$, se vor păstra doar termenii pătratici în q_i, deci:

$$U = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} q_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial q_h} q_h\right)^2 U = \frac{1}{2}\sum\sum b_{ij}\, q_i\, q_j \ (b_{ij} = b_{ji}) \quad (35.8)$$

Făcînd înlocuirile în ecuaţiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, h) \quad (35.9)$$

se obţine sistemul de ecuaţii:

$$a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{kh}\ddot{q}_h = b_{k1}q_1 + b_{k2}q_2 + \ldots + b_{kh}q_h \quad (k = 1, 2, \ldots, h) \quad (35.10)$$

sistem care rezolvat în raport cu $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_h$ se reduce la forma canonică:

$$\ddot{q}_k = c_{k1}q_1 + c_{k2}q_2 + \ldots + c_{kh}q_h \quad (k = 1, 2, \ldots, h) \quad (35.11)$$

Formăm ecuaţia caracteristică (seculară):

$$F(r) = \begin{vmatrix} c_{11} - r^2 & c_{12} & c_{13} \ldots & c_{1h} \\ c_{21} & c_{22} - r^2 & c_{23} & c_{2h} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - r^2 & c_{3h} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ c_{h1} & c_{h2} & c_{h3} & c_{hh} - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (35.12)$$

Dacă rădăcinile ei r_i sînt simple, integralele generale ale sistemului (35.11) sînt de forma:

$$q_k = \sum_i C_{ki}\, e^{r_i t} \quad (35.13)$$

iar pentru rădăcinile multiple de ordinul λ se înlocuiesc constantele C_{ki} prin polinoame în t, $P(t) = a_1 t^{\lambda-1} + a_2 t^{\lambda-2} + \ldots + a\lambda$ de gradul $\lambda - 1$.

Dacă rădăcinile $r = \alpha \pm \beta i$ ale ecuaţiei seculare au partea reală pozitivă ($\alpha > 0$) cel puţin pentru una dintre rădăcini, mişcarea este *nestabilă*.

Dacă pentru toate rădăcinile există $\alpha < 0$, sistemul admite soluţii de forma:

$$C\, e^{-|\alpha| t} \cos(\beta t - \varphi) \quad (35.14)$$

pentru rădăcinile simple, şi pentru cele multiple C se înlocuieşte printr-un polinom $P(t)$. Mişcarea este *asimptotic stabilă*.

Dacă rădăcinile sînt simple şi $\alpha = 0$, soluţiile sînt de forma:

$$C \cos(\beta t - \varphi). \quad (35.15)$$

Mişcarea este simplu stabilă dacă cel puţin pentru o rădăcină distinctă $\alpha = 0$, şi pentru toate celelalte rădăcini $\alpha < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Se pot găsi totdeauna transformări liniare $q_i = \sum_j \alpha_{ij} q'_j$ care să transforme energia cinetică (35.6) și funcția de forță (35.8) în sume de pătrate în q'_j, respectiv q'_j. În acest caz, ecuațiile (35.11) sînt de forma:

$$\ddot{q}'_k = c'_{kk} q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, h) \tag{35.16}$$

și se pot integra direct. Coordonatele q'_k se numesc *coordonate normale* sau *coordonate principale*.

Liapunov a demonstrat că mișcările nestabile în mic sînt nestabile și în mare, și că mișcările asimptotic stabile în mic sînt cel puțin simplu stabile în mare (pot fi și asimptotic stabile). În cazul mișcărilor simplu stabile în mic nu se pot trage nici un fel de concluzii pentru stabilitatea în mare.

B. PROBLEME REZOLVATE

35.1. O bară omogenă de lungimea $2a$ și masă M este așezată într-un jgheab luciu avînd forma unei parabole $x^2 = 2py$. Să se determine pozițiile de echilibru ale barei și să se stabilească în ce condiții sînt aceste poziții stabile.

Rezolvare. Poziția barei la un moment dat este determinată prin coordonatele ξ și η ale centrului maselor C și prin unghiul θ (fig. 35.1). Capetele A și B ale barei verifică ecuația parabolei; deci:

$$(\xi + a\cos\theta)^2 = 2p(\eta + a\sin\theta),\ (\xi - a\cos\theta)^2 = 2p(\eta - a\sin\theta). \tag{1}$$

Rezolvînd sistemul (1) în raport cu θ rezultă:

$$\xi = p\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad \eta = \frac{p}{2}\,\mathrm{tg}^2\theta + \frac{a^2}{2p}\cos^2\theta, \tag{2}$$

bara avînd un singur grad de libertate.

Singura forță care acționează este greutatea proprie a barei, deci funcția de forță este:

$$U = -Mg\eta = -Mg\left(\frac{p}{2}\,\mathrm{tg}^2\theta + \frac{a^2}{2p}\cos^2\theta\right). \tag{3}$$

Pozițiile de echilibru stabil corespund, pe baza teoremei Lejeune-Dirichlet, unui maxim al funcției U, deci unui minim al ordonatei η, centrul maselor ocupînd cea mai joasă poziție posibilă (teorema lui Torricelli).

În pozițiile de echilibru, conform (35.1):

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -Mg\left(p\frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a^2}{p}\cos\theta\,\sin\theta\right) = 0,$$

de unde:

$$\sin\theta\left(\frac{p}{\cos^3\theta} - \frac{a^2}{p}\cos\theta\right) = 0;$$

deci una dintre poziţiile de echilibru corespunde cazului cînd bara este orizontală ($\theta = 0$), şi cealaltă:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{p}{a}} \tag{4}$$

este posibilă pentru $p \leqslant a$.

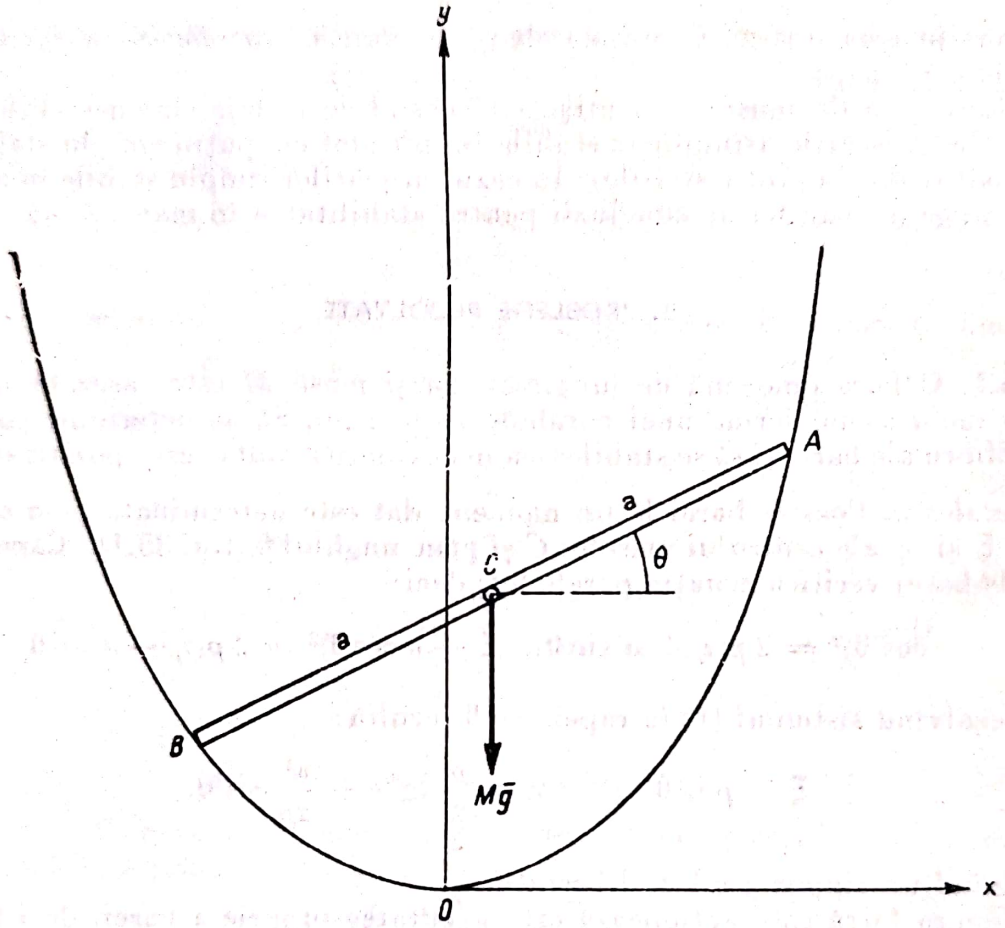


Fig. 35.1

Pentru a vedea care dintre aceste poziţii de echilibru este stabilă se foloseşte condiţia (35.2); deci se calculează:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -Mg\left[p\,\frac{3-2\cos^2\theta}{\cos^4\theta} - \frac{a^2}{p}\,(2\cos^2\theta - 1)\right].$$

Pentru $\theta = 0$, echilibrul este stabil pentru:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -Mg\left[p - \frac{a^2}{p}\right] < 0 \qquad a < p,$$

singura poziţie de echilibru în acest caz, şi pentru $\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{p}{a}}$;

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -Mg\,\frac{4a\,(a-p)}{p} < 0 \qquad a > p.$$

Se poate ușor verifica că în al doilea caz centrul de greutate ocupă cea mai joasă poziție posibilă, deoarece pentru $\theta = 0$, $\eta = \frac{a^2}{2p}$, și pentru

$$\theta = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{p}{a}}\right), \quad \eta = \frac{2a - p}{2} \quad \text{și} \quad \frac{2a - p}{2} < \frac{a^2}{2p}.$$

În acest al doilea caz, bara trece prin focarul parabolei $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Într-adevăr ecuația barei este:

$$y - \eta = \operatorname{tg}\theta\ (x - \xi)$$

și ținînd seamă de (2) și (4) intersecția barei cu axa Oy ($x = 0$) este punctul de ordonată $y = \frac{p}{2}$.

35.2. O sferă de greutate Q și rază r se găsește în interiorul unui vas sferic de rază R. O sarcină verticală P este transmisă sferei prin intermediul

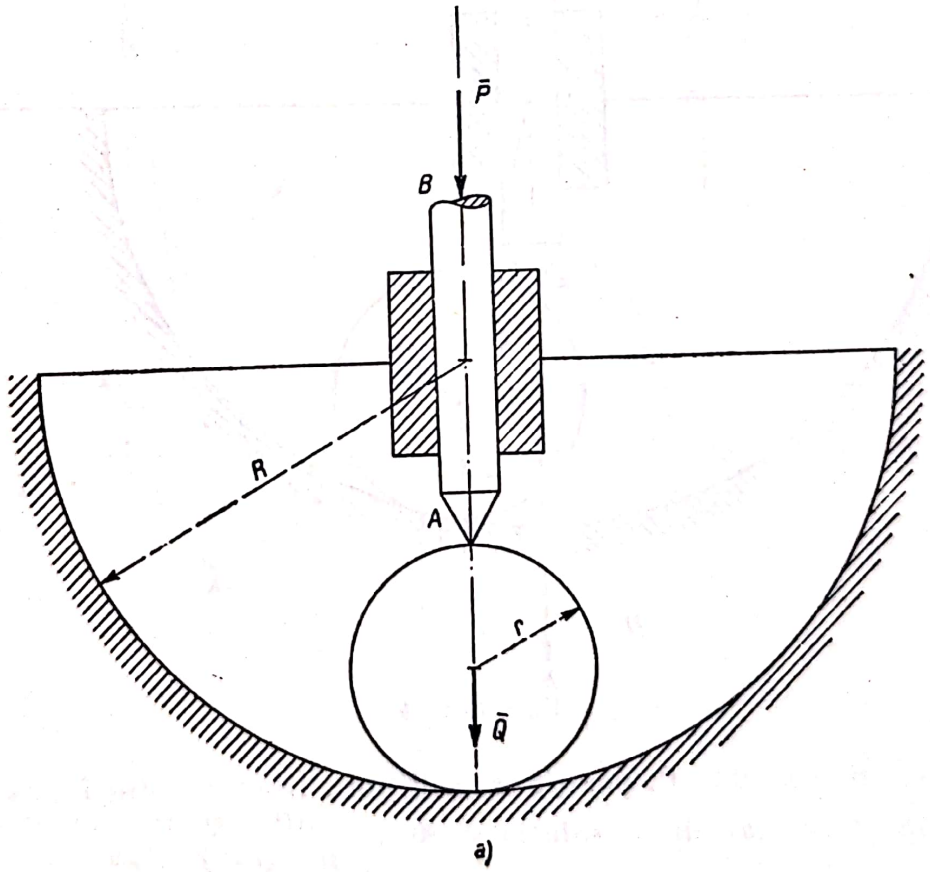


Fig. 35.2, *a*

tijei AB. Presupunînd frecările neglijabile, să se studieze pentru care valori ale sarcinii P este stabilă poziția de echilibru din figura 35.2,*a* (Timoshenko).

Rezolvare. Poziția sferei este determinată la un moment dat prin unghiul θ (fig. 35.2,*b*). Abscisele punctelor C și A fiind $x_c = (R - r)\cos\theta$, $x_A = (R - r)\cos\theta - \sqrt{r^2 - (R-r)^2\sin^2\theta}$, funcția de forță este:

$$U = Qx_c + Px_A = Q(R-r)\cos\theta + P\left[(R-r)\cos\theta - \sqrt{r^2-(R-r)^2\sin^2\theta}\right]. \quad (1)$$

În poziția de echilibru, conform (35.1) se obține:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -(P+Q)(R-r)\sin\theta + \frac{P(R-r)^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{r^2-(R-r)^2\sin^2\theta}} = 0, \quad (2)$$

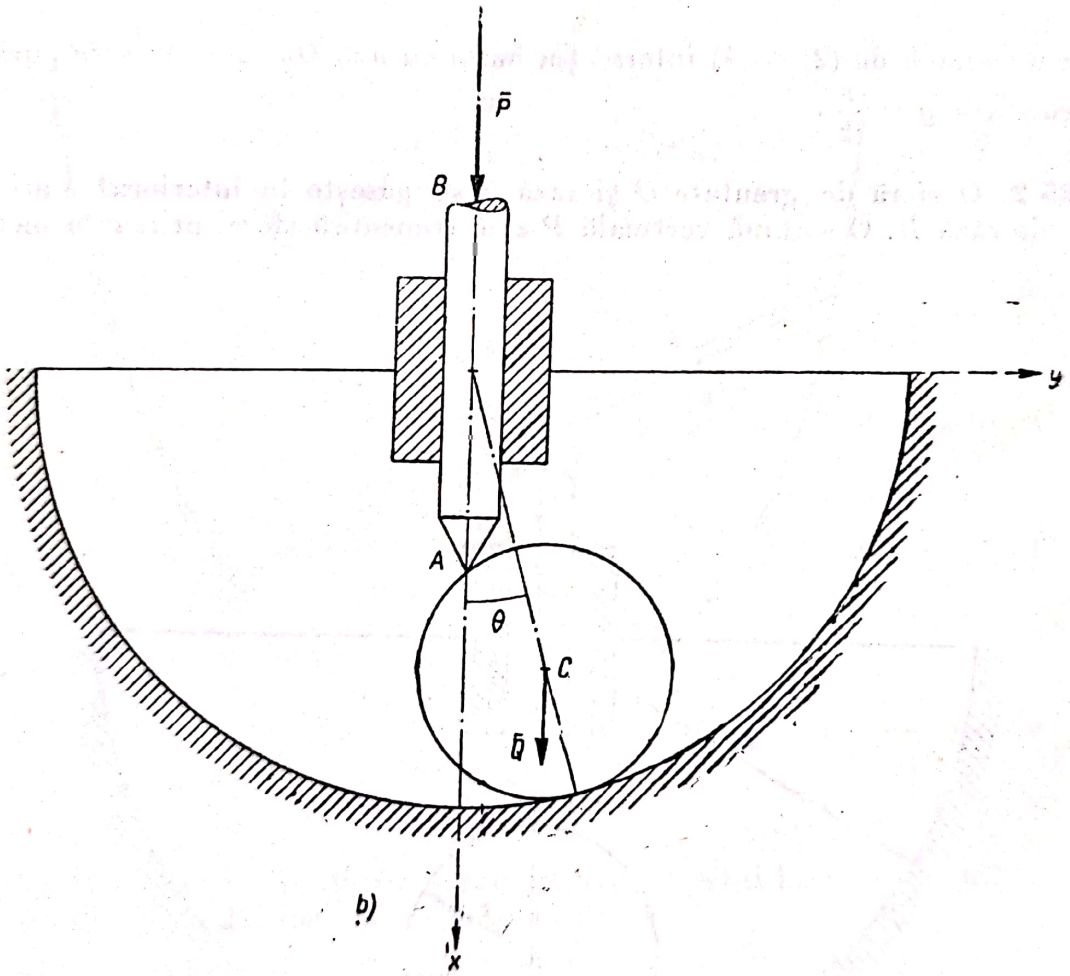


Fig. 35.2, *b*

de unde: $\sin\theta = 0$, $\theta = 0$, poziția de echilibru fiind cea din figura 35.2,*a*. Din ecuația (2) se mai obține soluția $\sin^2\theta = \dfrac{(P+Q)^2r^2 - P^2(R-r)^2}{(P+Q)^2(R-r)^2 - P^2(R-r)^2}$, care are sens pentru $2r > R$. Pentru studiul stabilității echilibrului în prima poziție se aplică relația (35.2):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -(P+Q)(R-r)\cos\theta + \frac{P(R-r)^2\left[r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (R-r)^2\sin^4\theta\right]}{\left[r^2-(R-r)^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}$$

pentru $\theta = 0$.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -(P+Q)(R-r) + \frac{P(R-r)^2}{r} = \frac{(R-r)}{r}[P(R-2r)-Qr] < 0. \quad (3)$$

Cum $R - r > 0$, din (3) rezultă:

$$P < \frac{Qr}{R-2r}.$$

Pentru orice valoare mai mică decît sarcina critică, $P_{cr} = \frac{Qr}{R-2r}$, echilibrul este stabil, şi pentru $P > P_{cr}$ sistemul este nestabil.

35.3. O bară omogenă AB de lungime a este suspendată la capete de două fire verticale $A'A$ şi $B'B$ de aceeaşi lungime l, ca în figura 35.3,*a*. Să se studieze

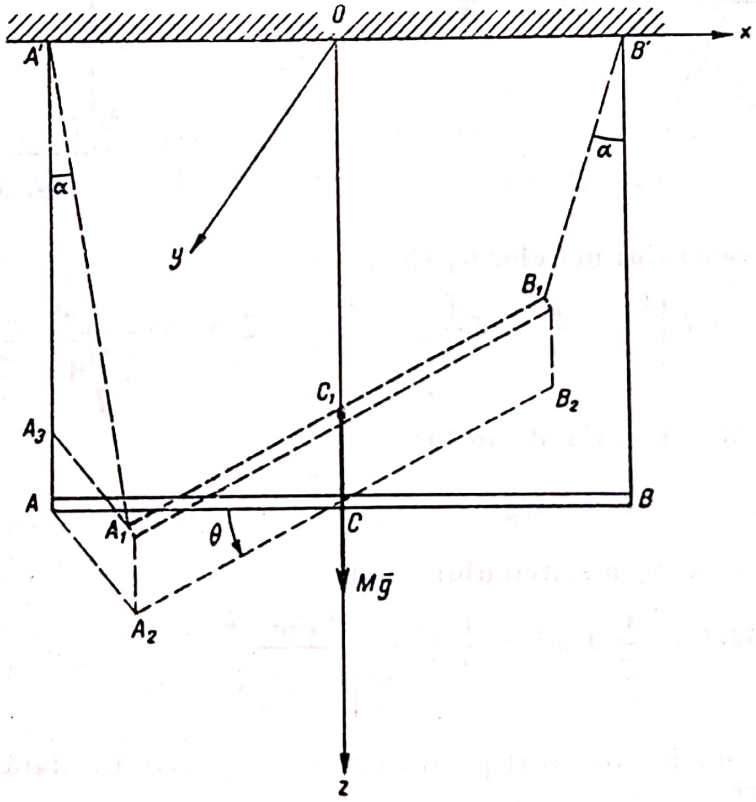


Fig. 35.3, *a*

micile oscilaţii ale barei, dacă este rotită cu un unghi mic θ în jurul axei verticale care trece prin centrul ei C şi apoi i se dă drumul.

Rezolvare. Bara are trei grade de libertate; presupunînd însă că tot timpul mişcării centrul ei C se deplasează pe verticală, poziţia ei poate fi determinată

prin parametrul θ, unghiul dintre direcția A_1B_1 a barei rotite și direcția ei AB în poziția de echilibru.

Unghiul α format de fire cu verticala se poate determina din triunghiurile ACA_2 (A_2B_2 este proiecția barei pe planul orizontal trecînd prin AB), (fig. 35.3,*b*) și $A'A_1A_3$ (A_3 este proiecția lui A_1 pe verticala $A'A$), (fig. 35.3,*c*), deoarece:

$$AA_2 = A_1A_3 = 2\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2} = l\sin\alpha,$$

deci:

$$\sin\alpha = \frac{a}{l}\sin\frac{\theta}{2}.$$

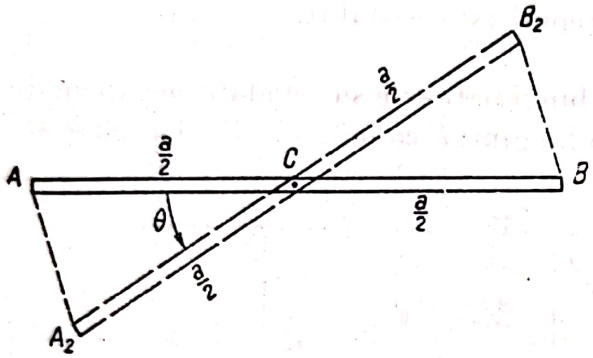


Fig. 35.3, *b*

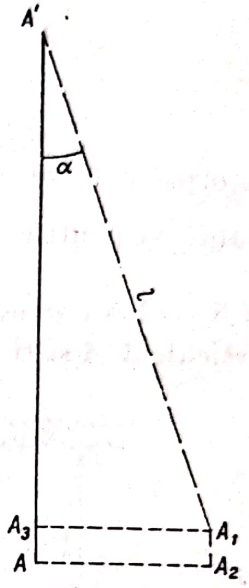


Fig. 35.3, *c*

Cota și viteza centrului maselor C_1 sînt:

$$\xi = l\cos\alpha = l\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}; \qquad v_c = \xi = -\frac{a^2\sin\theta\theta'}{4\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}\sin^2\theta}} \tag{1}$$

Forțele derivă din funcția de forță:

$$U = Mg\xi = Mgl\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}, \tag{2}$$

energia cinetică (34.9) a sistemului fiind:

$$E = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}M\frac{a^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2}{16\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\sin^2\theta\right)} + \frac{1}{2}M\frac{a^2}{12}\dot\theta^2. \tag{3}$$

Micile oscilații au loc în jurul poziției de echilibru stabil dată de condițiile (35.1), (35.2) $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} < 0$, adică pentru $\theta = 0$. Se dezvoltă în serie Mac Laurin energia cinetică (3); cum pentru $\theta = 0$ [v. relațiile (35.5) și (35.6)], $E = \frac{Ma^2}{24}\dot\theta^2$, rezultă:

$$E \approx \frac{Ma^2}{24}\dot\theta^2. \tag{4}$$

Se dezvoltă în serie funcția de forță (2) păstrînd termenii de grad $\leqslant 2$.

Cum

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

$$U = Mgl\left[1 - \frac{a^2}{l}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}{3} + \dots\right)^2\right]^{1/2} \approx Mgl\left(1 - \frac{a^2\theta^2}{4l^2}\right)^{1/2} \approx$$

$$\approx Mgl\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\theta^2}{4l^2}\right). \qquad (5)$$

Înlocuind (4) și (5) în ecuația lui Lagrange (35.9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial E}{\partial\theta} = \frac{\partial U}{\partial\theta},$$

rezultă:

$$\frac{Ma^2}{12}\ddot\theta = -\frac{Mga^2}{4l}\theta \quad \text{sau} \quad \ddot\theta + \frac{3g}{l}\theta = 0,$$

ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți, a cărei integrală, ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $\dot\theta = 0$ este:

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{3g}{l}}\,t.$$

Oscilațiile sînt armonice, perioada micilor oscilații fiind:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}\,t.$$

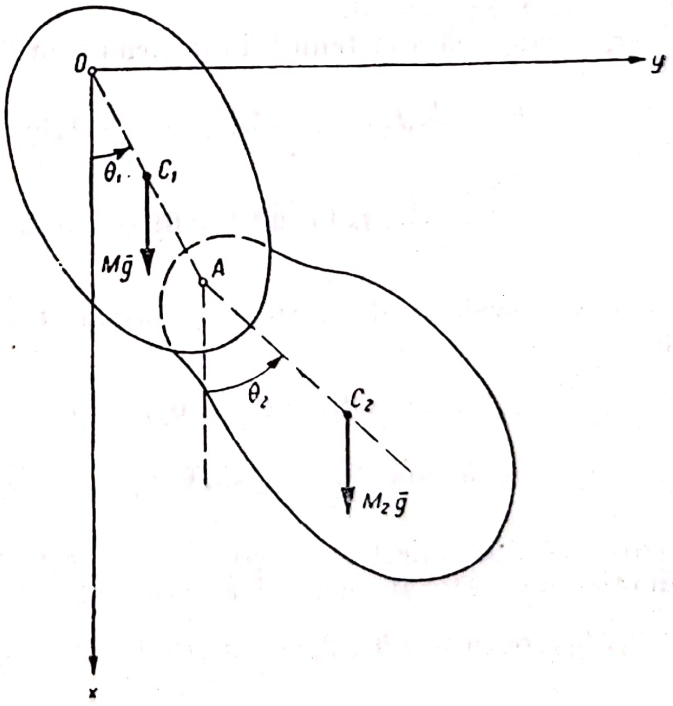


Fig. 35.4, *a*

35.4. Un pendul dublu este un sistem format din două corpuri: primul oscilînd în jurul unei axe fixe Oz și al doilea fiind articulat de primul printr-o axă Az' paralelă cu Oz (fig. 35.4, *a*). Masele M_1 și M_2, momentele de inerție J_1 (al primului corp față de Oz) și J_2 (al corpului al doilea față de axa C_2z'' trecînd prin centrul maselor), distanțele $OA = a$, $OC_1 = l_1$ și $AC_2 = l_2$ fiind cunoscute, să se studieze micile oscilații ale acestui sistem. Caz particular: corpurile sînt două bare omogene de mase $M_1 = M_2 = M$ și lungimi l articulate ca în figura 35.4, *b* și în momentul inițial $\theta_1 = \theta_{10}$, $\theta_2 = \theta_{20}$, $\dot\theta_1 = \dot\theta_2 = 0$.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, poziţiile corpurilor fiind determinate de unghiurile θ_1 şi θ_2 (fig. 35.4, *a*). Forţele care acţionează asupra sistemului derivă din funcţia de forţe:

$$U = M_1 g l_1 \cos\theta_1 + M_2 g (a \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2); \tag{1}$$

deci poziţiile de echilibru (35.1) sînt date de ecuaţiile:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -(M_1 l_1 + M_2 a) g \sin\theta_1 = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = -M_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0, \tag{2}$$

de unde:

$$\theta_1 = 0 \quad \text{sau} \quad \theta_1 = \pi \quad \text{şi} \quad \theta_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \theta_2 = \pi.$$

Singura poziţie de echilibru stabil este cea în care sînt îndeplinite condiţiile (35.3):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = -(M_1 l_1 + M_2 a) g \cos\theta_1 < 0; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} = -M_2 g l_2 \cos\theta_2 < 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} = 0 - (M_1 l_1 + M_2 a) M_2 l_2 g^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 < 0,$$

deci $\theta_1 = 0$ şi $\theta_2 = 0$.
Energia cinetică a sistemului este, conform (34.8) şi (34.9):

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} M_2 [a^2 \dot\theta_1^2 + l_2^2 \dot\theta_2^2 + 2 a l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)], \tag{3}$$

deoarece coordonatele centrului maselor C_2 şi componentele vitezei lui $\bar v_2$ sînt:

$$x_2 = a \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2; \qquad y_2 = a \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2;$$

$$\dot x_2 = -a \sin\theta_1 \dot\theta_1 - l_2 \sin\theta_2 \dot\theta_2; \qquad \dot y_2 = a \cos\theta_1 \dot\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \dot\theta_2.$$

Pentru studiul micilor oscilaţii se dezvoltă în serie expresiile (1) şi (3) ale funcţiei de forţă şi energiei cinetice păstrînd termenii de gradul al doilea în θ_1, θ_2, respectiv $\dot\theta_1$, $\dot\theta_2$. Cum $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}$,

$$U \approx -\frac{1}{2}(M_1 l_1 + M_2 a) g \theta_1^2 - \frac{1}{2} M_2 l_2 g \theta_2^2 + \text{const.}; \tag{4}$$

$$E \approx \frac{1}{2}(J_1 + M_2 a^2) \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}(J_2 + M_2 l_2^2) \dot\theta_2^2 + M_2 a l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd înlocuirile în ecuațiile lui Lagrange (35.9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = \frac{\partial U}{\partial \theta_2},$$

rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} (J_1 + M_2 a^2)\,\ddot{\theta}_1 + M_2 a l_2 \ddot{\theta}_2 &= -(M_1 l_1 + M_2 a)\, g\, \theta_1; \\ M_2 a l_2 \ddot{\theta}_1 + (J_2 + M_2 l_2^2)\,\ddot{\theta}_2 &= M_2 l_2 g\, \theta_2 \end{aligned} \tag{6}$$

și rezolvîndu-l în raport cu $\ddot{\theta}_1$ și $\ddot{\theta}_2$ se aduce sistemul la forma canonică (35.12):

$$\ddot{\theta}_1 = c_{11}\,\theta_1 + c_{12}\,\theta_2; \qquad \ddot{\theta}_2 = c_{21}\,\theta_1 + c_{22}\,\theta_2, \tag{7}$$

unde coeficienții c_{ki} au expresiile:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\frac{(M_1 l_1 + M_2 a)\,(J_2 + M_2 l_2^2)\, g}{(J_1 + M_2 a^2)(J_2 + M^2 l_2^2) - M_2^2 a^2 l_2^2}; \\ c_{12} &= \frac{M_2^2 a\, l_2^2\, g}{(J_1 + M_2 a^2)\,(J_2 + M_2 l_2^2) - M_2^2 a^2 l_2^2}; \\ c_{21} &= \frac{(M_1 l_1 + M_2 a)\, M_2 a\, l_2\, g}{(J_1 + M_2 a^2)\,(J_2 + M_2 l_2^2) - M_2^2 a^2 l^2}; \\ c_{22} &= -\frac{(J_1 + M_2 a^2)\, M_2 l_2\, g}{(J_1 + M_2 a^2)(J_2 + M_2 l_2^2) - M_2^2 a^2 l_2^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ecuația caracteristică (35.12):

$$\begin{vmatrix} c_{12} - r^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - r^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

are rădăcinile pur imaginare $r_{1,2} = \pm \nu_1 i$ $r_{2,4} = \pm \nu_2 i$, deci integralele generale ale sistemului sînt de forma:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_{11} \cos \nu_1 t + B_{11} \sin \nu_1 t + A_{12} \cos \nu_2 t + B_{12} \sin \nu_2 t \\ \theta_2 &= A_{21} \cos \nu_1 t + B_{21} \sin \nu_1 t + A_{22} \cos \nu_2 t + B_{22} \sin \nu_2 t. \end{aligned} \tag{10}$$

În cazul particular din figura 35.4, b: $M_1 = M_2 = M$, $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, $a = l$, $J_1 = \frac{1}{3} M l^2$, $J_2 = \frac{1}{2} M l^2$, deci coeficienții (8) au valorile:

$$c_{11} = -\frac{18\,g}{7\,l}; \qquad c_{12} = \frac{9\,g}{7\,l}; \qquad c_{21} = \frac{27\,g}{7\,l}; \qquad c_{22} = -\frac{24\,g}{7\,l} \tag{11}$$

și ecuația caracteristică (9) devine:

$$\begin{vmatrix} -\frac{18\,g}{7\,l} - r^2 & \frac{9\,g}{7\,l} \\ \frac{27\,g}{7\,l} & \frac{-24\,g}{7} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$r_4 + \frac{6g}{l} r^2 + \frac{27 g^2}{7 l^2} = 0,$$

rădăcinile ei fiind:

$$r_{1,2} = \pm i \sqrt{\left(3 + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}} = \pm i\nu_1; \quad r_{3,4} = \pm i \sqrt{\left(3 - \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}} = \pm i\nu_2. \quad (12)$$

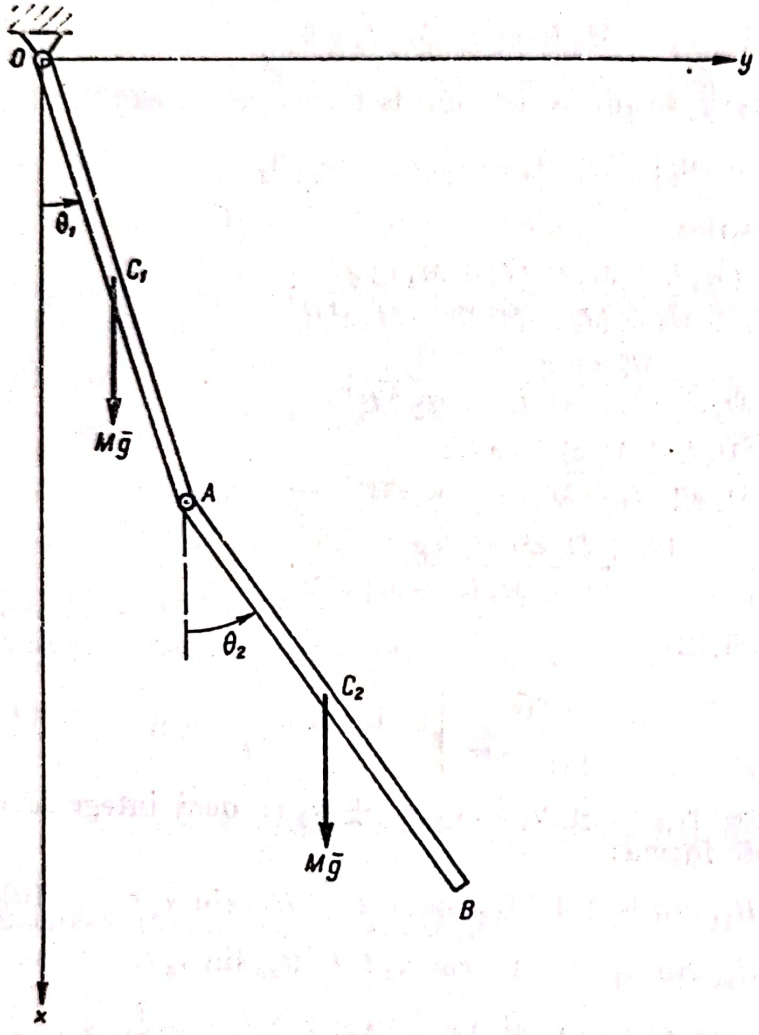


Fig. 35.4, *b*

Ținînd seamă de condițiile inițiale $t = 0$, $\theta_1 = \theta_{10}$, $\theta_2 = \theta_{20}$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, rezultă:

$$\theta_{10} = A_{11} + A_{12}; \theta_{20} = A_{21} + A_{22}; \; 0 = \nu_1 B_{11} + \nu_2 B_{12}; \; 0 = \nu_1 B_{21} + \nu_2 B_{22} \quad (13)$$

și din ecuațiile (7) și (10), identificînd coeficienții termenilor în $\cos \nu_1 t$, $\sin \nu_1 t$, $\cos \nu_2 t$ și $\sin \nu_2 t$, rezultă următoarele relații independente:

$$A_{21} = -\frac{1 + 2\sqrt{7}}{3} A_{11}; \quad B_{21} = -\frac{1 + 2\sqrt{7}}{3} B_{11};$$

$$A_{12} = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{9} A_{22}; \quad B_{12} = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{9} A_{22}. \quad (14)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (13) și (14) și înlocuind în (10) se obțin ecuațiile de mișcare:

$$\theta_1 = \frac{(2\sqrt{7} - 1)\theta_{10} - 3\theta_{20}}{4\sqrt{7}} \cos \sqrt{\left(3 + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}\, t + \frac{(2\sqrt{7} + 1)\theta_{10} + 3\theta_{20}}{4\sqrt{7}} \cos \sqrt{\left(3 - \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}\, t;$$

$$\theta_2 = \frac{-9\theta_{10} + (2\sqrt{7} + 1)\theta_{20}}{4\sqrt{7}} \cos \sqrt{\left(3 + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}\, t + \frac{9\theta_{10} + (2\sqrt{7} - 1)\theta_{20}}{4\sqrt{7}} \cos \sqrt{\left(3 - \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}\, t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate da o reprezentare grafică a mișcării sistemului în spațiul configurațiilor θ_1', θ_2'. „Traiectoria" va fi o curbă care este interioară unui dreptunghi ale cărei axe coincid cu cele ale direcțiilor principale [corespunzătoare coordonatelor normale θ_1', θ_2' (35.16)], fiind totodată tangentă laturilor dreptunghiului (fig. 35.4, *c*).

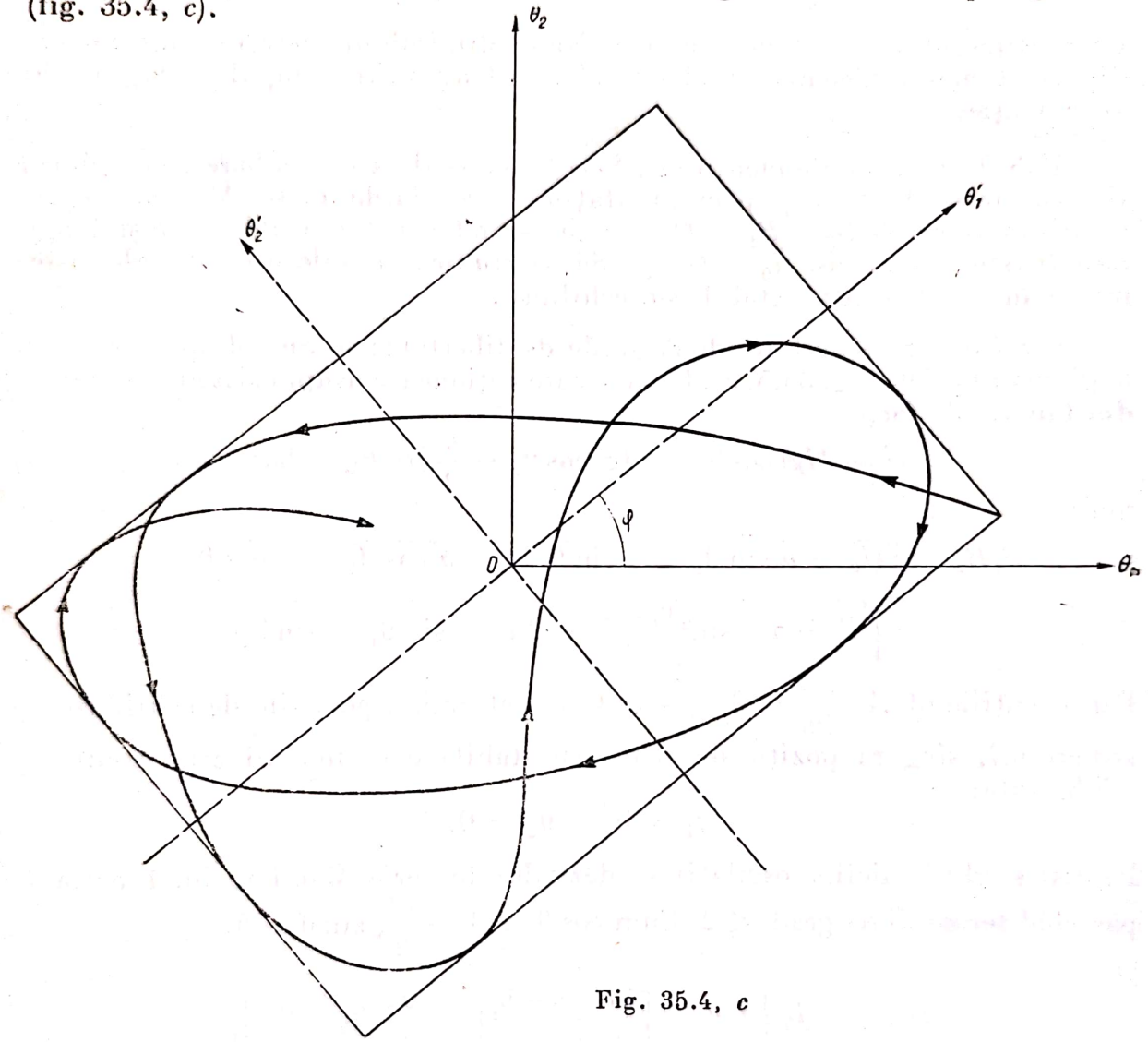


Fig. 35.4, *c*

Dacă raportul $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ al pulsațiilor oscilațiilor componente este rațional, „traiectoria" este o curbă Lissajous (v. problema 23.20, fig. 23.20, *b*), și dacă $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ = irațional, atunci este o curbă care „umple" dreptunghiul de mai sus, adică în orice vecinătate a unui punct al dreptunghiului se găsesc puncte ale „traiectoriei". Acest din urmă caz este și cel al cazului particular examinat, deoarece:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{\left(3 + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}}{\sqrt{\left(3 - \frac{6}{\sqrt{7}}\right)\frac{g}{l}}} = \sqrt{\frac{11 + 4\sqrt{7}}{3}} = \text{irațional.}$$

Un caz particular interesant este acela cînd în tot timpul mişcării $\theta_1 = \theta_2$. Din (6) rezultă că această situaţie se poate ivi pentru:

$$\frac{J_1 + M_2 a^2 + M_2 a l_2}{J_2 + M_2 a l_2 + M_2 l_2^2} = \frac{M_1 l_1 + M_2 a}{M_2 l_2}.$$

Este cunoscut cazul clopotului catedralei din Colonia care nu suna tocmai din acest motiv, deoarece limba şi clopotul aveau tot timpul acelaşi unghi de deviaţie.

35.5. Două pendule identice O_1A_1 şi O_2A_2, realizate prin bare de lungime l şi greutate neglijabilă şi prin greutăţile A_1 şi A_2 de mase M, sînt legate printr-un resort $B_1B_2 (O_1B_1 = O_2B_2 = a)$ avînd constanta elastică k şi lungimea în stare neîntinsă $l_0 (= O_1O_2)$. Să se studieze micile oscilaţii ale sistemului în jurul poziţiei stabile de echilibru.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate; se aleg drept parametri unghiurile θ_1 şi θ_2 (fig. 35.5, *a*). Forţele care acţionează asupra sistemului derivă din funcţia de forţe:

$$U = Mgl\cos\theta_1 + Mgl\cos\theta_2 - \frac{k}{2}(B_1B_2 - l_0)^2, \tag{1}$$

unde:

$$B_1B_2 = \sqrt{(l_0 + a\sin\theta_1 - a\sin\theta_2)^2 + (a\cos\theta_1 - a\cos\theta_2)^2} =$$
$$= \sqrt{l_0^2 + 4a^2\sin^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + 2\,l_0\,a\,(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)}.$$

Din ecuaţiile (35.1) $\frac{\partial U}{\partial\theta_1} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial\theta_2} = 0$ se determină poziţiile de echilibru ale sistemului, singura poziţie de echilibru stabilă care îndeplineşte condiţiile (35.3) este:

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0.$$

Pentru studiul micilor oscilaţii se dezvoltă în serie Mac-Laurin, funcţia U păstrînd termenii de grad $\leqslant 2$. Cum $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\sin\theta \approx \theta$, şi

$$B_1B_2 \approx l_0\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{4a^2}{l_0^2}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^2 + \frac{2a}{l_0}(\theta_1 - \theta_2)\right]\right\}.$$

Înlocuind în (1) rezultă:

$$U \approx -\frac{1}{2}Mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + \text{const}. \tag{2}$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta_2^2. \tag{3}$$

Înlocuind în ecuaţiile lui Lagrange (35.9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot\theta_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial\theta_1} = \frac{\partial U}{\partial\theta_1}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot\theta_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial\theta_2} = \frac{\partial U}{\partial\theta_2},$$

rezultă sistemul:

$$Ml^2\,\ddot{\theta}_1 = -\,Mgl\,\theta_1 - ka^2\,(\theta_1 - \theta_2) \qquad (4)$$

$$Ml^2\,\ddot{\theta}_2 = -\,Mgl\,\theta_2 + ka^2\,(\theta_1 - \theta_2).$$

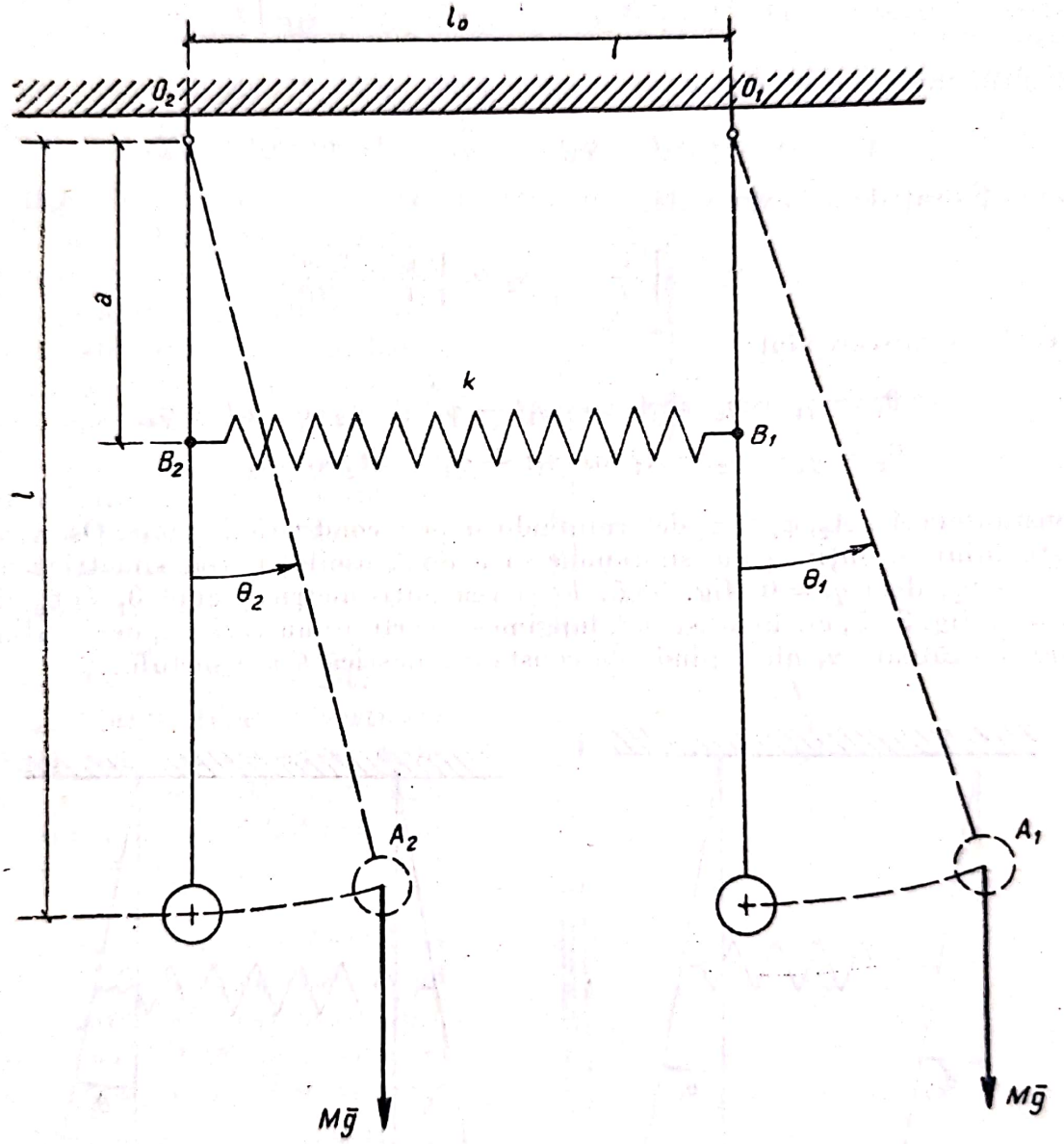


Fig. 35.5, *a*

Adunînd și scăzînd ecuațiile (4) rezultă:

$$Ml^2\,(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = -\,Mgl\,(\theta_1 + \theta_2) \qquad (5)$$

$$Ml^2\,(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = -\,(Mgl + 2ka^2)\,(\theta_1 - \theta_2),$$

deci se pot alege drept coordonate principale q_1 și q_2, semisuma și semidiferența unghiurilor θ_1 și θ_2, adică $q_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $q_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$. Ecuațiile (5) se pot pune sub forma (35.16):

$$\ddot{q}_1 = -\frac{q}{l} q_1 \qquad \ddot{q}_2 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2\,ka^2}{Ml^2}\right) q_2 \tag{6}$$

și prin integrare se obține:

$$q_1 = A_1 \cos(\nu_1 t - \varphi_1) \qquad q_2 = A_2 \cos(\nu_2 t - \varphi_2), \tag{7}$$

unde pulsațiile au expresiile:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\,ka^2}{Ml^2}}. \tag{8}$$

Legile de mișcare sînt:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= q_1 + q_2 = A_1 \cos(\nu_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(\nu_2 t - \varphi_2) \\ \theta_2 &= q_1 - q_2 = A_1 \cos(\nu_1 t - \varphi_2) - A_2 \cos(\nu_2 t - \varphi_2), \end{aligned} \tag{9}$$

constantele A_1, A_2, φ_1 și φ_2 determinîndu-se prin condițiile inițiale. Oscilațiile sistemului se obțin prin suprapunerea a două oscilații, cea simetrică cînd $\theta_1 = -\theta_2$, deci $q_1 = 0$ (fig. 35.5, *b*) și cea antisimetrică, cînd $\theta_1 = \theta_2$, deci $q_2 = 0$ (fig. 35.5, *c*). În acest caz, lungimea resortului nu variază, deci pulsația corespunzătoare ν_1 nu depinde de constanta elastică k a resortului.

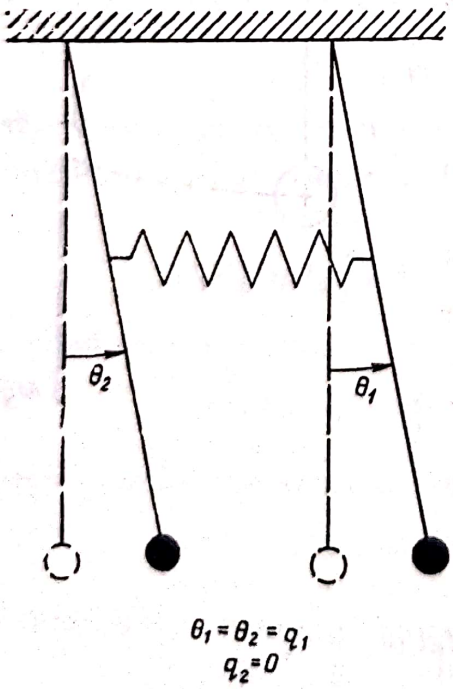


Fig. 35.5, *b*

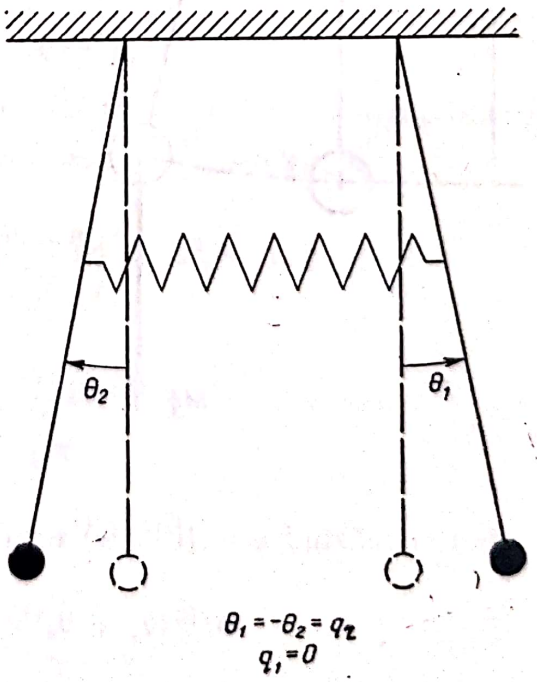


Fig. 35.5, *c*

Sistemul studiat poate servi drept aparat de laborator pentru exemplificarea fenomenului de bătăi. Pentru ca să apară bătăile, pulsațiile (8), ν_1 și ν_2, trebuie să difere foarte puțin, adică resortul să fie foarte slab. Se poate observa cum în acest caz alternativ oscilează pendulele *1* și *2*, amplitudinile maxime de oscilație ale unui pendul corespunzînd unor amplitudini foarte mici ale celuilalt pendul.

Reprezentarea în spațiul configurațiilor θ_1 și θ_2 a „traiectoriei" sistemului este similară celei din problema precedentă, „traiectoria" fiind interioară unui dreptunghi (fig. 35.4, *c*), ale cărei axe sînt înclinate sub unghiul $\varphi = \frac{\pi}{4}$ față de axele $O\ \theta_1\theta_2$.

35.6. O bară omogenă AB de lungime l și masă M este articulată în A, de o bară verticală DA încastrată în capătul D (fig. 35.6). Pentru micile deplasări pe orizontală ale capătului A al barei încastrate se poate presupune că aceste deformări sînt proporționale cu componenta orizontală H, a reacțiunii din A, constanta elastică k fiind cunoscută.

Să se studieze micile oscilații ale barei AB presupunînd că în momentul inițial sistemul este în repaus, bara AB este înclinată sub unghiul θ_0 față de verticală și bara DA este verticală. Aplicație numerică: $Mg = 1$ kgf, $l = 20$ cm, $k = 7{,}5$ kgf/cm, $g \approx$ $\approx 9{,}8$ m/s^2, $\theta_0 = 4°$.

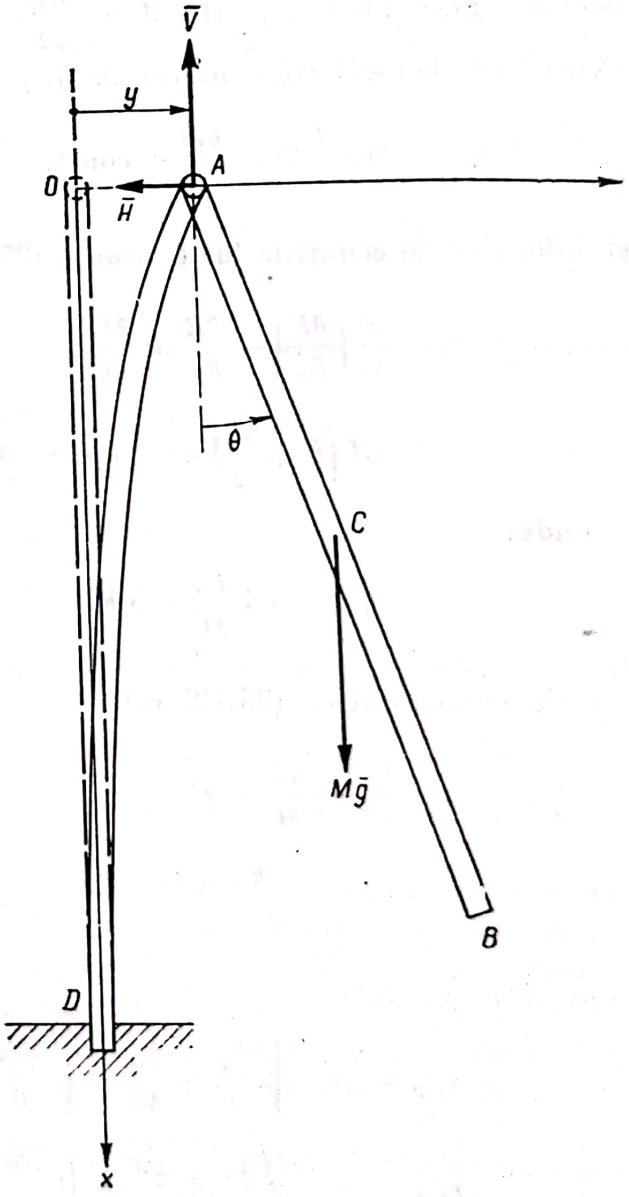


Fig. 35.6

Rezolvare. Bara AB are două grade de libertate, poziția ei fiind determinată prin deplasarea y a articulației A față de poziția ei inițială O și de unghiul θ.

Forțele derivă din funcția de forțe:

$$U = Mg\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{ky^2}{2}, \qquad (1)$$

poziția de echilibru stabil (35.1), (35.3) fiind $y = 0$, $\theta = 0$.

Coordonatele centrului maselor C și componentele vitezei sale sînt:

$$\xi = \frac{l}{2}\cos\theta \qquad \eta = y + \frac{l}{2}\sin\theta$$
$$\dot{\xi} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} \qquad \dot{\eta} = \dot{y} + \frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}, \tag{2}$$

deci energia cinetică (34.9) a barei este:

$$E = \frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}) + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{3} + l\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta\right), \tag{3}$$

deoarece momentul de inerție $J_c = \frac{Ml^2}{12}$.

Pentru micile oscilații, conform (35.6) și (35.8), va rezulta:

$$U \approx -Mg\frac{l}{4}\theta^2 - \frac{ky^2}{2} + \text{const.}, \qquad E \approx \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{3} + l\dot{y}\dot{\theta}\right) \tag{4}$$

și înlocuind în ecuațiile lui Lagrange (35.9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$
$$M\left(\ddot{y} + \frac{l\ddot{\theta}}{2}\right) = -ky \qquad M\left(\frac{l^2\ddot{\theta}}{3} + \frac{l\ddot{y}}{2}\right) = -\frac{Mgl\theta}{2},$$

de unde:

$$\ddot{y} = -4\frac{ky}{M} + 3g\theta \qquad \ddot{\theta} = \frac{6ky}{Ml} - \frac{6g\theta}{l}. \tag{5}$$

Ecuația caracteristică (35.12) este:

$$\begin{vmatrix} -\frac{4k}{M} - r^2 & 3g \\ \frac{6k}{Ml} & -\frac{6g}{l} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

și rădăcinile ei sînt:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{3g}{l} + \frac{2k}{M} + \sqrt{\frac{9g^2}{l^2} + \frac{4k^2}{M^2} + \frac{6kg}{Ml}}} = \pm i\nu_1$$
$$r_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{3g}{l} + \frac{2k}{M} - \sqrt{\frac{9g^2}{l^2} + \frac{4k^2}{M^2} + \frac{6kg}{Ml}}} = \pm i\nu_2. \tag{6}$$

Integralele generale ale ecuațiilor (5) sînt:

$$y = A_{11}\cos \nu_1 t + B_{11}\sin \nu_1 t + A_{12}\cos \nu_2 t + B_{12}\sin \nu_2 t$$
$$\theta = A_{21}\cos \nu_1 t + B_{21}\sin \nu_1 t + A_{22}\cos \nu_2 t + B_{22}\sin \nu_2 t. \qquad (7)$$

Punînd condițiile inițiale: $t = 0$, $y = A_{11} + A_{12} = 0$, $\theta = A_{21} + A_{22} = \theta_0$, $\dot{y} = \nu_1 B_{11} + \nu_1 B_{12} = 0$, $\dot{\theta} = \nu_1 B_{21} + \nu_2 B_{22} = 0$ și ținînd seamă că din (5) rezultă: $-\nu_1^2 A_{11} = -\frac{4k}{M} A_{11} + 3g A_{21}$, $-\nu_1^2 B_{11} = -\frac{4k}{M} B_{11} + 3g B_{21}$, $-\nu_2^2 A_{12} = -\frac{4k}{M} A_{12} + 3g A_{22}$, $-\nu_2^2 B_{12} = -\frac{4k}{M} B_{12} + 3g B_{22}$ se determină constantele de integrare și înlocuind în B se obțin legile de mișcare:

$$y = \frac{-3g\theta_0}{\nu_1^2 - \nu_2^2}(\cos \nu_1 t - \cos \nu_2 t)$$
$$\theta = \frac{\theta_0}{\nu_1^2 - \nu_2^2}\left[\left(\nu_1^2 - \frac{4k}{M}\right)\cos \nu_1 t - \left(\nu_2^2 - \frac{4k}{M}\right)\cos \nu_2 t\right]. \qquad (8)$$

În cazul aplicației numerice făcînd înlocuirile în sistemul CGS pulsațiile (6) au valorile:

$$\nu_1 = 7\left(\sqrt{\frac{333}{2}} + \sqrt{\frac{273}{2}}\right) s^{-1}$$
$$\nu_2 = 7\left(\sqrt{\frac{333}{2}} - \sqrt{\frac{273}{2}}\right) s^{-1}.$$

Raportul lor $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ fiind irațional, mișcarea nu are un caracter periodic. Legile de mișcare sînt:

$$y = 0{,}00694\,(\cos \nu_1 t - \cos \nu_2 t)\ [\text{cm}]; \qquad \theta = [0{,}02985\cos \nu_1 t + 3{,}97015\cos \nu_2 t]^\circ$$

35.7. O bară omogenă grea A_1A_2 de masă M și lungime $2a$ este suspendată prin două resorturi identice avînd constanta elastică k și lungimea în stare neîntinsă l_0 de punctele B_1B_2, unde $B_1B_2 = 2a$ (fig. 35.7, *a*). Presupunînd că bara rămîne într-un plan vertical, să se studieze micile oscilații ale barei în jurul poziției stabile de echilibru. Ce devin ecuațiile de mișcare dacă se ține seamă de rezistența aerului proporțională cu vitezele punctelor barei?

Rezolvare. Bara are trei grade de libertate, poziția ei față de poziția de echilibru $A_1^0A_2^0$ fiind determinată prin coordonatele ξ și η ale centrului maselor

și unghiul θ. Dacă se neglijează rezistența aerului, forțele derivă din funcția de forță:

$$U = -Mg\xi - \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2 - \frac{k}{2}(l_2 - l_0)^2, \tag{1}$$

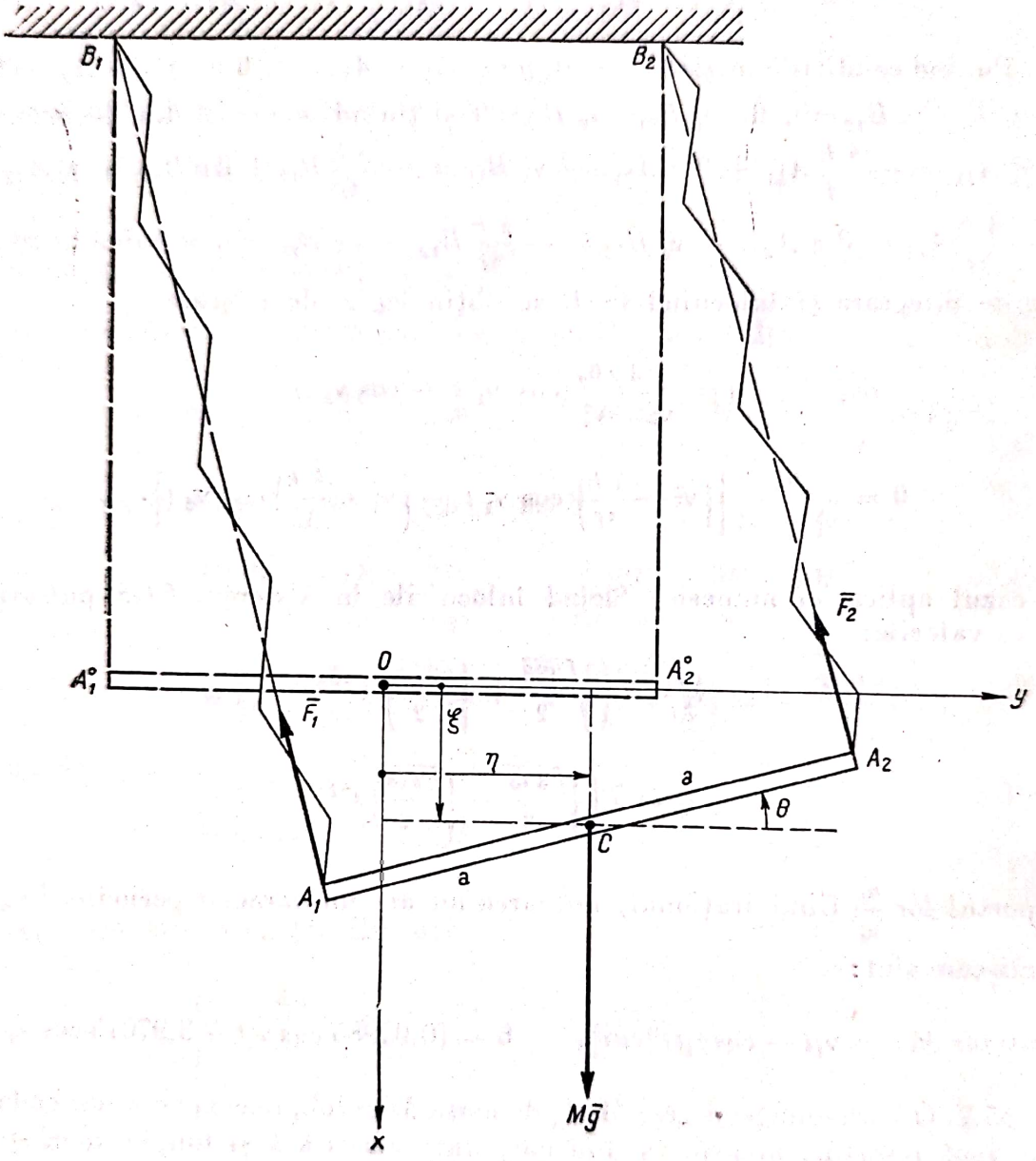


Fig. 35.7, *a*

unde lungimile resorturilor sînt:

$$l_1 = B_1A_1 = \sqrt{(l_0 + \Delta l + \xi + a\sin\theta)^2 + (\eta + a + a\cos\theta)^2}$$
$$l_2 = B_2A_2 = \sqrt{(l_0 + \Delta l + \xi - a\sin\theta)^2 + (\eta - a + a\cos\theta)^2} \tag{2}$$

Δl fiind alungirea resorturilor în poziția de echilibru.

În poziția de echilibru $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, conform (35.1):

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -Mg - k\left[(l_1 - l_0)\frac{l_0 + \Delta l + \xi + a\sin\theta}{l_1} + \right.$$
$$\left. + (l_2 - l_0)\frac{l_0 + \Delta l + \xi - a\sin\theta}{l_2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = -k\left[(l_1 - l_0)\frac{\eta + a - a\cos\theta}{l_1} + (l_2 - l_0)\frac{\eta - a + a\cos\theta}{l_2}\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -k\left[(l_1 - l_0)\frac{(l_0 + \Delta l + \xi + a\sin\theta)\,a\cos\theta + (\eta + a - a\cos\theta)\,a\sin\theta}{l_1} + \right.$$
$$\left. + (l_2 - l_0)\frac{-(l_0 + \Delta l + \xi - a\sin\theta)\,a\cos\theta - (\eta - a + a\cos\theta)\,a\sin\theta}{l_2}\right] = 0,$$

de unde rezultă alungirea statică:

$$\Delta l = \frac{Mg}{2k}. \qquad (4)$$

Pentru studiul micilor oscilații se dezvoltă în serie Mac-Laurin funcția de forță.

Printr-un calcul elementar se calculează în punctul $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, derivatele parțiale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -2k, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = -\frac{Mg}{l_0 + \Delta l}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -2ka^2,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \theta} = 0$$

și înlocuind în expresia (35.8):

$$U = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}x^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}y^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\theta^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\xi\eta + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta}\xi\theta + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \theta}\eta\theta\right) \qquad (5)$$

rezultă:

$$U = -k\xi^2 - \frac{Mg}{2(l_0 + \Delta l)}\eta^2 - ka^2\theta^2. \qquad (6)$$

Poziția de echilibru este stabilă, deoarece expresia (35.4) — identică cu relația (6) — este negativ definită.

Energia cinetică a barei (34.9) este:

$$E = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{6}\frac{Ma^2}{3}\dot{\theta}^2 \qquad (7)$$

şi înlocuind în ecuaţiile lui Lagrange (35.9):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial E}{\partial \xi}=\frac{\partial U}{\partial \xi};\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}}\right)-\frac{\partial E}{\partial \eta}=\frac{\partial U}{\partial \eta};\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E}{\partial \theta}=\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

rezultă ecuaţiile:

$$M\ddot{\xi}=-2k\xi,\qquad M\ddot{\eta}=-\frac{Mg\eta}{l_0+\Delta l},\qquad \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta}=-2ka^2\theta, \tag{8}$$

ale căror integrale generale sînt:

$$\xi=A_1\cos(\nu_1 t-\varphi_1),\quad \eta=A_2\cos(\nu_2 t-\varphi_2),\quad \theta_3=A_3\cos(\nu_3 t-\varphi_3), \tag{9}$$

pulsaţiile avînd valorile:

$$\nu_1=\sqrt{\frac{2k}{M}}=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}};\qquad \nu_2=\sqrt{\frac{g}{l_0+\Delta l}};\qquad \nu_3=\sqrt{\frac{6k}{M}}=\sqrt{\frac{3g}{\Delta l}}. \tag{10}$$

Punctul reprezentativ al sistemului din spaţiul configuraţiilor $\xi\eta\theta$ „umple"[1] în general paralelipipedul de laturi $2A_1$, $2A_2$, $2A_3$ avînd drept axe de simetrie axele de coordonate ale spaţiului configuraţiilor, deoarece — după cum rezultă din ecuaţiile (8) — coordonatele alese sînt coordonate principale. Centrul maselor C descrie în planul xOy o curbă de acelaşi tip. Dacă raportul $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\sqrt{\frac{l_0+\Delta l}{\Delta l}}=$ raţional, traiectoria centrului maselor este o curbă Lissajous.

Afară de poziţia de echilibru, bara mai are o poziţie de echilibru, cînd resorturile sînt încrucişate ca în figura 35.7, *b*. Se lasă pe seama cititorului să studieze stabilitatea acestei poziţii de echilibru.

Dacă se ţine seamă de rezistenţa aerului, forţa de rezistenţă pe un element MM' de lungime ds al barei este:

$$d\bar{R}=-\lambda\bar{v}\,ds, \tag{11}$$

unde $\bar{v}$ este viteza elementului şi λ — un factor de proporţionalitate (fig. 35.7, *c*).

Vectorul de poziţie al centrului elementului MM' este:

$$\bar{r}=(\xi+s\sin\theta)\,\bar{i}+(\eta+s\cos\theta)\,\bar{j},$$

deci

$$\begin{aligned}\bar{v}&=\dot{\bar{r}}=(\dot{\xi}-s\cos\theta\dot{\theta})\,\bar{i}+(\dot{\eta}-s\sin\theta\dot{\theta})\,\bar{j}\\ \delta\bar{r}&=(\delta\xi-s\cos\theta\,\delta\theta)\,\bar{i}+(\delta\eta-s\sin\theta\,d\theta)\,\bar{j},\end{aligned} \tag{12}$$

lucrul mecanic al forţelor de rezistenţă a aerului fiind:

$$\delta\mathcal{L}=\int_{-a}^{a}(-\lambda\bar{v}\,ds)\cdot\delta\bar{r}=-\lambda\int_{-a}^{a}[(\dot{\xi}-s\cos\theta\dot{\theta})(\delta\xi-s\cos\theta\,\delta\theta)+$$

$$+(\dot{\eta}-s\sin\theta\dot{\theta})(\delta\eta-s\cos\theta\,\delta\theta)]\,ds=-2a\lambda\dot{\xi}\,\delta\xi-2a\lambda\dot{\eta}\,\delta\eta-\frac{2a^3\lambda\dot{\theta}}{3}\delta\theta, \tag{13}$$

[1] În sensul din problema 35.4.

deci forţele generalizate corespunzătoare vor fi conform (34.10):

$$Q'_\xi = -2a\lambda\dot{\xi} \qquad Q'_\eta = -2a\lambda\eta \qquad Q'_0 = -\frac{2}{3}a^3\lambda\dot{\theta}. \tag{14}$$

Adunîndu-le cu forţele generalizate din prima ipoteză $\frac{\partial U}{\partial \xi}$, $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ şi $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, date de relaţiile (6), se găsesc expresiile forţelor generalizate:

$$Q_\xi = -2k\xi - 2a\lambda\dot{\xi} \qquad Q_\eta = -\frac{Mg\eta}{l_0 + \Delta l} 2a\lambda\dot{\eta} \qquad Q_\theta = -2ka^2\theta - \frac{2}{3}a^3\lambda\dot{\theta} \tag{15}$$

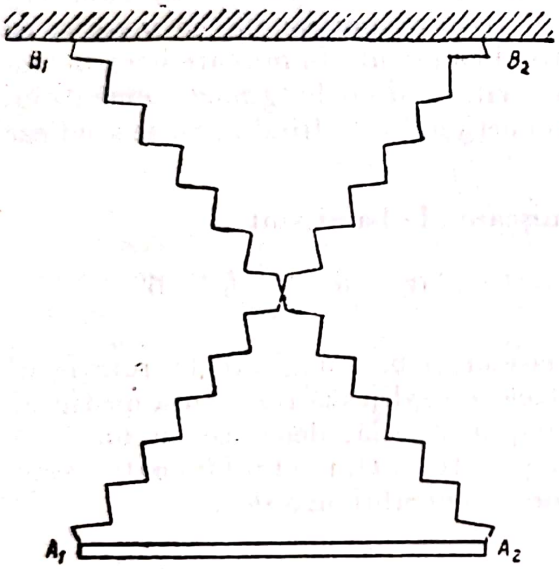


Fig. 35.7, *b*

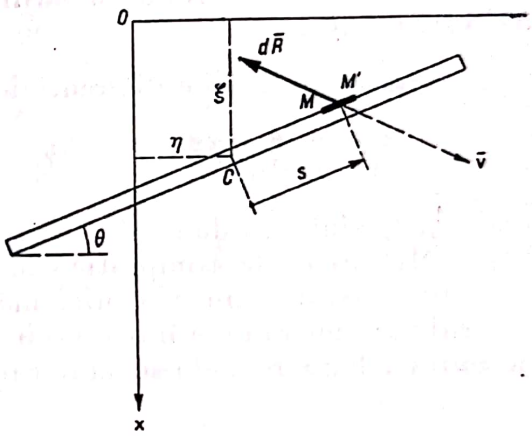


Fig. 35.7, *c*

şi înlocuindu-le în ecuaţiile lui Lagrange se obţine:

$$\begin{gathered} M\ddot{\xi} + 2a\delta\dot{\xi} + 2k\xi = 0 \qquad M\ddot{\eta} + 2a\lambda\dot{\eta} + \frac{Mg\eta}{l_0 + \Delta l} = 0 \\ \frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta} + \frac{2}{3}a^3\lambda\dot{\theta} + 2ka^2\theta = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

ecuaţii diferenţiale liniare ale căror integrale generale sînt:

$$\xi = A_1 e^{-\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t - \varphi_1), \qquad \eta = A_2 e^{-\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t - \varphi_2)$$

$$\theta = A_3 e^{-\alpha_3 t}\cos(\beta_3 t - \varphi_3),$$

cu:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{a\lambda}{M}; \qquad \beta_1 = \sqrt{x_1^2 - \alpha_1^2}, \qquad \beta_2 = \sqrt{x_2^2 - \alpha_2^2}, \qquad \beta_3 = \sqrt{\nu_3^2 - \alpha_3^2}.$$

Conform (35.14), mişcarea este asimptotic stabilă, oscilaţiile barei fiind amortizate. Dacă se neglijează rezistenţa aerului, mişcarea barei este simplu stabilă.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

35.8. Să se studieze micile oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru ale sistemului din problema 34.10.

Răspuns: $\theta = \theta_0 \cos \nu t, \quad y = -\dfrac{m(3R-r)\theta_0}{4M+3m} \cos \nu t,$

unde $$\nu^2 = \frac{(4M+3m)(R-r)g}{mr^2 + M(6R^2+4r^2-8Rr)}.$$

35.9. O bară omogenă de masă M şi lungime l se mişcă într-un plan Oxy fiind atrasă de punctul fix O cu o forţă elastică proporţională cu masa şi cu distanţa, factorul de proporţionalitate k fiind cunoscut. În mişcare bara întîmpină rezistenţa mediului proporţională cu viteza şi cu lungimea elementului de bară pe care se exercită, factorul de proporţionalitate fiind λ. Să se studieze mişcarea barei.

Răspuns: Ecuaţiile diferenţiale de mişcare ale barei sînt:

$$\ddot{\xi} + \frac{\lambda l}{M}\dot{\xi} + h\xi = 0, \quad \ddot{\eta} + \frac{\lambda l}{M}\dot{\eta} + h\eta = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{\lambda l}{M}\dot{\theta} = 0,$$

unde ξ, η sînt coordonatele centrului maselor şi θ — unghiul de rotaţie al barei. Mişcarea este asimptotic stabilă. Dacă se neglijează rezistenţa mediului ($\lambda = 0$), mişcarea nu este nici măcar simplu stabilă, deoarece cu toate că centrul maselor rămîne într-o vecinătate a punctului O, unghiul θ poate creşte nelimitat, bara rotindu-se uniform în jurul centrului maselor.

Capitolul XXXVI

ECUAŢIILE CANONICE ALE LUI HAMILTON

A. DEFINIŢII ŞI FORMULE

Se consideră un sistem de puncte materiale A_i supus la legături olonome avînd h grade de libertate, poziţia sistemului depinzînd de coordonatele generalizate q_k ($k = 1, 2, \ldots, h$). Se presupune că forţele derivă dintr-o cvasi-funcţie de forţă $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_h, t)$.

Potenţialul cinetic este:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_h, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_h, t) = E + U, \tag{36.1}$$

unde $E = E(q_1, q_2, \ldots, q_h, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_h, t)$ este energia cinetică a sistemului. Se va numi *impuls generalizat* p_k expresia:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k}. \tag{36.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă coordonata q_k reprezintă o lungime, p_k are dimensiunea unui impuls, și dacă q_k este un unghi, p_k are dimensiunea unui moment cinetic.

Funcția lui *Hamilton* este:

$$H = \sum_{k=1}^{h} p_k \dot{q}_k - L. \tag{36.3}$$

Energia cinetică fiind o funcție de gradul al doilea în raport cu $\dot{q}_k$, relațiile (36.2) sînt liniare în raport cu $\dot{q}_k$; rezolvîndu-le în raport cu q_k și înlocuind expresiile vitezelor generalizate $\dot{q}_k$ în (36.3) rezultă:

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_h, p_1, p_2, \ldots, p_h, t). \tag{36.4}$$

Ecuațiile canonice ale lui Hamilton sînt:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_k \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{36.5}$$

Ele reprezintă un sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul întîi și înlocuiesc cele h ecuații de ordinul al doilea ale lui Lagrange. Prin integrarea ecuațiilor canonice (36.5) se determină mișcarea sistemului de puncte. O reprezentare a mișcării se poate obține în *spațiul fazelor*, spațiu euclidian cu $2h$ dimensiuni, punctul reprezentativ al mișcării $R(q_1, q_2, \ldots, q_h, p_1, p_2, \ldots, p_h, t)$ descriind o traiectorie denumită curbă *caracteristică*.

Cum:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial E}, \tag{36.6}$$

dacă legăturile sînt scleronome, și U nu depinde explicit de timp, se obține o integrală primă a mișcării $H = \text{const.}$, care nu este altceva decît integrala energiei mecanice, deoarece în acest caz:

$$H = W = E + V = E - U = \text{const.}, \tag{36.7}$$

$V = -U$ fiind energia potențială a sistemului de forțe, și W — energia mecanică totală.

Integrale prime ale mișcării se mai pot obține în cazul cînd o anumită coordonată generalizată q_i, denumită *coordonată ascunsă*, nu apare în expresia funcțiilor L sau H. În acest caz, din (36.2) rezultă că impulsul generalizat corespunzător se conservă:

$$p_i = \text{const.} \tag{36.8}$$

B. PROBLEME REZOLVATE

36.1. Folosind ecuațiile canonice ale lui Hamilton, să se studieze mișcarea unei bare grele la suprafața pămîntului, lansată într-un plan vertical. Se cunosc masa M a barei, momentul de inerție J față de centrul maselor și condițiile inițiale ale mișcării, viteza centrului maselor $\bar{v}_0$, unghiul α de

lansare față de orizontală, viteza unghiulară ω_0. Se neglijează efectul rezistenței aerului.

Rezolvare. Alegînd sistemul de referință Oq_1q_2 din figura 36.1, poziția barei este determinată de coordonatele q_1, q_2 ale centrului maselor C și de unghiul q_3.

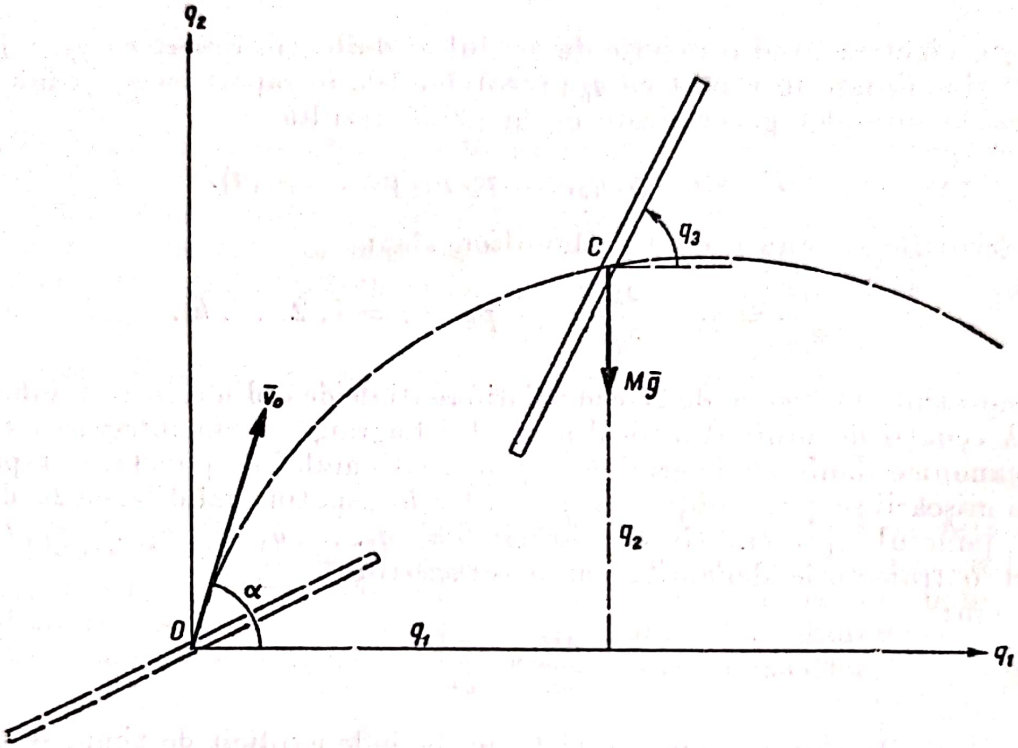


Fig. 36.1

Energia cinetică (34.9), funcția de forță și potențialul cinetic (36.1) sînt:

$$E = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{q}_3^2 \quad U = -Mgq_2 \tag{1}$$

$$L = E + U = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{q}_3^2 - Mgq_2, \tag{2}$$

deci funcția lui Hamilton (36.3) este:

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 - \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} J\dot{q}_3^2 + Mgq_2, \tag{3}$$

unde:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = Mq_2; \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = J\dot{q}_3 \tag{4}$$

sînt impulsurile generalizate (36.2) obținute din (2). Rezolvînd ecuațiile (4):

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{M} \quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{M} \quad \dot{q}_3 = \frac{p_3}{J} \tag{5}$$

și (5) în (3) se obține funcția lui Hamilton sub forma (36.4):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} + \frac{p_3^2}{2J} + Mgq_2. \tag{6}$$

Bara neavînd legături, se poate aplica și formula (36.7): $H = E + V = E - U$, pentru calculul funcției lui Hamilton; după substituția (5) obținînd tot relația (6).

Cele $6 = 2 \times 3$ ecuații canonice sînt:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{M} = \dot{q}_1 \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{M} = \dot{q}_2 \quad \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{J} = \dot{q}_3 \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 = -\dot{p}_1; \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = Mg = -\dot{p}_2; \quad \frac{\partial H}{\partial q_3} = 0 = -\dot{p}_3. \tag{8}$$

Relațiile (7) sînt identice cu (5) și din relațiile (8) prin integrare rezultă:

$$p_1 = C_1 \quad p_2 = -Mgt + C_2 \quad p_3 = C_3 \tag{9}$$

impulsurile generalizate $p_1 = M\dot{q}_1$ (impuls față de axa Oq_1) și $p_3 = J\dot{q}_3$ (moment cinetic față de centrul maselor) conservîndu-se (36.8), coordonatele q_1 și q_3 fiind coordonate ascunse. Din (7) și (9) rezultă prin integrare:

$$q_1 = \frac{C_1}{M}t + C_4; \quad q_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{C_2}{M}t + C_5; \quad q_3 = \frac{C_3}{J}t + C_6 \tag{10}$$

și ținînd seamă de condițiile inițiale: $t = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = q_{30}$,

$$p_1 = M\dot{q}_1 = Mv_0 \cos\alpha, \; p_2 = M\dot{q}_2 = Mv_0 \sin\alpha, \; p_3 = J\dot{q}_3 = J\omega_0,$$

relațiile (9) și (10) devin:

$$q_1 = v_0 t \cos\alpha \; q_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\cos\alpha \; q_3 = \omega_0 t + q_{30}$$

$$p_1 = M\, v_0 \cos\alpha \, p_2 = M\,(-gt + v_0 \cos\alpha)\, p_3 = J\omega_0.$$

Traiectoria centrului maselor este parabola:

$$q_2 = -\frac{gq_1^2}{2v^2 \cos^2\alpha} + q_1 \operatorname{tg}\alpha,$$

bara rotindu-se uniform cu viteza unghiulară $\dot{q}_3 = \omega_0$ în jurul centrului maselor.

36.2. Folosind ecuațiile canonice, să se studieze mișcarea unui punct A de masă m sub acțiunea unei forțe elastice de constantă elastică k. Caz particular: oscilatorul liniar.

Rezolvare. Considerînd un sistem de coordonate tridreptunghic $Oq_1q_2q_3$, poziția punctului este determinată de coordonatele q_1, q_2, q_3.

Energiile cinetică și potențială sînt:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \qquad V = -U = \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2), \tag{1}$$

deci funcția lui Hamilton (36.7) este:

$$H = E + V = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \text{const.}, \tag{2}$$

deoarece bara nu are legături și deci $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Impulsurile generalizate (36.2) ținînd seamă de (1) sînt:

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} m\dot{q}_1 \qquad p_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2 \qquad p_3 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{q}_3 \tag{3}$$

deci:

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} \qquad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} \qquad \dot{q}_3 = \frac{p_3}{m} \tag{4}$$

și înlocuind (4) în (2):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = \text{const.} \tag{5}$$

Înlocuind în ecuațiile (36.5) $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$, $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{}_k (k = 1, 2, 3)$,

se obțin relațiile (4) și:

$$\dot{p}_1 = -k q_1 \qquad \dot{p}_2 = -k q_2 \qquad \dot{p}_3 = -k q_3. \tag{6}$$

Ecuațiile diferențiale (4) și (6) formează trei sisteme liniare cu coeficienți constanți în p_1, q_1; p_2, q_2, respectiv p_3, q_3. Ecuația caracteristică a unuia dintre aceste sisteme este:

$$\begin{vmatrix} -r & -k \\ \frac{1}{m} & -r \end{vmatrix} = 0 \qquad r^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

de unde $r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\nu$ și integralele generale corespunzătoare sînt:

$$q_1 = A_1 \cos(\nu t - \varphi_1); \quad q_2 = A_2 \cos(\nu t - \varphi_2); \quad q_3 = A_3 \cos(\nu t - \varphi_3) \tag{7}$$

$$p_1 = -m\nu A_1 \sin(\nu t - \varphi_1); \quad p_2 = -m\nu A_2 \sin(\nu t - \varphi_2)$$

$$p_3 = -m\nu A_3 \sin(\nu t - \varphi_3),$$

constantele A și φ determinîndu-se prin condițiile inițiale.

În cazul oscilatorului liniar, $q_2 = q_3 = 0$ și notînd $p_1 = p$, $q_1 = q$, integrala energiei (5) devine:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = W, \tag{8}$$

unde prin W am notat energia mecanică totală constantă, iar $q = A\cos(\nu t - \varphi)$ $p = -m\nu A\sin(\nu t - \varphi)$, amplitudinea oscilațiilor fiind $A = \sqrt{\frac{2W}{k}}$.

Punctul reprezentativ $R(q, p)$ descrie în planul fazelor *curba caracteristică* dată de ecuația (8), elipsa:

$$\frac{q^2}{\frac{2W}{k}} + \frac{p^2}{2mW} = 1, \tag{9}$$

de semiaxe $a = \sqrt{\frac{2W}{k}}$, $b = \sqrt{2mW}$.

Pentru diferite condiții inițiale, deci pentru diferite valori ale lui W se obține o familie de elipse concentrice (fig. 36.2). Pentru $W = 0$, elipsele (9) se reduc la punctul $O(O, O)$, care este *punct singular* al familiei de caracteristice, deoarece $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$. Acest punct singular reprezintă poziția de

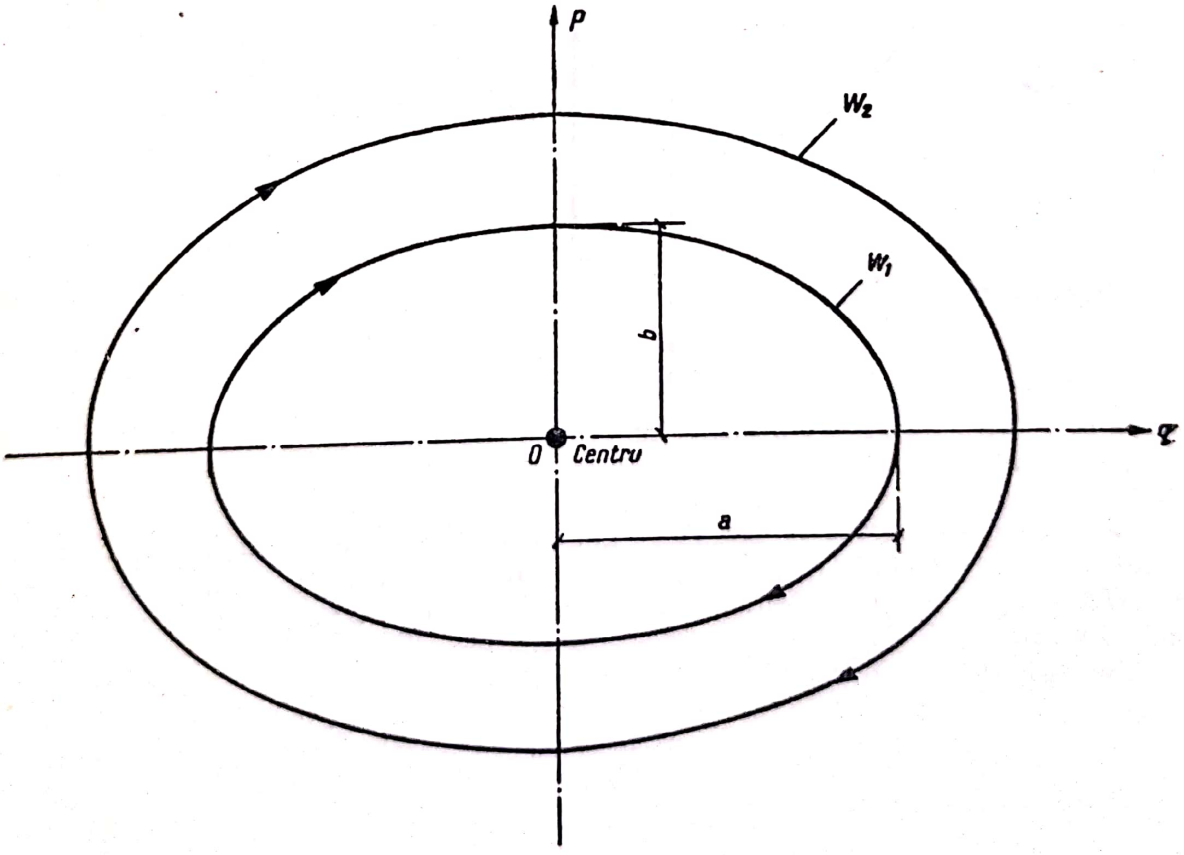


Fig. 36.2

echilibru a punctului, prin el nu trece nici o curbă caracteristică. Poziția de echilibru O este stabilă, deoarece dacă se depărtează punctul din O, caracteristica corespunzătoare rămîne în vecinătatea lui O.

În mecanica cuantică, un rol foarte important are aria închisă de curba caracteristică. Aria $= \pi a b = 2\pi W \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi W}{\nu} = \frac{W}{f}$.

36.3. Să se studieze, cu ajutorul ecuațiilor canonice, mișcarea unui pendul sferic format dintr-un punct material greu A de masă m, suspendat de punctul fix O printr-un fir de lungime l. Caz particular: pendulul simplu.

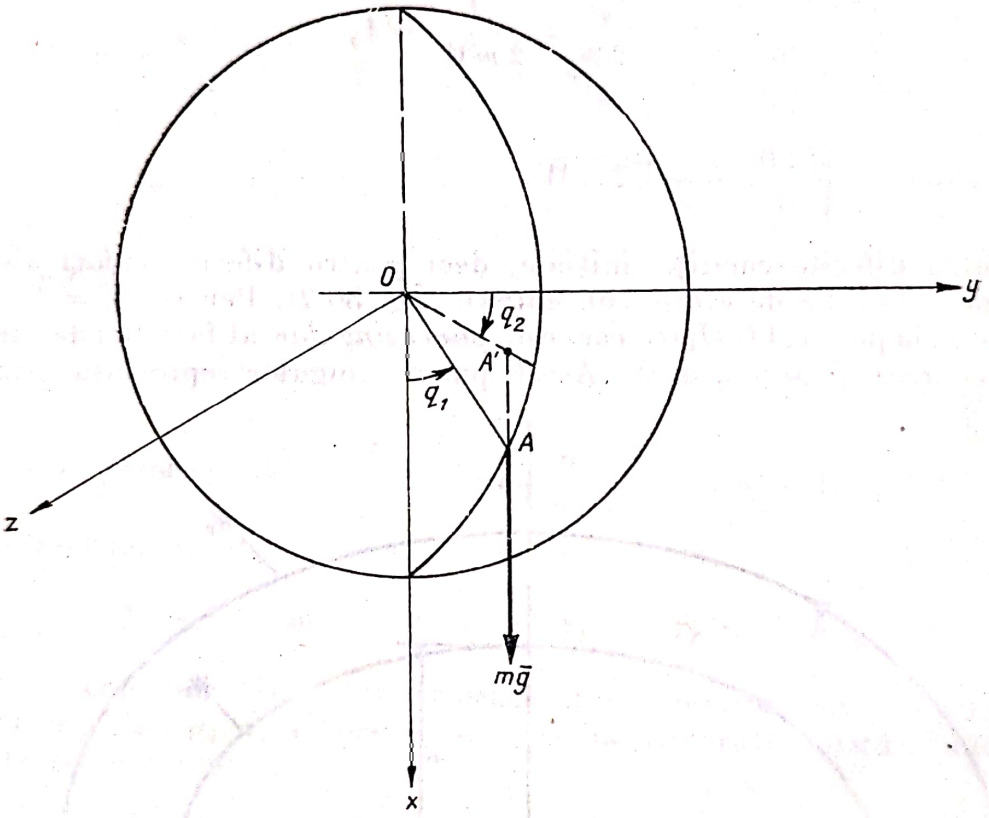


Fig. 36.3, *a*

Rezolvare. Punctul A are două grade de libertate, poziția lui în raport cu un triedru fix $Oxyz$ (fig. 36.3, *a*) fiind determinată de unghiurile $q_1 = \sphericalangle xOA$ și $q_2 = \sphericalangle yOA'$, unde A' este proiecția lui A pe planul orizontal yOz (coordonate sferice).

Se calculează energiile cinetică și potențială:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{q}_1^2 + \sin^2 q_1 \dot{q}_2^2)$$

$$V = -U = mg l (1 - \cos q_1), \qquad (1)$$

deoarece

$$x = l\cos q_1,\ y = l\sin q_1\cos q_2,\ z = l\sin q_1\sin q_2,$$

$$\dot{x} = -l\sin q_1\,\dot{q}_1,\ \dot{y} = l(\cos q_1\cos q_2\,\dot{q}_1 - \sin q_1\sin q_2\,\dot{q}_2),$$

$$\dot{z} = l(\cos q_1\sin q_2\,\dot{q}_1 + \sin q_1\cos q_2\,\dot{q}_2);$$

legătura fiind scleronomă, funcția lui Hamilton (36.7) este:

$$H = E + V = \frac{1}{2}m l^2(\dot{q}_1^2 + \sin^2 q_1\dot{q}_1^2) + mg l(1-\cos q_1) = \text{const.} \quad (2)$$

Din (1) se obțin impulsurile generalizate (36.2):

$$p_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = m l^2\dot{q}_1 \qquad p_2 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} = ml^2\sin^2 q_1\dot{q}_2 \quad (3)$$

și înlocuind valorile lui $\dot{q}_1$ și $\dot{q}_2$ obținute din (3) în (2) rezultă:

$$H = \frac{1}{2ml^2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}\right) + mgl(1-\cos q_1) = \text{const.} \quad (4)$$

Ecuațiile canonice (36.5) sînt:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{ml^2} = \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{ml^2\sin^2 q_1} = \dot{q}_2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{p_2^2\cos q_1}{ml^2\sin^3 q_1} + mgl\sin q_1 = -\dot{p}_1 \quad \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 = -\dot{p}_2.$$

Coordonata q_2 fiind ascunsă, se obține o integrală primă a mișcării, impulsul generalizat:

$$p_2 = ml^2\sin^2 q_1\,\dot{q}_2 = \text{const.}, \quad (6)$$

adică momentul cinetic al punctului A' în raport cu Ox conservîndu-se. O a doua integrală primă este aceea a conservării energiei mecanice totale $H = W = \text{const.}$, dată de relațiile (2) sau (4). Pentru a integra complet sistemul (5) echivalent cu sistemul:

$$\frac{dq_1}{\frac{p_1}{ml^2}} = \frac{dq_2}{\frac{p_2}{ml^2\sin^2 q_1}} = \frac{dp_1}{\frac{p_2^2\cos q_1}{ml^2\sin^3 q_1} - mgl\sin q_1} = \frac{dp_2}{0} = dt$$

este nevoie deci numai de încă două cvadraturi. Soluțiile acestui sistem se pot exprima doar prin integrale eliptice.

În cazul pendulului simplu (fig. 36.3, *b*) presupunînd că mișcarea are loc în planul xOy, $q_2 = O$, $\dot{q}_2 = 0$, deci $p_2 = 0$, și notînd $p_1 = p$, $q_1 = q$, integrala energiei (4) devine:

$$\frac{p^2}{2\,m\,l^2} + mgl\,(1 - \cos q) = W, \tag{7}$$

unde W = const. este energia mecanică totală a sistemului.

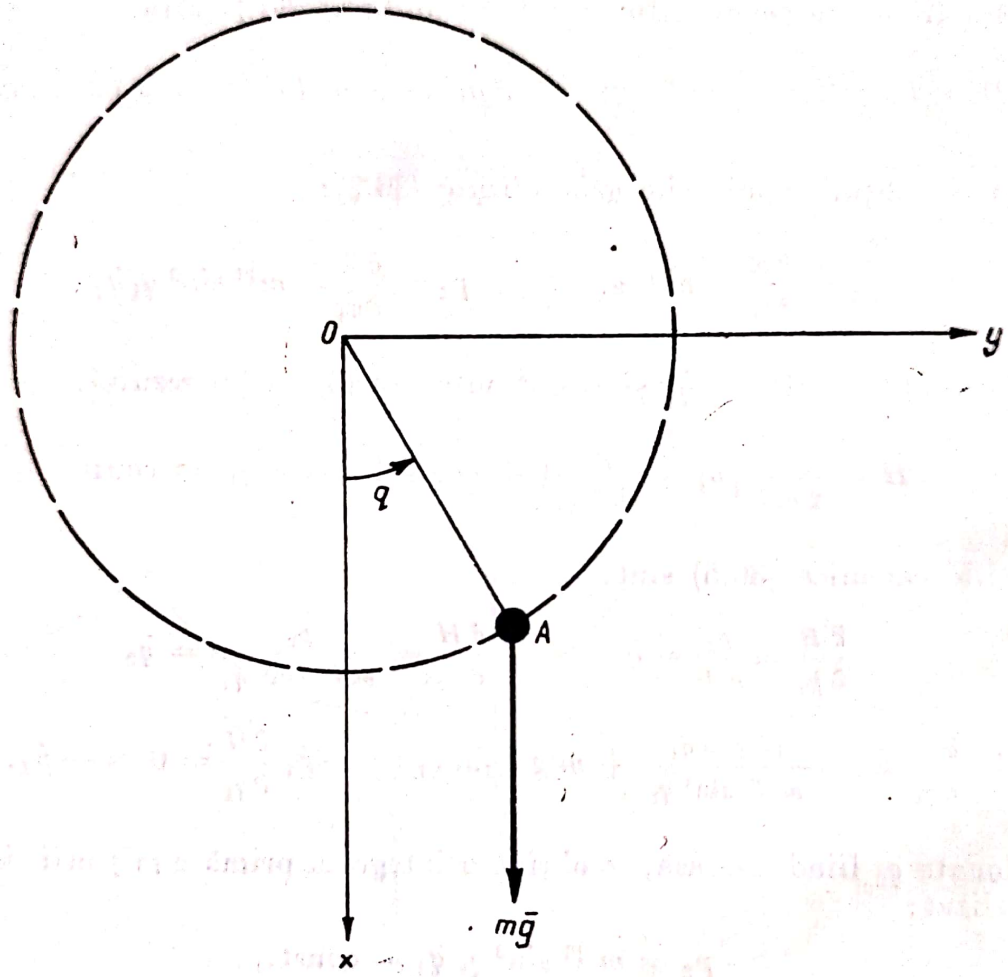


Fig. 36.3, *b*

Să se reprezinte familia de curbe caracteristice din planul fazelor date de ecuația (7) pentru diferite valori ale lui W (fig. 36.3, *c*). Punctele singulare ale caracteristicilor sînt date de condițiile $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$, deci din (5), de:

$$\dot{p} = -\,mgl \sin q = 0 \qquad \dot{q} = \frac{p}{ml^2} = 0, \tag{8}$$

adică $p = 0$, $\sin q = 0$, $q = k\,\pi$. Acestea sînt pozițiile de echilibru.

Din figura 36.3, *c* reiese că punctele $q = 2\,n\pi$, $p = 0$ reprezintă poziții de echilibru stabile ($W = 0$), în orice vecinătate a acestor puncte existînd caracteristici închise, curbele 1. Punctele $q = (2\,n + 1)\,\pi$, $p = 0$ reprezintă

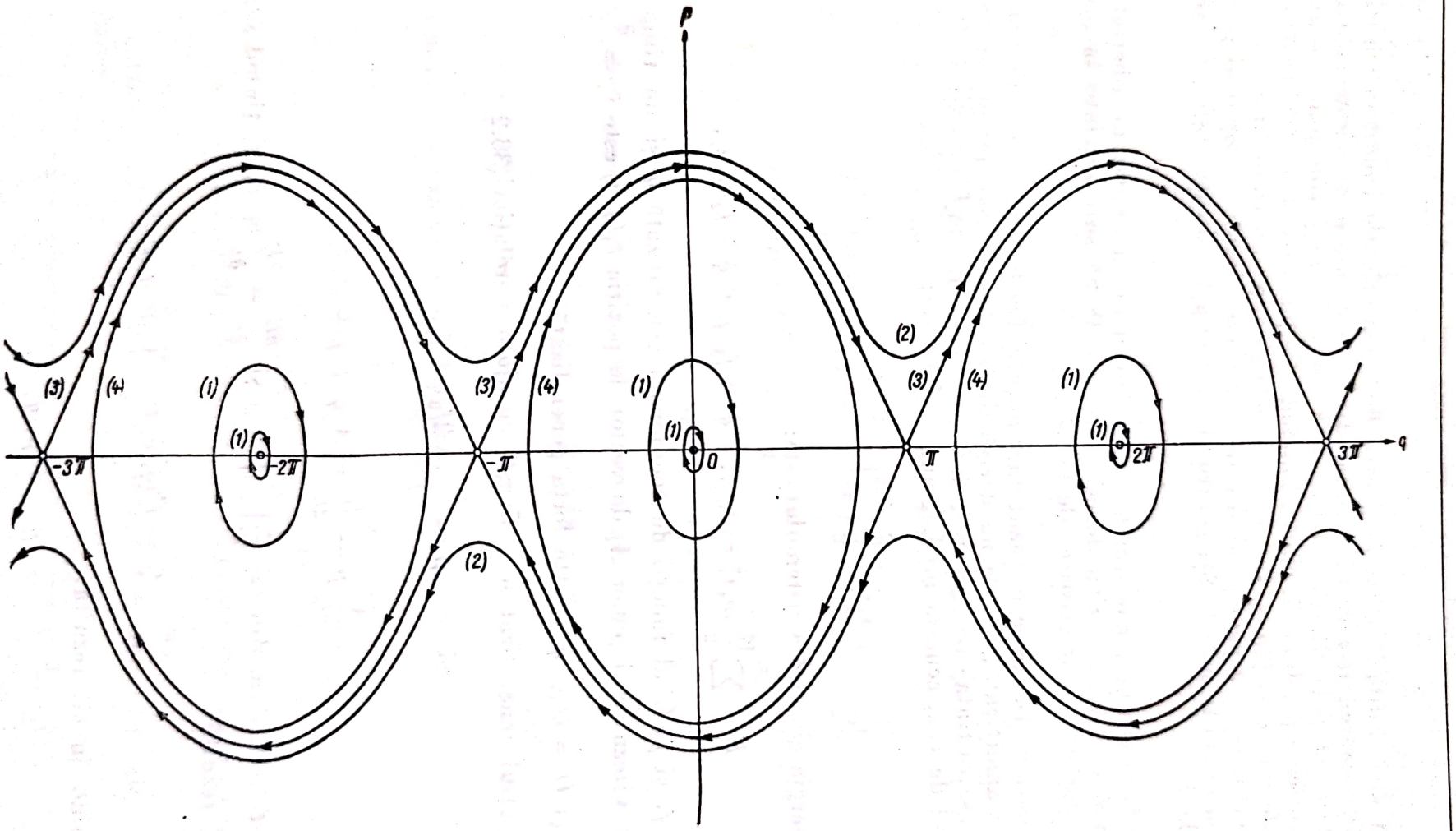


Fig. 36.3, *c*

poziții de echilibru nestabile pentru mici variații ale condițiilor inițiale, punctul reprezentativ de pe caracteristică depărtîndu-se de aceste poziții de echilibru [curbele *2*]. Caracteristica *3* $W = 2\,m\,g\,l$ corespunde mișcării asimptotice a pendulului, mobilul urcînd spre poziția cea mai ridicată de pe circumferință $q = (2n + 1)\pi$, fără a o atinge după un timp finit.

Pentru $W > 2\,mg\,l$ pendulul are o mișcare rotatorie, impulsul p nu-și schimbă semnul [curbele *2*]; pentru $W < 2\,m\,g\,l$, mișcarea este oscilatorie [curbele *1*, *4*].

36.4. Să se studieze mișcarea unui sistem cu un singur grad de libertate (q) în vecinătatea unei poziții de echilibru $q = 0$. Să se reprezinte în planul fazelor curbele caracteristice ale mișcării.

Rezolvare. Deoarece în cazul unor mișcări foarte simple, ca mișcarea oscilatorie amortizată, forțele nu derivă dintr-o funcție sau pseudofuncție de forță U, se va trata cazul general, cînd o astfel de funcție U nu există. Pentru un astfel de caz, ecuația lui Lagrange (34.4) este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q, \tag{1}$$

unde energia cinetică a sistemului este:

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = f_0(q, t)\,\dot{q}^2 + f_1(q, t)\,\dot{q} + f_2(q, t), \tag{2}$$

$f_0 > 0$, f_1 și f_2 fiind funcții de coordonata generalizată q și de timpul t, deoarece viteza unui punct A_i de vector de poziție $\bar{r}_i(q, t)$ este $\bar{v}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$, și $Q = Q(q, \dot{q}, t)$ este forța generalizată.

Impulsul generalizat se definește cu ajutorul relației (36.2):

$$p = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = 2f_0\,\dot{q} + f_1, \tag{3}$$

deci:

$$\dot{q} = \frac{1}{2f_0}\,p - \frac{f_1}{2f_0} = A(q, t)\,p + B(q, t), \tag{4}$$

cu $A(q, t) > 0$. Cum din (2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \dot{p}$ și $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t}(q, \dot{q}, t)$, ținînd seamă și de (3) rezultă:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + Q = F(q, \dot{q}, t) = C(p, q, t)$$

și înlocuind în (1) rezultă:

$$p = C(p, q, t). \tag{5}$$

Studiul mișcării sistemului revine la rezolvarea celor două ecuații diferențiale de ordinul întîi (4) și (5). În cazul legăturilor scleronome $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 0$, $f_1 = f_2 = 0$, deci și $B = 0$, și $A = A(q)$, sistemul reducîndu-se la:

$$\dot{q} = A(q)p \qquad \dot{p} = C(p, q, t), \tag{6}$$

și dacă forțele nu depind explicit de timp, $Q = Q(q, \dot{q})$ rezultă:

$$\dot{q} = A(q)p \qquad p = C(p, q). \tag{7}$$

Să se studieze pentru acest caz mișcarea în vecinătatea poziției de echilibru: $q = 0$. Cum $\frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial f_0}{\partial q} q^2 = \frac{\partial f_0}{\partial q} A^2(q)p^2$, și în poziția de echilibru $Q(O, O) = 0$ rezultă $C(O, O) = 0$. Deci pentru $p = 0$, $q = 0$, din (7) rezultă: $\dot{q} = 0$, $\dot{p} = 0$, deci originea O este punct singular al familiei de curbe caracteristice date de ecuațiile (7). Dezvoltînd în serie Mac Laurin în jurul punctului $p = 0$, $q = 0$ funcțiile $A(q)$ și $C(p, q) = 0$ rezultă:

$$\dot{q} = \left[A(O) + \left(\frac{dA}{dq}\right)_0 q + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2A}{dq^2}\right)_0 q^2 + \cdots\right]p$$

$$\dot{p} = C(O, O) + \left(\frac{\partial C}{\partial q}\right)_0 q + \left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_0 p + \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}\right)_0 q^2 + 2\left(\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial p}\right)_0 qp + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial p^2}\right)_0 p^2\right] + \cdots$$

și păstrînd termenii de grad mai mic decît doi ai dezvoltării, rezultă:

$$\dot{q} = ap \qquad \dot{p} = bq + cp, \tag{8}$$

unde $a = \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 > 0$; $b = \left(\frac{\partial C}{\partial q}\right)_0$; $c = \left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_0$.

Sistemul (8) este un sistem liniar cu ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} -r & a \\ b & c-r \end{vmatrix} = 0 \qquad r^2 - cr - ab = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4ab}}{2}. \tag{9}$$

În funcție de rădăcinile (9), urmează să se examineze următoarele cazuri particulare:

1. Rădăcini pur imaginare: $c = 0$, $b < 0$.

Notînd $-ab = \nu^2$, $r_{1,2} = \pm i\nu$, integralele generale ale sistemului (8) fiind:

$$q = A\cos(\nu t - \varphi) \qquad p = -\frac{\nu A}{a}\sin(\nu t - \varphi). \tag{10}$$

Eliminînd timpul t între ecuațiile (10) se obțin caracteristicile, familia de elipse concentrice (fig. 36.4, a):

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{p^2}{\frac{\nu^2 A^2}{a^2}} = 1 \qquad (11)$$

omotetice (raportul semiaxelor $\frac{|A|}{\frac{\nu|A|}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, nedepinzînd de condițiile inițiale). Caracteristicile sînt curbe închise purtînd denumirea de *cicluri*.

Pentru $A = 0$ se obține punctul singular O, $p = 0$, $q = 0$ denumit *centru*, prin el netrecînd nici o curbă caracteristică. Poziția de echilibru O examinată este *simplu stabilă*.

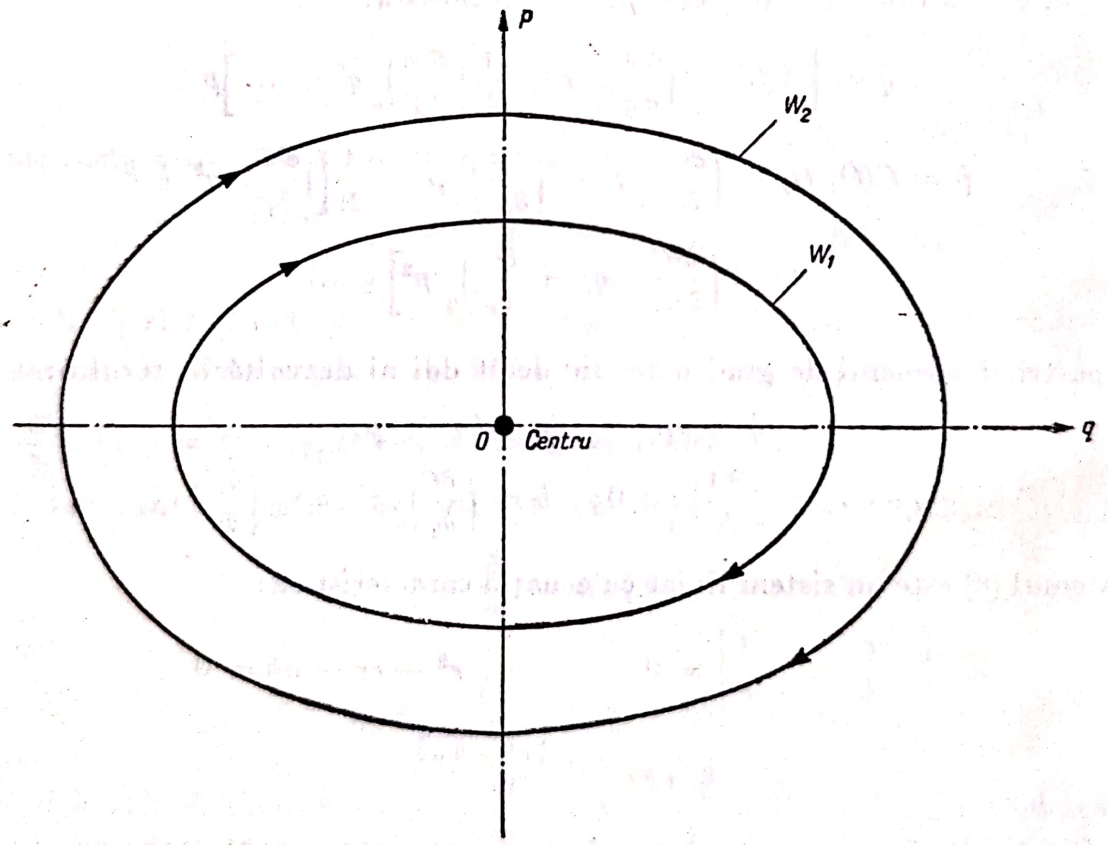


Fig. 36.4, a

Cazul precedent este cazul oscilațiilor armonice (v. problema 36.2).

2. Rădăcini reale și opuse: $c = 0$, $b > 0$. Notînd $r_{1,2} = \pm\sqrt{ab} = \pm\nu$ rezultă:

$$q = C_1 e^{\nu t} + C_2 e^{-\nu t} \qquad p = \frac{\nu C_1}{a} e^{\nu t} - \frac{\nu C_2}{a} e^{-\nu t} \qquad (12)$$

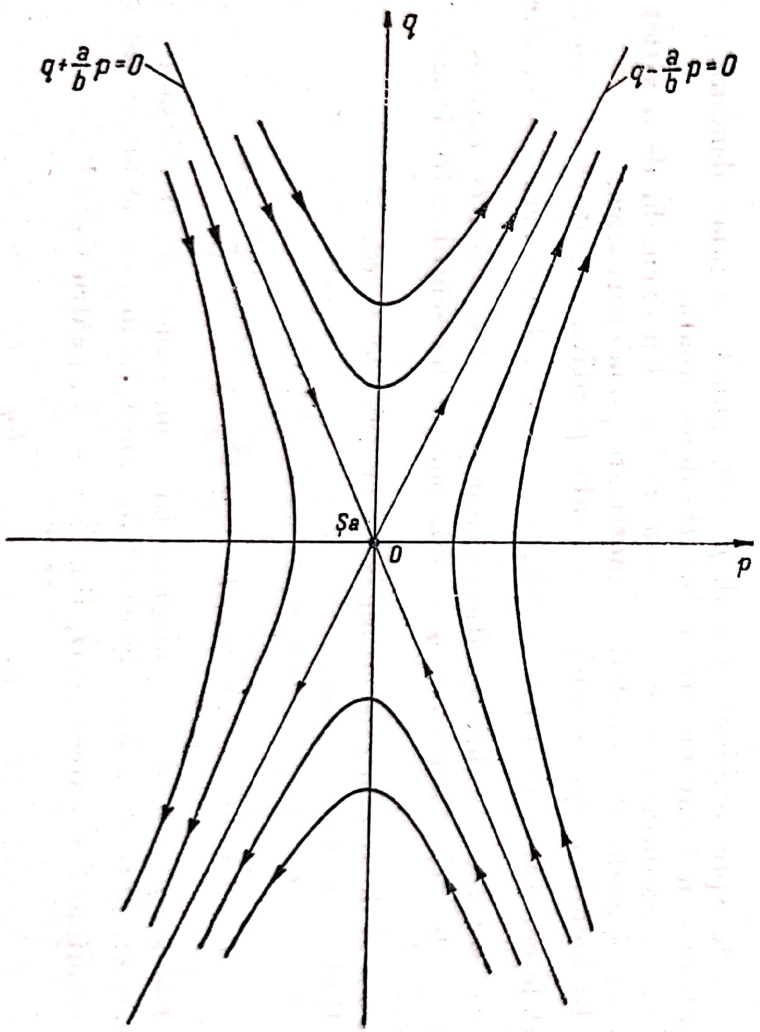


Fig. 36.4, *b*

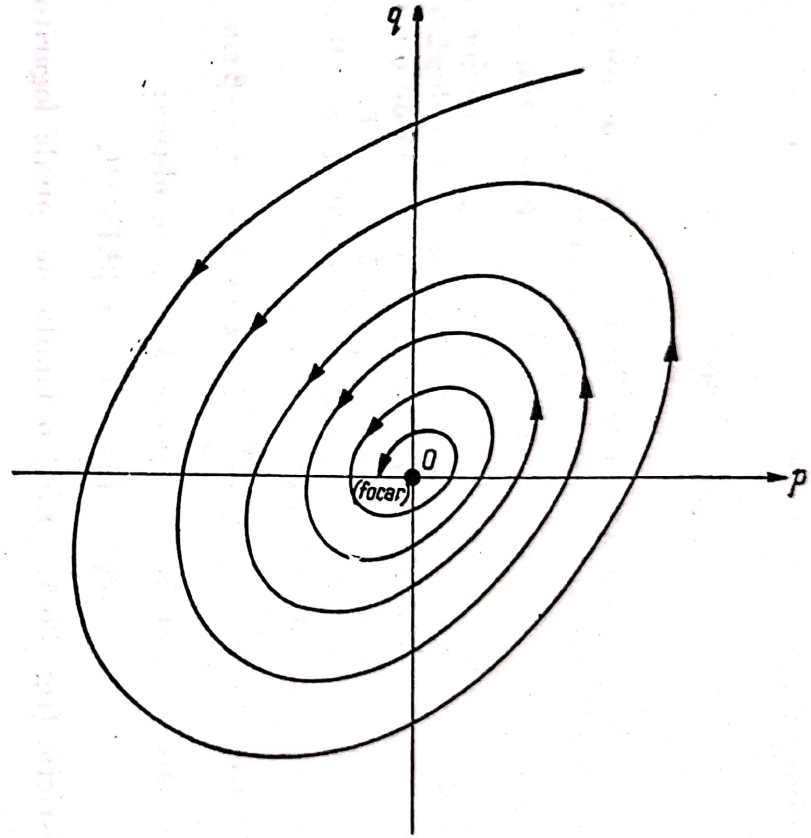


Fig. 36.4, *c*

și eliminînd timpul t se obține:

$$\frac{q^2}{A^2} - \frac{p^2}{\frac{\nu^2 A^2}{a^2}} = \pm 1, \tag{13}$$

cu $A^2 = |4 C_1 C_2|$ caracteristicile fiind o familie de hiperbole omotetice (fig. 36.4, *b*). Pentru $C_1 = 0$ sau $C_2 = 0$, deci $A = 0$ ele degenerează în dreptele $q \pm \frac{a}{b} p = 0$ care trec prin origine, punct singular denumit *șa*. În aceste cazuri, din (12) rezultă că mobilul ajunge în origine pentru $t = +\infty$ ($C_1 = 0$), respectiv $t = -\infty$ ($C_2 = 0$), adică mobilul se depărtează de origine care este o poziție de echilibru *nestabilă*. Un exemplu de o astfel de mișcare este cea produsă de o forță elastică repulsivă $\bar{F} = k\,\bar{r}$.

3. Rădăcini complexe cu partea reală negativă $c < 0$ $c^2 + 4ab < 0$. Notînd $r_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$ rezultă:

$$q = A e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi); \quad p = \frac{A e^{-\alpha t}}{a} [-\alpha \cos(\beta t - \varphi) - \beta \sin(\beta t - \varphi)]. \tag{14}$$

Prin eliminarea lui $\sin(\beta t - \varphi)$ și $\cos(\beta t - \varphi)$ se obține:

$$\beta^2 q^2 + (\alpha q + ap)^2 = \beta^2 A^2 e^{-2\alpha t},$$

caracteristicile (fig. 36.4,*c*) fiind o familie de spirale logaritmice, deoarece $\frac{(\sqrt{p^2+q^2})_t}{(\sqrt{p^2+q^2})_{t=T}} = e^{-\alpha T}$, unde $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Pentru $t \to +\infty$, punctul reprezentativ $R(q, p)$ tinde spre originea $q = 0$, $p = 0$, punct singular denumit *focar*.

Tangenta în focar nu are o direcție determinată.

Mișcarea examinată este *asimptotic stabilă*. Un exemplu de o astfel de mișcare ar fi acela al oscilațiilor amortizate pseudoperiodice.

4. Rădăcini complexe cu partea reală pozitivă $c > 0$, $c^2 + 4ab < 0$. Integralele generale au tot forma (14), $-\alpha$ fiind înlocuit prin $+\frac{c}{2}$. Caracteristicile sînt tot spirale logaritmice, dar punctul singular O, care este tot un *focar*, este atins pentru $t \to -\infty$, poziția de echilibru fiind nestabilă (fig. 36.4, *d*).

Un astfel de sistem este cu un izvor propriu de energie.

5. Rădăcini reale negative $c < 0$, $b < 0$, $c^2 + 4ab > 0$. Notînd $n_1 = -r_1$, $n_2 = -r_2$ cu $n_1 < n_2$ se obține:

$$q = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}; \quad p = -\frac{n_1 C_1}{a} e^{-n_1 t} - \frac{n_2 C_2}{a} e^{-n_2 t}. \tag{15}$$

Pentru $t \to \infty$, $p = 0$, $q = 0$, originea fiind un punct singular denumit *nod* (fig. 36.4, *e*). Spre deosebire de cazul 3, tangenta în origine are o direcție bine determinată, deoarece în O, $\lim_{t\to\infty} \frac{q}{p} = -\frac{a}{n_1}$, pentru $C_1 \neq 0$ și:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\dot{p}}{\dot{q}} + \frac{bq + cp}{ap} = \frac{c}{a} + \frac{bq}{ap} = \frac{c}{a} - \frac{b}{n_1}.$$

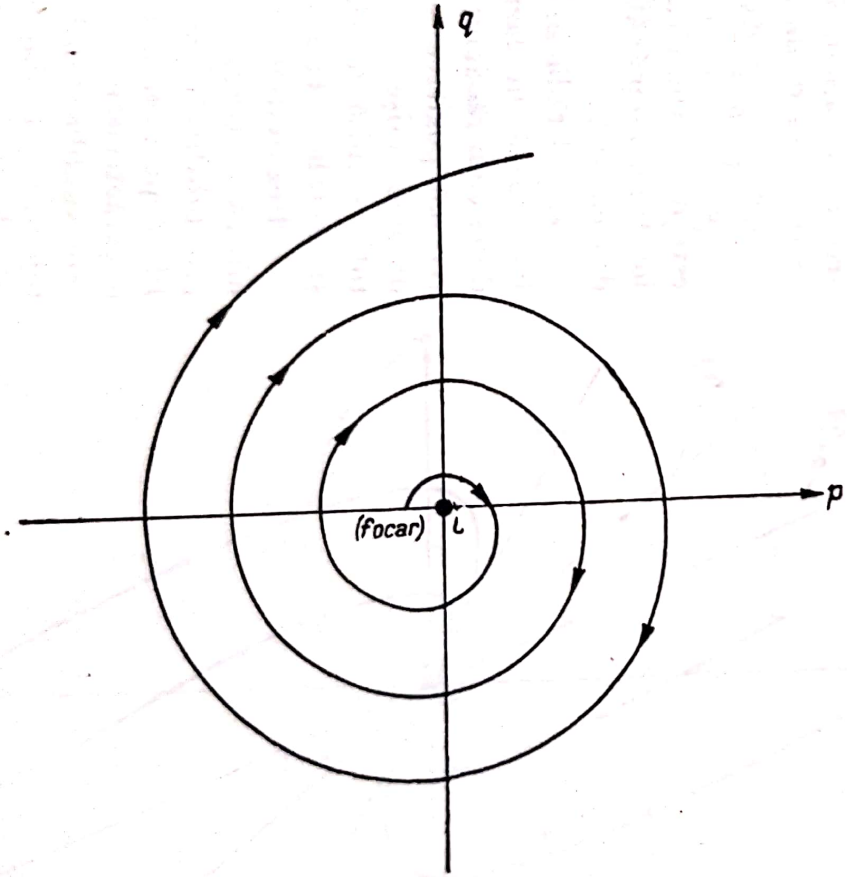


Fig. 36.4, *d*

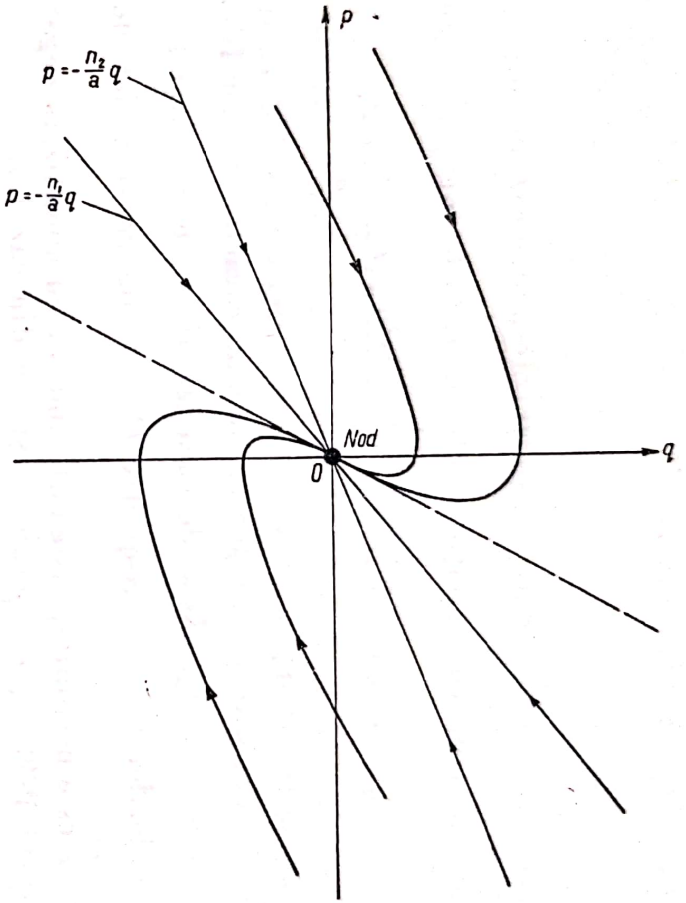


Fig. 36.4, *e*

Pentru $C_1 = 0$ caracteristica este dreapta $p = -\frac{n_2 q}{a}$ și pentru $C_2 = 0$ dreapta $p = -\frac{n_1 q}{a}$.

Mișcarea este tot *asimptotic stabilă* și corespunde cazului mișcărilor puternic amortizate aperiodice.

6. Rădăcini reale cu cel puțin o rădăcină $r_1 > 0$. Integralele generale sînt:

$$q = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}; \qquad p = \frac{r_1 C_1}{a} e^{r_1 t} + \frac{r_2 C_2}{a} e^{r_2 t}. \tag{16}$$

Dacă ambele rădăcini sînt pozitive, originea este tot un *nod*, ea fiind atinsă pentru $t \to -\infty$, direcția tangentei comune caracteristicilor fiind dată de $\frac{dp}{dq} = \frac{c}{a} + \frac{b}{r_1}$ cu $r_1 > r_2$, afară de caracteristicile $p = \frac{r_2 q}{a}$ și $p = \frac{r_1 q}{a}$ care corespund valorilor $C_1 = 0$, respectiv $C_2 = 0$ ale constantelor de integrare (fig. 36.4, *f*).

Mișcarea este nestabilă, sistemul fiind tot cu amortizare negativă, adică avînd un izvor propriu de energie ca și cea din cazul 4.

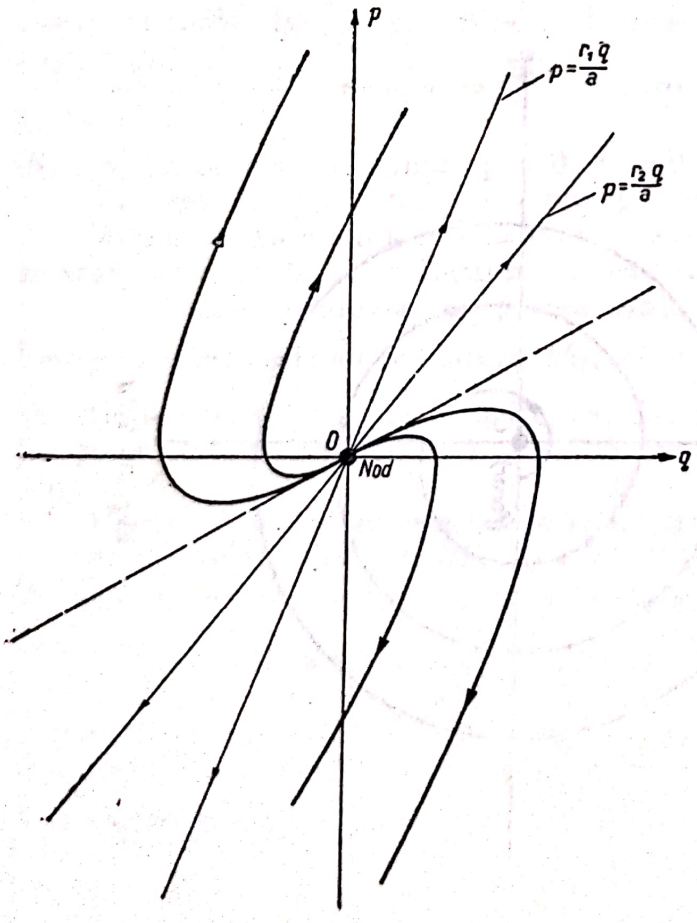


Fig. 36.4, *f*

Dacă rădăcinile sînt reale, dar de semne contrare, prin O trec doar caracteristicile $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ de ecuații $p = \frac{r_2 q}{a}$ și $p = \frac{r_1 q}{a}$. Originea este o *șa*, alura caracteristicilor fiind asemănătoare cu cele din cazul 2.

Cazul rădăcinilor duble se încadrează în cazul 5 sau 6, după cum rădăcinile sînt negative sau pozitive. Originea este un nod, mișcarea fiind asimptotic stabilă în prima situație și nestabilă în a doua.

Rezultatele stabilite permit să se tragă concluzii asupra stabilității poziției de echilibru prin simpla examinare a caracteristicilor. Echilibrul este simplu stabil dacă punctele singulare sînt centre. Echilibrul este asimptotic stabil dacă punctele singulare sînt noduri sau focare și sensul de

deplasare al punctului reprezentativ $R(q, p)$ pe caracteristică este spre punctul singular. Dacă sensul de deplasare este dinspre punctul singular sau există măcar o astfel de caracteristică ca în cazul șeilor, atunci poziția de echilibru este nestabilă.

Astfel, la studiul mișcării pendulului simplu din figura 36.3, *c* se vede că punctele $q = (2n\pi)\,\pi$, $p = 0$ sînt centre, deci poziții de echilibru simplu stabile, punctele $q = (2n + 1)\,\pi$, $p = 0$ fiind șei, deci poziții nestabile de echilibru.

C. PROBLEME NEREZOLVATE

36.5. Un punct greu p de masă m, obligat să rămînă pe un cerc luciu de rază r situat într-un plan vertical, este atras cu o forță elastică de constantă elastică $k = \frac{mg}{r}$ de centrul atractiv C, unde $OC = 2r$ (fig. 36.5).

Să se scrie funcția lui Hamilton corespunzătoare, să se reprezinte caracteristicile și să se studieze stabilitatea în jurul pozițiilor de echilibru.

Răspuns: $H = \frac{p^2}{2mr^2} + 2mgr\cos^2\frac{q}{2} = W = \text{const.}$

Pentru $W = 0$ caracteristicile se reduc la centrele $q = (2n+1)\,\pi$, $p = 0$ (punctul B), poziții de echilibru stabil.

Pentru $O < W < 2mgr$, caracteristicile sînt curbe închise în jurul pozițiilor de echilibru stabil, mișcarea fiind oscilatorie în jurul punctului B. Pentru $W = 2mgr$, caracteristicile sînt sinusoidele $p = \pm 2mg^{1/2}r^{3/2}\sin\frac{q}{2}$, ele trecînd prin șeile $q = 2n\pi$, $p=0$ (punctul A), poziții de echilibru nestabil, mișcarea fiind asimptotică.

Pentru $W > 2mgr$, caracteristicile sînt curbe deschise, mișcarea fiind rotatorie.

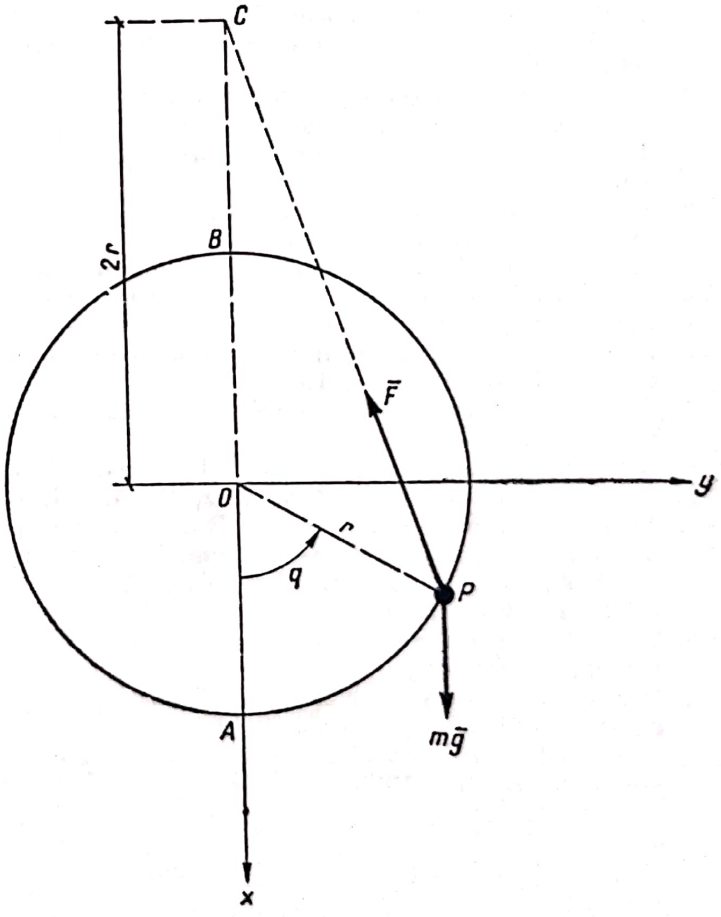


Fig. 36.5

BIBLIOGRAFIE

1. Ştefan Bălan, E. Beiu Palade, *Curs de mecanică teoretică, vol. I şi II*, Ministerul Învăţământului, Bucureşti, 1957, 1960.
2. Ştefan Bălan, Octavian Vlad, *Culegere de probleme de mecanică, vol. I şi II.*
3. N. N. Bucholtz, I. M. Voronkov, I. A. Minakov, *Culegere de probleme de mecanică raţională* (traducere din limba rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1952.
4. Alex. Stoenescu, Gh. Buzdugan şi colectivul, *Culegere de probleme de mecanică teoretică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
5. A. A. Cosmodemianski, *Kurs Teoreticeskoi Mehaniki*, Moscova, Uciped-ghiz, 1955.
6. L. Hamburger, Gh. Buzdugan, *Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia maşinilor*, Bucureşti, Editura tehnică, 1958.
7. I. V. Mescerski, *Sbornik zadaci po teoreticeskoi Mehanike*, Moscova, Gostehizdat, 1953.
8. I. A. Nekrasov, *Curs de mecanică teoretică* (traducere din limba rusă) *vol. I, II*, Bucureşti, Editura tehnică, 1955.
9. A. Ripianu, *Cinematica şi Dinamica*, Cluj, 1954—1955.
10. M. Sarian, *Mecanica şi rezistenţa materialelor, vol. I* (Mecanica), Bucureşti, Editura de stat didactică şi pedagogică, 1961.
11. A. Stan, M. Grumăzescu, *Culegere de probleme de mecanică tehnică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1953.
12. Al. Stoenescu, Gh. Silaş, *Curs de mecanică teoretică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1960.
13. Al. Stoenescu, *Statica*, Bucureşti, 1952.
14. Al. Stoenescu, *Dinamica*, Bucureşti, 1956.
15. Al. Stoenescu şi Gh. Buzdugan, *Cinematica*, Bucureşti, 1949.
16. A. Tanet, *Cours de Mécanique*, Paris, 1949.
17. V. Vîlcovici, Şt. Bălan, R. Voinea, *Mecanică teoretică*, Bucureşti, Editura tehnică, 1959.
18. Radu Voinea, *Mecanică teoretică, vol. I, II*, Litografia Institutului Politehnic Bucureşti, 1954.
19. Rudolf Voinaroski, *Mecanică tehnică, vol. I, II*, Editura Institutului Politehnic Bucureşti, 1952.
20. F. Wittenbauer, *Aufgaben aus der Technischen Meckanik*, Verlag Iulius Sprînger, Berlin, 1924.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

DINAMICA

	Pag.
Capitolul XX *Principiile dinamicii. Unităţi de măsură*	5
A. Definiţii şi formule	5
B. Probleme rezolvate	9
C. Probleme nerezolvate	20
Capitolul XXI *Dinamica punctului material liber*	21
A. Definiţii şi formule	21
B. Probleme rezolvate	22
C. Probleme nerezolvate	64
Capitolul XXII *Forţe centrale*	67
A. Definiţii şi formule	67
B. Probleme rezolvate	69
C. Probleme nerezolvate	94
Capitolul XXIII *Forţe elastice. Mişcări oscilatorii*	96
A. Definiţii şi formule	96
B. Probleme rezolvate	102
C. Probleme nerezolvate	147
Capitolul XXIV *Dinamica punctului material supus la legături*	149
A. Definiţii şi formule	149
B. Probleme rezolvate	152
C. Probleme nerezolvate	207
Capitolul XXV *Mişcarea relativă a punctului material*	210
A. Definiţii şi formule	210
B. Probleme rezolvate	212
C. Probleme nerezolvate	244
Capitolul XXVI *Momente de inerţie*	246
A. Definiţii şi formule	246
B. Probleme rezolvate	254
C. Probleme nerezolvate	272
Capitolul XXVII *Teoreme generale*	273
27.1. Teorema impulsului şi teorema mişcării centrului de masă	273
A. Definiţii şi formule	273
B. Probleme rezolvate	276
C. Probleme nerezolvate	300
27.2. Teorema momentului cinetic	302
A. Definiţii şi formule	302
B. Probleme rezolvate	306
C. Probleme nerezolvate	334
27.3. Teorema energiei cinetice	335
A. Definiţii şi formule	335
B. Probleme rezolvate	336
C. Probleme nerezolvate	359

Scanned with OKEN Scanner

	Pag.
Capitolul XXVIII *Solidul cu o axă fixă*	360
A. Definiţii şi formule	360
B. Probleme rezolvate	363
C. Probleme nerezolvate	384
Capitolul XXIX *Solidul cu un punct fix*	385
A. Definiţii şi formule	385
B. Probleme rezolvate	389
C. Probleme nerezolvate	401
Capitolul XXX *Lucru mecanic. Putere. Randament*	402
A. Definiţii şi formule	402
B. Probleme rezolvate	406
C. Probleme nerezolvate	419
Capitolul XXXI *Mişcări impulsive*	419
A. Definiţii şi formule	419
B. Probleme rezolvate	422
C. Probleme nerezolvate	462
Capitolul XXXII *Principiul lucrului mecanic virtual*	465
A. Definiţii şi formule	465
B. Probleme rezolvate	469
C. Probleme nerezolvate	491
Capitolul XXXIII *Principiul lui d'Alembert*	492
A. Definiţii şi formule	492
B. Probleme rezolvate	494
C. Probleme nerezolvate	570
Capitolul XXXIV *Ecuaţiile lui Lagrange*	574
A. Definiţii şi formule	574
B. Probleme rezolvate	577
C. Probleme nerezolvate	622
Capitolul XXXV *Stabilirea echilibrului. Mici soluţii în jurul poziţiei de echilibru*	628
A. Definiţii şi formule	628
B. Probleme rezolvate	631
C. Probleme nerezolvate	652
Capitolul XXXVI *Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton*	652
A. Definiţii şi formule	652
B. Probleme rezolvate	653
C. Probleme nerezolvate	669

Tehnoredactor : PROSAN ILINCA

Dat la cules 03.01.1963. Bun de tipar 08.07.1963. Apărut 1963. Tiraj 3000+120 ex. Hîrtie velină sat. 70×100/56 g/m², 16/70×100. Coli editoriale 39,585. Coli de tipar 42. A 4146. C.Z. pentru bibliotecile mari 518.5 (075.8) C.Z. pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 30.167 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piaţa Scînteii 1, Bucureşti — R.P.R.

Preţul cărţii	**18 lei**
Preţul legătoriei	**2 lei**
Total	**20 lei**

Scanned with OKEN Scanner